Б.Т. Кузнецов

ИНВЕСТИЦИИ

2-е издание

ЮНИТИ
UNITY

ВВЕДЕНИЕ

Рыночная экономика не может развиваться без инвестиций, поэтому большое внимание к инвестициям различного типа в нашей стране проявляют и государственные органы, и предприниматели.

Развитие инвестиций в России должно базироваться на следующих основных принципах:

- справедливое распределение валового внутреннего продукта;
- безопасность;
- анализ;
- информация;
- доступность;
- управление инвестициями в объеме страны;
- конкурентная структура рынка.

Справедливое распределение валового внутреннего продукта предполагает, прежде всего, более равномерное распределение этого дохода между членами общества. Под этим тезисом не следует понимать «уравниловку», приведшую экономику в 80-х годах прошлого века к деградации. Труд должен оплачиваться в соответствии с результатами, но и разрывы в доходах в сотни тысяч раз и более недопустимы. Справедливое распределение валового внутреннего продукта необходимо для того, чтобы реформы поддерживались населением страны. Без такой поддержки государственным органам будет трудно добиться существенных успехов в развитии экономики.

Безопасность предусматривает разработку правовых норм, исключающих безнаказанное изъятие денег у инвесторов, и безотказное выполнение этих норм. Наши соотечественники потеряли свои сбережения во многих финансовых пирамидах. Этот печальный опыт показал, что население готово инвестировать свои свободные средства, но тот же опыт привел к утрате доверия населения к все-возможным инвестиционным организациям. Чтобы развеять эти недоверия, нужны четкие и доступные для всех правила инвестирования. Люди должны быть уверены в том, что Государство и Закон не позволят их обворовать.

Безопасность инвестиций зависит, с одной стороны, от объективных факторов, таких, как экономические кризисы и потрясения на финансовых рынках, а с другой — от субъективных факторов, куда входят, в частности, воровство и неумелая организация предприятия. Для борьбы с объективными причинами должны быть привлечены научные кадры, исследующие законы развития инвестиционного рынка и вырабатывающие методы борьбы с потрясениями. Для борьбы с воровством должны быть приняты законы, исключающие возможность правонарушений, и обеспечено их безусловное выполнение.

Под анализом понимается развитие аналитических центров во всех регионах страны, занимающихся исследованием характеристик ценных бумаг, созданием бизнес-планов и другой документации.

Современный фондовый рынок развитых стран работает на основе результатов анализа характеристик ценных бумаг. Сегодня существует развитая теория фондового рынка, включающая, в частности, оптимизацию портфеля ценных бумаг. В России доступной информации для широкого круга лиц по характеристикам ценных бумаг, опубликованной в доступных изданиях, явно недостаточно. В последние годы в стране появился ряд аналитических центров по исследованию характеристик ценных бумаг. Например, на сайте http://stocks.investfunds.ru сказано: «Информационный ресурс Investfunds — проект Информационного агентства Cbonds.ru, созданный с целью полного, оперативного и **бесплатного** обеспечения информацией частных инвесторов, работающих на фондовом рынке». Однако большую часть информации, полезной инвесторам, например статистические данные по ценам различных типов ценных бумаг, агентство предоставляет за деньги.

В результате деятельности аналитических центров по созданию бизнес-планов должны разрабатываться технико-экономические обоснования (бизнес-планы) инвестиционных проектов, соответствующих международным требованиям. Только имея прошедший всестороннюю экспертизу бизнес-план, зная ожидающие его риски и доходности, инвестор со знанием дела будет принимать участие в финансировании этого проекта.

Информация о результатах работы аналитических центров должна быть доведена до широких слоев населения через всевозможные издания, доступные каждому. Эта информация должна быть представлена в удобном и доступном виде.

Доступность предусматривает вовлечение в процесс инвестирования всех слоев населения, обладающих денежными ресурсами в валюте и рублях. Это, прежде всего, сбережения народа, хранящиеся в валюте. Попытки, предпринимаемые в направлении привлечения этих потенциальных инвестиций, не способны заинтересовать широкие слои населения, так как базируются в основном на использовании инвестиционных фондов, доходность которых невелика, а условия работы и методы использования денег являются закрытыми и неясными для инвестора. Поэтому люди не спешат воспользоваться услугами этих фондов. Тем не менее, несмотря на печальный опыт последних лет, население готово инвестировать свои свободные средства.

Для привлечения средств населения в производство необходимо выработать и внедрить в жизнь механизмы, реализующие возможность приобретения акций различных предприятий широкими слоями населения. Именно этот тип инвестиций может оказать существенное воздействие на развитие экономики в России.

Большой инвестиционный потенциал заложен в вывозимой за границу валюте. Политика правительства должна быть направлена на то, чтобы использовать эти финансовые потоки в отечественных инвестициях.

Использование внутренних ресурсов и ограничение внешних заимствований позволит существенно увеличить темп развития экономики страны.

Управление инвестициями в объеме страны осуществляется центральными государственными органами. В России такими органами являются правительство, Дума и Центральный банк. Для управления инвестициями правительством создается модель развития экономики. В этой модели внутренний валовой продукт (внутренний национальный продукт, национальный доход) делится в определенной (оптимальной) пропорции на потребление и инвестиции. В России необходимо учесть также часть капитала, вывозимого за границу. Эта пропорция выбирается так, чтобы экономика развивалась оптимальным образом. Управление инвестициями правительством, Думой и Центральным банком осуществляется в этом случае путем инвестиционной и налоговой политики, влиянием на норму ссудного процента.

Развитие науки и технологии приводит к изменению исходных данных модели оптимального управления инвестициями. Поэтому в процессе управления необходимо отслеживать наиболее существенные достижения в технологиях и вносить в модель соответствующие изменения.

Управление инвестициями должно приводить к выполнению выбранной пропорции потребления и инвестирования. Развивающаяся оптимальным образом экономика приводит к стабильному и достаточно быстрому экономическому росту. Примером модели оптимального развития является модель Р. Солоу, состояние экономики в которой задается рядом переменных, являющихся функциями времени, измеряемого в годах.

Совершенно очевидно, что для реализации оптимальной программы инвестирования в стране должны быть созданы условия, близкие к совершенной конкуренции, предполагающей большое количество фирм и покупателей, свободный вход на рынок и выход с рынка, совершенную информированность продавцов и покупателей о состоянии рынка. На таком рынке отдельные продавцы не контролируют цены.

Вернуться в библиотеку учебников

Часть 1

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ, ВИДЫ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА ИНВЕСТИЦИЙ

Глава 1 ЗНАЧЕНИЕ И ЦЕЛИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ

1.1. Определение инвестиций

В переводе с латинского слово «инвестиция» означает *вложение*. В современном понимании инвестиция означает вложение капитала в целях его увеличения в будущем. При этом увеличение капитала должно компенсировать инвестору отказ от потребления средств, имеющихся в настоящее время, и риск. Это увеличение должно перекрыть также инфляционные потери.

Понятно, что инвестировать капитал можно только в те виды предпринимательской деятельности, которые не противоречат законодательству и нормам нравственности.

Статья 1 Федерального закона «Об инвестиционной деятельности в Российской Федерации, осуществляемой в форме капитальных вложений» от 25 февраля 1999 г. № 39-ФЗ (в ред. от 2 января 2000 г.) гласит: «Инвестиции — денежные средства, ценные бумаги, иное имущество, в том числе имущественные права, иные права, имеющие денежную оценку, вкладываемые в объекты предпринимательской и (или) иной деятельности в целях получения прибыли и (или) достижения иного полезного эффекта».

Понятие «достижение иного полезного эффекта» не следует понимать как эффект от любого типа вложений: покупка дорогого телевизора или автомобиля для личных нужд не является инвестицией; не являются инвестициями благотворительные средства, направленные, например, на строительство ночлежки. Вложения социального типа, например в строительство стадиона, эксплуатация которого не принесет никакого дохода, также не следует относить к инвестициям.

Вопросам анализа и управления инвестициями в настоящее время посвящено множество работ. Это понятие является одним из важнейших в кейнсианской[1] модели совокупных расходов общества. Как известно, в кейнсианской модели расходы общества состоят из личного потребления, инвестиций, государственных расходов, чистого экспорта. С ростом дохода люди увеличивают личное потребление, но не так быстро, как растет доход. Оставшиеся при этом средства инвестируются. Кейнс использовал приведенные здесь понятия в своей общей теории занятости, рассматривающей минимизацию количества безработных в обществе. Многие современные государства придерживаются этой теории в своей деятельности.

В настоящее время эффективность инвестиций определяется, как правило, на научной основе. Как любая наука, наука об инвестициях занимается описанием, объяснением и прогнозированием явлений и процессов развития различных форм инвестирования на основе открываемых ею законов. Ярким примером научного познания инвестиций является предложенная в 1951 г. Г. Марковицем[2] модель оптимального портфеля ценных бумаг. По этой модели можно выбрать наилучший портфель из всех возможных, отвечающих заданному критерию. По Г. Марковицу, это портфель, имеющий заданную доходность при минимальном риске портфеля. Позднее Д. Тобин[3] усовершенствовал модель Г. Марковица, введя в нее безрисковые ценные бумаги. Это усовершенствование существенно упростило восприятие модели и сделало ее более доступной для слабо подготовленного инвестора. Другим примером научного подхода является использование методов статистики в теории инвестиций в реальные проекты в условиях неопределенности. Описание рисков инвестиционных проектов базируется, в частности, на фундаментальных законах экономической статистики и финансового анализа.

Математическое моделирование стало в настоящее время важнейшим инструментом при проведении инвестиционных исследований. Для формирования моделей объектов инвестиционной деятельности используется информация, накапливаемая в процессе планирования и управления инвестиционными проектами, сбора и обработки статистической информации, инвестиционного анализа и т.д.

Сказанное позволяет следующим образом сформулировать определение инвестиций.

---

[1] *Джон Мейнард Кейнс* — английский экономист (1883—1946).

[2] *Гарри М. Марковиц* — американский ученый, родился в 1927 г., действительный член Эконометрического общества (Econometric Society) и Американской академии гуманитарных и технических наук (American Academy of Arts and Sciences), лауреат Премии Дж. фон Неймана (1989).

[3] *Джеймс Тобин* — американский ученый, родился в 1918 г. Основные профессиональные интересы связаны с макроэкономикой, монетарной теорией и политикой, фискальным законодательством и государственными финансами, проблемами потребления и сбережения, безработицей и инфляцией, портфельной теорией и рынком активов. В 1981 г. Тобин получил Нобелевскую премию за цикл работ, в который вошли его труды по q-теории инвестиций.

Инвестиции — это наука о состоянии и управлении реальными экономическими проектами и инструментами фондового рынка, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства движения материальных средств, вкладываемых в объекты различных видов деятельности человека, в результате которых создается доход и достигаются другие эффекты.

1.2. Инвестиции в реальные и финансовые активы

1.2.1. РЕАЛЬНЫЕ ИНВЕСТИЦИИ

Реальные инвестиции — это вложение средств в реальные активы, как материальные, так и нематериальные. Вложение средств в нематериальные активы иногда связывают с научно-техническим прогрессом и называют инновационными инвестициями. Реальные инвестиции формируют основной и оборотный капитал предприятия.

Материальные активы представляют собой средства, воплощенные в новых производственных зданиях и сооружениях, машинах, комплектующих изделиях, готовой продукции.

Нематериальные активы — это стоимость лицензий, патентов, товарных знаков, затрат на рекламу, на подготовку кадров.

Размещение эмитируемых ценных бумаг для финансирования реальных инвестиционных проектов проводится на первичном фондовом рынке.

Инвестиции подразделяют также на прямые и косвенные. *Прямые инвестиции* предполагают непосредственное участие инвестора в процессе вложения средств. Если инвестор приобретает пай паевого инвестиционного фонда, то он осуществляет *косвенное инвестирование.* Конкретное направление вложения средств в этом случае определяют специалисты фонда.

1.2.2. ФИНАНСОВЫЕ ИНВЕСТИЦИИ

Под *финансовыми инвестициями* понимают вложения средств в различные финансовые активы (инструменты).

Среди финансовых активов можно выделить краткосрочные и долгосрочные финансовые инструменты. К *краткосрочным финансовым инструментам* относят сберегательные счета и депозиты, депозитные и сберегательные сертификаты, краткосрочные векселя, ценные краткосрочные бумаги правительства. Инвестирование в краткосрочные финансовые инструменты, как правило, на срок менее одного года, имеют целью использование временно свободных средств для сравнительно быстрого извлечения дохода. К *долгосрочным финансовым инструментам* относят активы, срок исполнения которых более года. Такими активами, например, являются акции, облигации со сроком более года и др.

Рассматриваемые финансовые инструменты могут продаваться и покупаться на вторичном рынке, который называют фондовым рынком, или рынком ценных бумаг.

1.2.3. СРАВНЕНИЕ РЕАЛЬНЫХ И ФИНАНСОВЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

Провести четкую границу между реальными и финансовыми инвестициями невозможно. Действительно, приобретая, например, акции на первичном рынке ценных бумаг, инвестор финансирует реальный инвестиционный проект, по которому создается новое предприятие или модернизируется действующее, т.е. становится совладельцем этого предприятия. Если инвестор по тем или иным причинам хочет вернуть свои деньги, то он продает эти акции на вторичном рынке ценных бумаг, и тогда совладельцем предприятия становится новый инвестор.

Например, прямые реальные иностранные инвестиции — это инвестиции, контролирующие не менее 10% акционерного капитала, которые дают право влиять на процесс управления предприятием. Портфельные иностранные инвестиции, связанные с покупкой акций, обычно не дают права влиять на процесс управления предприятием и составляют менее 10% в общем акционерном капитале.

1.3. Финансовые институты

Финансовый институт — это институт, действующий в качестве финансового посредника при передаче средств от кредиторов или от сберегателей к заемщикам. К числу финансовых институтов относятся коммерческие банки, инвестиционные банки, пенсионные фонды, страховые компании, паевые инвестиционные фонды.

Банк — предприятие, производящее товар в виде денег или платежных средств. Банки предоставляют различного рода услуги денежного характера. Деньги обслуживают сферу производства, распределения, обмена и потребления. Другими словами, банк — это предприятие (денежно-кредитный институт), осуществляющее регулирование платежного оборота в наличной и безналичной формах.

▶ ***Коммерческие банки*** по характеру выполняемых операций делятся на универсальные и специализированные. *Специализированные* банки работают с одной отраслью народного хозяйства, с группой предприятий, а *универсальные* — с предприятиями многих отраслей.

По типу собственности банки делятся на государственные, акционерные, кооперативные, частные и смешанные.

По масштабам выделяются консорциумы, крупные, средние и мелкие банки.

По сфере обслуживания банки подразделяются на международные, национальные, межрегиональные и региональные.

По числу филиалов банки делятся на бесфилиальные и многофилиальные.

Банковской инфраструктурой называется система элементов, обеспечивающая жизнедеятельность банков. Элементы банковской инфраструктуры бывают внутренними и внешними.

Внутренние элементы инфраструктуры

1. Законодательные нормы, определяющие статус банка, перечень выполняемых им операций (устав банка и др.).

2. Внутренние правила совершения операций, обеспечивающие выполнение законов и защиту интересов вкладчиков.

3. Построение учета, отчетности, аналитической базы, компьютерная обработка данных, коммуникационные системы.

4. Структура аппарата управления банком.

Внешние элементы инфраструктуры

1. Информационное обеспечение.

2. Научное обеспечение.

3. Кадровое обеспечение.

4. Законодательная база.

▶ ***Инвестиционные банки*** — банки, предназначенные для предоставления долгосрочного займа промышленным компаниям. Примером такого банка является Европейский инвестиционный банк, созданный в 1958 г. при образовании Европейского сообщества. Он предназначен для финансирования программ и проектов, направленных на обеспечение экономической интеграции этого сообщества. Банк представляет также долгосрочные кредиты развивающимся странам.

▶ ***Пенсионные фонды*** в России формируются на федеральном и региональном уровнях. Основным источником средств фонда являются страховые взносы. Отличают взносы от работодателей-организаций, индивидуальных предпринимателей, включая иностранных граждан, лиц без гражданства, частных детективов, нотариусов, крестьянских фермерских хозяйств и т.д.

Источниками средств фонда являются также средства федерального бюджета, передаваемые фонду на выплату государственных пенсий и пособий; средства, возмещаемые Государственным фондом занятости РФ на выплату досрочных пенсий безработным гражданам; средства, полученные от мобилизации просроченной задолженности плательщиков страховых взносов в пенсионный фонд; остаток средств на начало конкретного финансового года и т.д.

Часть средств пенсионного фонда может быть использована при выполнении определенных условий, оговоренных законами РФ, на инвестиционные цели.

▶ ***Страховые компании.*** *Страхование* — это система экономических отношений, включающая образование специального фонда средств и его использование для преодоления и возмещения разного рода потерь, ущерба, вызванных неблагоприятными событиями (страховыми случаями), путем выплаты страхового возмещения и страховых сумм.

В РФ существуют три основные ф о р м ы страхового фонда:

- *централизованный страховой фонд* — образуется за счет общегосударственных ресурсов в натуральной и денежной формах; находится в распоряжении правительства;
- *фонды самострахования* — создаются самими предприятиями и организациями в виде резервных и страховых фондов, фондов риска; существуют в денежной и натуральной формах;
- *фонды страховщика* — создаются специализированными страховыми компаниями за счет уплаты взносов; существуют только в денежной форме.

Страхование выполняет следующие ф у н к ц и и:

- *рисковую* — перераспределение риска между участниками страхования;
- *предупредительную* — использование части средств на уменьшение вероятности наступления страхового случая;
- *сберегательную* — страхование используется для накопления денежных средств (страхование на дожитие);
- *контрольную* — контроль за формированием и использованием страховых фондов.

Помимо перечисленных функций страховые компании используют полученные премии также для получения дополнительных доходов от инвестиций.

▶ ***Паевые инвестиционные фонды*** играют существенную роль в системе финансовых институтов, привлекающих денежные средства населения. Они являются главными конкурентами банков по привлечению средств населения.

Паевой инвестиционный фонд представляет собой имущественный комплекс без образования юридического лица, основанный на доверительном управлении имуществом фонда специальной управляющей компанией в целях увеличения стоимости имущества фонда. Инвесторы приобретают у управляющей компании инвестиционные паи на основе договора о доверительном управлении имуществом.

Паевые инвестиционные фонды имеют много общего с обычными инвестиционными фондами. И те и другие привлекают средства граждан, инвестируют собранные средства в целях получения прибыли, отчитываются перед инвесторами. В то же время между этими фондами существуют существенные р а з л и ч и я.

1. Инвестиционный фонд существует как юридическое лицо в форме открытого акционерного общества. Паевой фонд действует без образования юридического лица на основе договоров вкладчиков с управляющей компанией, которые являются договорами о доверительном управлении денежными средствами граждан.

2. В инвестиционном фонде инвестор, приобретая акции, становится акционером фонда, т.е. его собственником, который несет всю ответственность как акционер. В паевом фонде не происходит перемены собственника. Вкладчик остается собственником своих средств, которые он может вернуть, предъявив пай к выкупу, в соответствии с условиями договора.

3. В инвестиционном фонде вкладчик получает доход в виде дивидендов. Решение о выплате дивидендов принимает общее собрание акционеров, но размер дивидендов не может быть больше величины, рекомендованной советом директоров. Общее собрание может только уменьшить рекомендованный дивиденд, но не увеличить. Поэтому мелкий акционер остается незащищенным перед советом директоров с точки зрения увеличения доходности от своих вложений.

В паевом фонде доход образуется за счет роста стоимости пая, который инвестор может вернуть управляющей компании для выкупа. Цена пая равна стоимости чистых активов, приходящихся на один пай. Так как выкуп пая управляющей компанией является обязательным, то гарантии по получению дохода являются более высокими.

Датой образования паевого инвестиционного фонда считается момент регистрации проспекта эмиссии инвестиционных паев, разработанного управляющей компанией. Регистрация осуществляется Федеральной комиссией по рынку ценных бумаг.

Инвестиционный пай является ценной именной бумагой. Инвестор имеет право продать свой пай любому другому лицу.

В зависимости от процедуры выкупа пая различают открытые и интервальные паевые фонды. *В открытом паевом фонде* управляющая компания обязана выкупить пай по требованию инвестора в течение 15 рабочих дней с момента предъявления требования. *В интервальном паевом фонде* управляющая компания обязана выкупить пай в заданные сроки с заданной периодичностью. Законодательство требует, чтобы такой выкуп производился не реже одного раза в год. Конкретные периоды устанавливаются правилами фонда.

Управляющая компания — юридическое лицо в форме акционерного общества или общества с ограниченной ответственностью, исключительным видом деятельности которого является управление активами паевых интервальных фондов, активами негосударственных пенсионных фондов, инвестиционных фондов и чековых инвестиционных фондов. Собственный капитал управляющей компании должен быть не менее 1 млрд руб. Лицензирование деятельности управляющей компании осуществляет Федеральная комиссия по рынку ценных бумаг.

На управляющую компанию паевого инвестиционного фонда возложено выполнение следующих функций:

- разработка и регистрация проспекта эмиссии инвестиционных паев;
- разработка и регистрация правил паевого инвестиционного фонда, включая инвестиционную декларацию;
- организация размещения инвестиционных паев среди инвесторов;

- управление активами одного или нескольких паевых инвестиционных фондов;
- выкуп инвестиционных паев;
- публикации информации о деятельности паевых инвестиционных фондов, об инвестиционных программах, а также о балансе имущества паевых инвестиционных фондов и балансе управляющей компании.

Инвесторы не вправе вмешиваться в деятельность управляющей компании и давать ей какие-либо указания.

За деятельность по управлению имуществом паевых инвестиционных фондов управляющая компания получает вознаграждение, которое не может превышать 5% среднегодовой стоимости чистых активов паевых инвестиционных фондов.

Специализированный депозитарий — юридическое лицо, осуществляющее деятельность по хранению сертификатов ценных бумаг и учету прав на ценные бумаги, составляющие паевые инвестиционные фонды. Специализированный депозитарий организует также учет всего имущества паевых инвестиционных фондов. Деятельность в качестве специализированного депозитария может осуществлять банк, другие кредитные учреждения или коммерческие организации, созданные в форме акционерного общества или общества с ограниченной ответственностью. Специализированный депозитарий действует на основе лицензии, выданной Федеральной комиссией по рынку ценных бумаг.

1.4. Финансовые рынки

Целью финансового рынка является распределение денежных средств между участниками экономических отношений. *Финансовый рынок состоит из рынков*:

- банковских капиталов;
- ценных бумаг;
- валюты;
- страховых и пенсионных фондов.

Целью рынка ценных бумаг (фондового рынка) является распределение денежных средств между участниками экономических отношений за счет выпуска и обращения ценных бумаг.

Роль фондового рынка состоит в распределении ресурсов между участниками экономических отношений, а также в стимулировании экономического роста. Таким образом, *во-первых*, фондовый рынок мобилизует средства вкладчиков и направляет их туда, где они могут дать наибольшую отдачу. Причем это происходит само собой, потому что согласуется с интересами отдельных участников фондового рынка. *Во-вторых*, эффективное распределение ресурсов стимулирует экономический рост и позволяет расширять масштабы хозяйственной деятельности. *В-третьих*, информация, представленная в виде курсовой стоимости ценных бумаг, показывает инвесторам экономическую конъюнктуру и дает ориентиры для размещения своих капиталов.

В свою очередь, ***рынок ценных бумаг*** (фондовый рынок) состоит из денежного рынка и рынка капиталов. *Денежный рынок* — это рынок, на котором обращаются ценные бумаги со сроком до одного года. Вексель и банковский сертификат относятся к инструментам денежного рынка и в том случае, когда они обращаются более одного года. *Рынок капитала* — это рынок, на котором обращаются ценные бессрочные бумаги или бумаги, до погашения которых остается более года.

По организационной структуре фондовый рынок делится на первичный и вторичный. *Первичный рынок* — это рынок, на котором происходит первичное размещение ценных бумаг. Лицо, выпускающее ценные бумаги, называется эмитентом, а выпуск бумаг — эмиссией. *Вторичный рынок* — это рынок, на котором происходит обращение ценных бумаг. Отсутствие вторичного рынка оттолкнуло бы инвестора от покупки ценных бумаг, так как эти бумаги в этом случае становятся неликвидными. Поэтому многие, особенно новые, предприятия остались бы без финансовой поддержки.

Фондовый рынок делится также на *спотовый* и *срочный*. Если сделки заключаются на немедленную поставку актива, то их называют *кассовыми*, или *спотовыми*. Рынок таких сделок называется *кассовым* (*спотовым*), а цена в результате заключения этих сделок называется *кассовой* (*спотовой*). На спотовом рынке происходят одновременная оплата и поставка ценных бумаг.

Если сделки заключаются на поставку актива в будущем, то их называют *срочными*. В срочном контракте оговариваются все условия соглашения. *Срочный рынок* — это рынок, на котором заключаются срочные сделки.

1.5. Внешний финансовый рынок

Внешний финансовый рынок зародился в Европе. Сегодня этот рынок охватил все передовые в экономическом отношении страны, поэтому другое название этого рынка — *международный финансовый рынок*. Довольно часто этот рынок называют *еврорынком*, или *офшорным рынком*.

Особенности ценных бумаг внешнего финансового рынка состоят в том, что они эмитируются вне законодательства отдельной страны, а также в том, что сразу же после эмиссии они становятся доступны инвесторам многих стран.

Евроакции эмитируются международными синдикатами. Многие из этих синдикатов предлагают транши евроакций. *Транш* — это одна или несколько ценных бумаг, предлагаемых одновременно.

Помимо евроакций широкое распространение получили еврооблигации. Еврооблигация так же, как и евроакция, эмитируется международными синдикатами, доступна инвесторам многих стран. Еврооблигации называются по типу валюты, в которой они номинированы. Например, евро-долларовые облигации номинированы в долларах США, евро-иеновые облигации номинированы в иенах.

Следует отличать внешний финансовый рынок от иностранного финансового рынка. На иностранном финансовом рынке работают нерезиденты. Обращение ценных иностранных бумаг на иностранном рынке регулируется законодательством той страны, где этот рынок расположен. Например, ценные бумаги, выпущенные в Англии американскими корпорациями, должны соответствовать английскому законодательству. Различные иностранные рынки имеют специфические названия [46]. Иностранный рынок США называют «рынком янки», иностранный рынок Японии — «самурайским», иностранный рынок Англии — «бульдожьим», иностранный рынок Испании — «рынком матадоров».

1.6. Участники инвестиционного процесса

По определению Федерального закона «О рынке ценных бумаг», ***эмитент*** — юридическое лицо, группа юридических лиц, связанных между собой договором, или органы государственной власти и органы местного самоуправления, несущие от своего имени обязательства перед инвесторами ценных бумаг по осуществлению прав, удостоверенных ценной бумагой.

1.6.1. ЭМИТЕНТЫ ЦЕННЫХ БУМАГ

Эмитентами ценных бумаг в Российской Федерации могут быть:

- *государство*:
  - центральное правительство;
  - республиканские органы власти;
  - муниципальные органы власти;
- *учреждения и организации, пользующиеся государственной поддержкой*;
- *акционерное общество* (*корпорация*):
  - производственный сектор:
    - приватизированные предприятия;
    - вновь создаваемые предприятия и общества;
  - кредитная сфера;
  - биржи;
  - финансовые структуры:
    - инвестиционные компании;
    - инвестиционные фонды;
- *частные предприятия*;
- *нерезиденты Российской Федерации.*

1.6.2. ИНВЕСТОРЫ ФОНДОВОГО РЫНКА

Инвесторами фондового рынка являются:

- *индивидуальные инвесторы*;
- *институциональные инвесторы*:
  - государство;
  - корпорации;

- специализированные институты:
  — специализированные фонды и компании (пенсионные фонды, страховые компании и т.д.);
- инвестиционные институты:
  — инвестиционные компании;
  — инвестиционные фонды;

- *профессионалы рынка*:
  - банки;
  - фондовые посредники;
- *страны.*

Торговля ценными бумагами происходит, как правило, на биржевом рынке. Фондовая биржа представляет собой здание с операционным залом, где заключаются сделки с ценными бумагами. Электронная биржа — это компьютерная сеть, к которой подключены терминалы компаний — членов биржи. Эти терминалы могут быть вынесены в офисы данных компаний.

1.6.3. УЧАСТНИКИ ФОНДОВОГО РЫНКА

В работе фондовых бирж могут принимать участие как профессионалы, так и юридические и физические лица, выходящие на фондовый рынок в целях временного размещения свободных денежных средств.

Участниками фондовой биржи являются продавцы, покупатели и посредники.

В России работа профессиональных участников фондового рынка регулируется Федеральной комиссией по рынку ценных бумаг (ФКЦБ). К *профессиональной деятельности* относятся следующие ее виды:

- брокерская;
- дилерская;
- по управлению ценными бумагами;
- клиринговая;
- депозитарная;
- по ведению реестров владельцев ценных бумаг;
- по организации торговли на рынке ценными бумагами.

1.6.4. БРОКЕРСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Для осуществления брокерской деятельности необходимо получить лицензию.

Брокерской деятельностью называется совершение операций с ценными бумагами в интересах клиента по договору поручения или по договору комиссии.

По договору поручения брокер действует в качестве поверенного и заключает сделку от имени клиента и за его счет. В данном случае брокер покупает или продает на рынке ценные бумаги по устраивающей клиента цене.

По договору комиссии брокер действует в качестве комиссионера и заключает сделку от своего имени, но за счет клиента.

Клиент перечисляет брокеру денежные средства на покупку ценных бумаг в полном объеме или частично согласно условиям договора. Брокер обязан вести раздельный учет собственных и привлеченных средств. Условиями договора может быть предусмотрено, что брокер имеет право хранить денежные средства клиента, предназначенные для покупки ценных бумаг или полученные от их продажи. Эти денежные средства брокер может использовать для извлечения прибыли, если это предусмотрено договором комиссии. Часть прибыли брокер обязан перечислить клиенту.

На основании договора комиссии брокер открывает клиенту отдельный счет. Различают несколько видов счетов. *Кассовый счет* получил наибольшее распространение, так как практически сводит к минимуму риски, связанные с оплатой ценных бумаг. Клиент может отдать брокеру приказ на покупку ценных бумаг только в пределах тех средств, которые имеются у него на счете. *Маржинальный счет* дает клиенту право на получение кредита от брокерской фирмы для покупки ценных бумаг. При совершении маржинальной сделки по приобретению акций они не передаются клиенту, а остаются у брокерской конторы в качестве залога до погашения кредита. Эти акции зачисляются на счет клиента после полного расчета за предоставленный кредит.

За свои услуги брокер получает комиссионное вознаграждение.

1.6.5. ДИЛЕРСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

По российскому законодательству дилером может быть только юридическое лицо. Дилерская деятельность подлежит лицензированию. В России установлены *два вида лицензий* на дилерскую деятельность:

- по операциям с ценными корпоративными бумагами;
- по операциям с ценными государственными бумагами.

Дилерская деятельность состоит в купле-продаже ценных бумаг от своего имени за свой счет или за счет средств клиента.

Являясь профессиональным участником фондового рынка и располагая соответствующей информацией, дилер обладает бесспорными преимуществами по сравнению со своими клиентами. Поэтому законодательства всех стран предусматривают комплекс мер, защищающих клиента.

1.6.6. ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ПО УПРАВЛЕНИЮ ЦЕННЫМИ БУМАГАМИ

Деятельность по управлению ценными бумагами — это осуществление юридическим лицом или индивидуальным предпринимателем управления переданными ему во временное владение ценными бумагами за вознаграждение. Для передачи ценных бумаг в управление оформляется договор доверительного управления, по которому учредитель управления передает доверительному управляющему на определенный срок ценные бумаги или денежные средства, предназначенные для приобретения ценных бумаг. Доверительный управляющий осуществляет управление в интересах учредителя управления или указанного им лица. С ценными бумагами учредителя управляющий действует от своего имени. Однако в договорах он указывает, что работает по поручению учредителя.

Управляющий должен обеспечить отдельный учет денежных средств и ценных бумаг, полученных от учредителя, от своих собственных денежных средств и ценных бумаг. Для этого он ведет забалансовый счет клиента.

1.6.7. КЛИРИНГОВАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

На современном фондовом рынке *процедура совершения сделки* распадается на ряд этапов:

- поручение брокеру о совершении операции;
- заключение сделки между брокерами;
- сверка условий сделки и вычисление взаимных обязательств по поставке ценных бумаг от продавца к покупателю и по расчетам денежных средств;
- перевод ценных бумаг покупателю и перечисление денежных средств продавцу;
- уплата комиссионных бирже, брокерам и другим участникам.

При выполнении указанных процедур возникает большой информационный массив, обработка которого требует значительных трудозатрат. Поэтому появились специализированные клиринговые (расчетные) организации.

Основными функциями клиринга являются:

- сбор информации по заключенным сделкам, ее сверка и корректировка при наличии расхождений, подтверждение о совершении сделки;
- учет зарегистрированных сделок и проведение вычислений по ним;
- определение взаимных обязательств по поставкам и расчетам участников биржевой торговли;
- обеспечение поставки ценных бумаг от продавца к покупателю;
- организация денежных расчетов по сделкам;
- обеспечение гарантий по исполнению заключенных сделок.

1.6.8. ДЕПОЗИТАРНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Депозитарная деятельность представляет собой комплекс мер по оказанию услуг, связанных с хранением ценных бумаг и учетом перехода прав на ценные бумаги. Депозитарной деятельностью могут заниматься только юридические лица на основании лицензии, выдаваемой Федеральной комиссией по ценным бумагам. Клиент, пользующийся услугами депозитария, называется *депонентом*. Ему открывается счет депо, на котором учитываются ценные бумаги депонента и производятся записи обо всех операциях, совершенных депонентом с ценными бумагами. То, что ценные бумаги (права на ценные бумаги) переданы на хранение депозитарию, подтверждается выпиской со счета депо.

В договоре между депозитарием и депонентом должны быть отражены:

- предмет договора;
- срок действия договора;
- порядок передачи депонентом ценных бумаг на хранение;
- порядок учета прав на ценные бумаги и процедура перерегистрации перехода прав на ценные бумаги от одного лица к другому;
- размер и порядок оплаты услуг депозитария;
- порядок представления отчетности депозитарием перед депонентом.

1.6.9. ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ПО ВЕДЕНИЮ РЕЕСТРОВ ВЛАДЕЛЬЦЕВ ЦЕННЫХ БУМАГ

Деятельностью по ведению реестров владельцев ценных бумаг называется сбор, регистрация, обработка, хранение и предоставление зарегистрированным лицам и эмитентам данных из реестра. Реестр ведется только по ценным именным бумагам и не ведется по предъявительским.

На каждого владельца ценных бумаг в реестре открыт лицевой счет, на котором отражаются имя, адрес, паспортные данные для физического лица, банковские реквизиты для юридического лица, количество и тип ценных бумаг, номер телефона. Документом, подтверждающим запись в реестре, является выписка, в которой указывается информация о состоянии только собственного лицевого счета владельца ценных бумаг.

Вести реестр может непосредственно эмитент (если число владельцев ценных бумаг не превышает 500) или специализированная организация, имеющая лицензию на этот вид деятельности. В отличие от других профессиональных участников фондового рынка деятельность по ведению реестра является исключительной и не подлежит совмещению с другими видами профессиональной деятельности на рынке ценных бумаг.

В систему ведения реестра входят следующие учетные документы:

- лицевые счета владельцев ценных бумаг;
- лицевые счета зарегистрированных залогодержателей;
- учет ценных бумаг, принятых на баланс акционерного общества в связи с проведением операций по выкупу, приобретению и погашению ценных бумаг;
- журнал учета выданных и погашенных сертификатов ценных бумаг, выпущенных в документарной форме;
- учет документов, являющихся основанием для внесения изменений в реестр;

- учет запросов зарегистрированных лиц и ответов на них, включая отказы от регистрации в реестре;
- учет начисленных доходов (дивидендов) по ценным бумагам.

1.6.10. ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ТОРГОВЛИ НА ФОНДОВОМ РЫНКЕ

Торговля на фондовом рынке может осуществляться либо на фондовых биржах (биржевая торговля), либо на организованном внебиржевом рынке. Осуществляющие этот вид деятельности участники называются *организаторами торговли.*

Фондовые биржи и организаторы внебиржевой торговли работают на основе лицензии, выдаваемой Федеральной комиссией по ценным бумагам. Процесс торговли регламентируется Правилами торговли, утвержденными Федеральной комиссией по ценным бумагам.

К торговле на организованном фондовом рынке допускаются ценные бумаги, прошедшие процедуру листинга. При проведении листинга оценивается финансовое состояние компании, определяются надежность и инвестиционные качества ценных бумаг, степень их ликвидности и т.д. В России выделяются два уровня листинга, причем первый уровень является более жестким, чем второй.

После проверки ценные бумаги включаются в котировальный лист, являющийся главным ориентиром для всех потенциальных инвесторов.

Котировальный лист на данную дату может содержать следующие графы.

1. Наименование эмитента, номинальная стоимость акции.

2. Максимальная цена покупки.

3. Минимальная цена покупки.

4. Сделка при закрытии биржи, т.е. последняя сделка дня.

5. Объем продаж.

6. Дивиденд, т.е. последний дивиденд в процентах от номинальной стоимости акции без учета налога.

7. Отношение сделки при закрытии биржи к балансовой стоимости акции.

8. Отношение сделки при закрытии биржи к величине дохода на одну акцию, где за величину дохода на одну акцию принимается отношение балансовой прибыли к количеству обыкновенных акций.

9. Изменение цены сделки на текущих торгах по сравнению с предыдущими торгами.

1.7. Типы инвесторов

Обмен на фондовом рынке происходит потому, что у участников имеются различия в предпочтениях. Эти различия связаны, во-первых, с получением доходов разными участниками в различные моменты времени. Например, один участник получает деньги сейчас, а нужны они ему будут потом, и наоборот. Во-вторых, это разное отношение к риску у различных инвесторов. Одни участники рынка страхуют себя от риска, т.е. хеджируются, другие занимаются спекуляциями, т.е. покупают риск.

В зависимости от преследуемых целей участники рынка подразделяются на спекулянтов, хеджеров и арбитражеров.

Спекулянт — лицо, стремящееся получить прибыль за счет разницы в курсах финансовых инструментов, которая возникает во времени, т.е. он покупает (продает) финансовые инструменты с целью продать (купить) их в будущем по более благоприятной цене. Отрезок времени при этом может изменяться от нескольких минут до нескольких лет. Спекулянты, которые держат свои позиции открытыми в течение короткого промежутка времени, называются *скальперами*.

Хеджер — лицо, страхующее свои финансовые операции. Например, рынок срочных контрактов предоставляет хеджеру возможность заключить ряд сделок для страхования пакета акций на случай падения их курсовой стоимости. Риск в такой сделке часто берет на себя спекулянт.

Арбитражер — лицо, стремящееся получить прибыль за счет одновременной купли-продажи одного и того же финансового инструмента на разных рынках, если на них наблюдаются разные цены, а также взаимосвязанных активов при нарушении между ними паритетных отношений, например, за счет покупки (продажи) актива на спотовом рынке и продажи (покупки) соответствующего фьючерсного контракта. При умелой организации работы арбитражер может получить прибыль без всякого риска и денежных вложений.

1.8. Инвестиционный климат

Готовность инвестора к вложению капитала в экономику зависит от существующего в стране инвестиционного климата. *Инвестиционный климат* определяется политическими, экономическими, юридическими, социальными и другими факторами. Важнейшим фактором, определяющим инвестиционный климат, является величина доходности и степень риска инвестиций. Инвестиции будут достаточными только в том случае, если инвестор будет в значительной степени уверен в получении дохода, способного компенсировать ему отказ от потребления имеющихся средств в настоящее время и риск.

В настоящее время инвестиционный климат в России является неблагоприятным для широкого привлечения инвестиций. Неблагоприятное состояние инвестиционного климата России вызвано следующими причинами:

- нестабильностью экономической, социальной и правовой ситуации в стране;
- высоким уровнем инфляции;

- нестабильностью таможенного режима;
- коррупцией и иной преступностью;
- высокими и многочисленными налогами и платежами.

Для создания на территории Российской Федерации благоприятного инвестиционного климата *необходимо принять ряд мер.* К таким мерам относятся следующие.

1. Организация управления инвестициями не только на микроуровне, но и на макроуровне в объеме всей страны.

2. Создание конкурентной структуры рынка в целом и инвестиционного рынка в частности.

3. Снижение степени рисков инвестиций.

4. Разработка качественных бизнес-планов инвестиционных проектов, по которым инвестор сможет принимать ответственные решения о финансировании этих проектов.

5. Анализ и определение характеристик ценных бумаг специализированными консультационными центрами.

6. Доступность информации о характеристиках инвестиционных проектов и ценных бумаг для широкого круга инвесторов.

7. Возможность инвестирования широкими слоями населения, т.е. организация соответствующих пунктов по продаже небольших пакетов акций и выплате дивидендов по ним.

В России существует *ряд факторов, которые могут существенно улучшить инвестиционный климат.* К числу таких факторов относятся:

- богатые природные ресурсы (нефть, газ уголь, металлы, алмазы, лес);
- оставшиеся квалифицированные кадры;
- дешевая рабочая сила;
- огромный внутренний рынок.

По самым скромным оценкам, у России больше природных ресурсов, чем у Бразилии, Южной Африки, Китая и Индии, вместе взятых.

Стоимости природных ресурсов некоторых богатых этими ресурсами стран:

	Россия	*Бразилия*	*Южная Африка*	*Китай*	*Индия*
Стоимость природных ресурсов (трлн долл.)	10,2	3,3	1,1	0,6	0,4

Стоимость ресурсов, находящихся в России, в три раза превышает стоимость природных ресурсов Бразилии и более чем в девять раз — стоимость природных ресурсов Южной Африки. Это огромное преимущество России используется очень слабо. На международном рынке торговля отечественными ресурсами занимает главное место. Высокотехнологичная продукция на международном рынке практически отсутствует.

Упражнения

ТЕСТ 1.1

Выберите правильный вариант ответа.
К инвестициям относят:

A. Вложения в обучение сотрудников предприятия.
B. Вложение в создание ночлежки.
C. Вложения в детский дом.
D. Покупку телевизора.

ТЕСТ 1.2

Какие из приведенных ниже активов относятся к финансовым инвестициям?

1. Лицензии.
2. Сберегательные сертификаты.
3. Сооружения.
4. Готовая продукция.
5. Обыкновенные акции.
6. Облигации.
7. Векселя.
8. Депозитные сертификаты.
9. Патенты.
10. Товарные знаки.

ТЕСТ 1.3

Какие из перечисленных ниже факторов являются благоприятными для улучшения инвестиционного климата в России? Назовите их.

1. Нестабильность экономической и социальной ситуации в стране.
2. Богатые природные ресурсы.
3. Правовая нестабильность.
4. Квалифицированные кадры.
5. Высокий уровень инфляции.
6. Дешевая рабочая сила.
7. Нестабильность таможенного режима.
8. Сильная бюрократизация страны, коррупция и иная преступность.
9. Высокие и многочисленные налоги и платежи.
10. Огромный внутренний рынок.

Глава 2 МЕТОДЫ АНАЛИЗА ИНВЕСТИЦИЙ

2.1. Принцип неравноценности денег во времени

Важнейшим фактором в анализе финансовых операций является принцип неравноценности денег во времени. Рубль, полученный сегодня, стоит больше рубля, который будет получен в будущем. Поэтому в финансовых операциях, особенно долгосрочных, фактор времени может играть не меньшую роль, чем размеры денежных сумм [43]. Каждый из методов анализа, рассмотренных ниже, учитывает время как одно из важнейших условий.

Если в настоящее время 1 руб. можно инвестировать под заданный процент на заданный период, то через этот период инвестор получит 1 руб. плюс процентные деньги (проценты).

Проценты — это абсолютная величина дохода от представления денег в долг в любой его форме.

Наращенная сумма ссуды — это первоначальная сумма плюс начисленные к концу срока ссуды проценты:

$$S = P + I \,, \qquad \textbf{(2.1)}$$

где S — наращенная сумма ссуды; P — первоначальная сумма ссуды; I — начисленные к концу срока ссуды проценты.

Процентная ставка наращения — это отношение процентов за год к сумме долга.

Процентная ставка является также измерителем степени доходности любой финансовой операции. В этом случае процентная ставка называется *доходностью.*

2.2. Процентные ставки, используемые при анализе инвестиционных проектов

2.2.1. ПРОСТАЯ ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА НАРАЩЕНИЯ

Простая процентная ставка наращения — это ставка, при которой база начисления всегда остается постоянной.

Проценты I за весь срок ссуды вычисляются по формуле:

$$I = Pni\,, \qquad \textbf{(2.2)}$$

где n — срок ссуды в годах; i — простая годовая ставка наращения (десятичная дробь).

Подставив выражение для процентов **(2.2)** в **(2.1)**, получим формулу простых процентов:

$$S = P(1+ni). \qquad \textbf{(2.3)}$$

Множитель $q = (1+ni)$ называется *множителем наращения простых процентов.*

■ **Пример 2.1.** Ссуда 25 000 руб. выдана на срок 0,7 года под простые проценты 18% годовых.

Определить проценты и наращенную сумму.

Решение:

$$I = Pni = 25\ 000 \cdot 0,7 \cdot 0,18 = 3159 \text{ руб.};$$

$$S = P + I = 25\ 000 + 3150 = 28\ 150 \text{ руб.}$$

Срок ссуды рассчитывается по формуле

$$n = \frac{t}{K}, \qquad \textbf{(2.4)}$$

где t — число дней ссуды; K — временная база или число дней в году.

В зависимости от принятой методики используют два типа временных баз:

K = 360 — обыкновенные проценты;
K = 365 (366) — точные проценты. □

2.2.2. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ НАРАЩЕНИЯ

Сложная процентная ставка наращения — это ставка, при которой база начисления является переменной, т.е. проценты начисляются на проценты. Предположим, что мы имеем P руб., которые можно инвестировать по процентной ставке наращения i. Через один год будем иметь $P(1+i)$. Если повторить этот процесс, инвестировав всю сумму $P(1+i)$, то к концу второго года будем иметь $\left[P(1+i)\right](1+i) = P(1+i)^2$. Продолжая процесс, видим, что показатель степени в формуле для наращенной суммы равен количеству лет наращения. Положив это число равным n, получим *формулу сложных процентов*:

$$S = P(1+i)^n. \qquad \textbf{(2.5)}$$

■ **Пример 2.2.** Какой величины достигнет долг, равный 8000 руб., через 4,6 года при росте по сложной ставке наращения 20% годовых?

***Решение*:**

$$S = P(1+i)^n = 8000 \cdot (1+0,2)^{4,6} = 18\ 506,48 \text{ руб.}$$

Часто в финансовых операциях в качестве периода наращения процентов используется не год, а месяц, квартал или другой период. В этом случае говорят, что проценты начисляются m раз в году. При этом в контрактах фиксируется не ставка за период, а годовая ставка, которая в этом случае называется номинальной [43]. Сложная процентная ставка наращения является частным случаем номинальной при начислении процентов один раз в году. Если номинальную ставку обозначить буквой j, то проценты за один период начисляются по ставке j/m, а количество начислений равно mn. Наращенная сумма при использовании номинальной процентной ставки наращения определяется по формуле

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}. \ \square \qquad \textbf{(2.6)}$$

■ **Пример 2.3.** Какой величины достигнет долг, равный 15 000 руб., через 5,7 года при росте по сложной ставке 16,5% годовых при начислении процентов раз в году и помесячно?

***Решение*:**

$$S = P(1+i)^n = 15\ 000 \cdot (1+0,165)^{5,7} = 35\ 821,93 \text{ руб.};$$

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = 15\ 000 \cdot \left(1+\frac{0,165}{12}\right)^{12\cdot 5,7} = 38\ 173,55 \text{ руб. } \square$$

Если в формуле **(2.6)**, определяющей наращенную сумму при использовании номинальной процентной ставки наращения, периоды начисления процентов постоянно уменьшать, то количество этих периодов в году будет увеличиваться. В пределе при стремлении длительности периодов к нулю их число стремится к бесконечности. Такое начисление процентов называется непрерывным, а процентная ставка при непрерывном начислении называется *силой роста*. Большое значение *непрерывное* наращение имеет в анализе сложных финансовых проблем, например при анализе характеристик ценных бумаг.

Сила роста называется *постоянной*, если она не изменяется во времени. Если сила роста изменяется во времени, то она называется *переменной*.

Формула для наращенной суммы при непрерывном начислении процентов для постоянной силы роста δ следует из формулы **(2.6)** при стремлении m к бесконечности, т.е.

$$S = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Так как $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} = \mathrm{e}^{j}$, где e — число Эйлера (основание натуральных логарифмов), то, заменяя j на силу роста δ, получим формулу для наращенной суммы при непрерывном начислении процентов:

$$S = P\mathrm{e}^{\delta n}. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Связь дискретных ставок i и j с силой роста δ находится из равенства множителей наращения дискретных **(2.5)**, **(2.6)** и непрерывной **(2.7)** ставок, т.е.

$$(1+i)^{n} = \mathrm{e}^{\delta n}; \quad \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = \mathrm{e}^{\delta n}.$$

Решив эти уравнения, получим

$$\delta = \ln(1+i); \quad i = \mathrm{e}^{\delta}-1; \qquad \textbf{(2.8)}$$

$$\delta = m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right); \quad j = m\left(e^{\delta/m}-1\right). \qquad \textbf{(2.9)}$$

По формулам **(2.8)** и **(2.9)** можно, в частности, зная дискретные ставки ценных бумаг, рассчитать силу роста этих бумаг.

■ **Пример 2.4.** На сумму 15 000 руб. начисляются проценты по сложной годовой ставке $i = 22\%$ в течение 3,5 лет.

Определить силу роста и наращенную сумму при дискретном и непрерывном начислении.

***Решение*:**

$$\delta = \ln(1+i) = \ln 1{,}22 = 0{,}19885084, \text{ или } 19{,}885084\%.$$

Наращенная сумма при непрерывном начислении

$$S = P\mathrm{e}^{\delta n} = 15\ 000\,\mathrm{e}^{0{,}19885084\cdot 3{,}5} = 30\ 085{,}04 \text{ руб.}$$

Наращенная сумма при дискретном начислении

$$S = P(1+i)^{n} = 15\ 000\ (1+0{,}22)^{3{,}5} = 30\ 085{,}04 \text{ руб.}$$

Таким образом, как и следовало ожидать, наращенные суммы при дискретном и непрерывном начислениях совпали. □

При дисконтировании суммы S, которая будет выдана через срок n, по ставке дисконтирования i вычисляется современная величина (стоимость) P суммы S. Используя формулы **(2.3)**, **(2.5)**,

(2.6) и **(2.7)**, получим соотношения дисконтирования для рассмотренных типов процентов:

$$P=\frac{S}{1+ni};\quad P=\frac{S}{(1+i)^n};\quad P=\frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}};\quad P=Se^{-\delta n}. \qquad \textbf{(2.10)}$$

Множители $\nu=\frac{1}{1+ni}$; $\nu=\frac{1}{(1+i)^n}$; $\nu=\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}$; $\nu=e^{-\delta\cdot n}$ называются *дисконтными множителями.*

Разность

$$D=S-P \qquad \textbf{(2.11)}$$

называется *дисконтом с суммы S.*

Из формулы **(2.1)** получим выражение для определения процентов:

$$I=S-P.$$

Отсюда следует, что формула для определения процентов по форме совпадает с формулой для определения дисконта. Однако необходимо помнить, что финансовый смысл этих формул различен.

■ **Пример 2.5.** Через 159 дней должник уплатит 8,5 тыс. руб. Кредит выдан под простые проценты 19% годовых. Какова первоначальная сумма долга и дисконт при условии, что временная база равна 360 дней?

***Решение*:**

$$P=\frac{S}{1+ni}=\frac{8500}{1+\frac{159}{360}0{,}19}=7841{,}93 \text{ руб.};$$

$$D=S-P=8500-7841{,}93=658{,}07 \text{ руб.} \ \square$$

2.2.3. УЧЕТНЫЕ СТАВКИ

Банк может учесть вексель до наступления срока платежа с дисконтом, т.е. купить его у владельца по цене, которая меньше номинала S, указанного в векселе. Размер дисконта при учете по простой учетной ставке определяется по формуле

$$D=Snd,$$

где n — срок от момента учета до момента погашения; d — простая учетная ставка.

Подставив это значение в соотношение **(2.11)**, получим формулу для расчета суммы, выплачиваемой владельцу векселя при учете по простой процентной ставке:

$$P=S(1-nd). \qquad \textbf{(2.12)}$$

Множитель $(1-nd)$ называется *дисконтным множителем.* Обычно при расчетах принимают $K=360$.

■ **Пример 2.6.** Вексель, имеющий номинальную стоимость 8000 руб., учтен в банке по простой учетной ставке 18,5% годовых за 132 дня до его погашения.

Определить сумму, полученную владельцем векселя при учете.

Решение:

$$P = S(1 - nd) = 8000 \cdot \left(1 - \frac{132}{360} \cdot 0{,}185\right) = 7457{,}33 \text{ руб.} \quad \square$$

При использовании сложной учетной ставки эта ставка применяется каждый раз не к первоначальной сумме, как при простой учетной ставке, а к сумме уже дисконтированной на предыдущем шаге во времени. Поэтому сумма, выдаваемая банком при учете векселя, рассчитывается по формуле

$$P = S(1 - d)^n, \qquad \textbf{(2.13)}$$

где d — сложная учетная ставка.

2.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРОКА ССУДЫ И ДОХОДНОСТИ ФИНАНСОВОЙ ОПЕРАЦИИ

Формулы для определения срока ссуды и величины процентной ставки при начислении по простым и сложным процентам следуют из соотношений **(2.3)**, **(2.5)**, **(2.6)**, **(2.7)**, **(2.12)** и **(2.13)**. В качестве примеров рассмотрим методы определения срока ссуды и величины простой и сложной процентных ставок наращения.

Срок ссуды и доходность в виде простой процентной ставки наращения находят, решая **(2.3)** относительно n и i:

$$n = \frac{\frac{S}{P} - 1}{i}; \qquad i = \frac{\frac{S}{P} - 1}{n}. \qquad \textbf{(2.14)}$$

Срок ссуды и доходность в виде сложной процентной ставки наращения определяют из формулы **(2.5)**:

$$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{\ln(1 + i)}; \qquad i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad \textbf{(2.15)}$$

■ **Пример 2.7.** Финансовый инструмент куплен за 25 000 руб., его выкупная цена через 1,8 года составит 35 000 руб. Определить доходность операции в виде годовой ставки сложных процентов.

Решение:

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{35\,000}{25\,000}\right)^{\frac{1}{1{,}8}} - 1 = 0{,}2055417, \text{ или } 20{,}55\%. \quad \square$$

2.2.5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Нами были рассмотрены следующие виды процентных ставок:

- простая процентная ставка наращения;
- сложная процентная ставка наращения;
- номинальная процентная ставка наращения;
- сила роста;
- простая учетная ставка;
- сложная учетная ставка.

Эквивалентными процентными ставками называются любые две из перечисленных выше, которые при замене одной на другую приводят к одинаковым финансовым результатам, т.е. отношения сторон не изменяются в рамках одной финансовой операции.

Определим соотношения эквивалентности между простой процентной ставкой наращения и сложной процентной ставкой наращения. При этом полагаем, что начальные и наращенные суммы при применении рассматриваемых ставок одинаковы. Поэтому для решения поставленной задачи приравняем множители наращения друг к другу. В результате получим

$$1+ni=(1+a)^n,$$

где n — срок операции в годах; i — простая процентная ставка наращения; a — сложная процентная ставка наращения.

Решив это уравнение относительно a и i, получим

$$a=\sqrt[n]{1+ni}-1; \quad i=\frac{(1+a)^n-1}{n}. \qquad \textbf{(2.16)}$$

■ **Пример 2.8.** Простая процентная ставка депозита равна 20% годовых, срок депозита 0,5 года.

Определить доходность финансовой операции в виде сложной годовой процентной ставки.

***Решение*:**

$$a=\sqrt[n]{1+ni}-1=\sqrt[0,5]{1+0,5\cdot 0,2}-1=0,21, \text{ или } 21\%. \ \square$$

Найдем соотношения эквивалентности между номинальной процентной ставкой наращения j и сложной процентной ставкой наращения a. В этом случае сложная процентная ставка наращения называется эффективной ставкой процентов.

Эффективная ставка процентов — это годовая ставка сложных процентов при начислении раз в году, которая дает тот же результат, что и m-разовое начисление процентов по ставке j/m. Поэтому множители наращения эффективной и номинальной ставок должны быть равны друг другу, т.е.

$$(1+a)^n=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Решив это уравнение относительно a и j, получим

$$a=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1;\quad j=m\left(\sqrt[m]{1+a}-1\right). \qquad \textbf{(2.17)}$$

Замена в договоре номинальной ставки j при m-разовом начислении процентов на эффективную ставку a не изменит финансовых обязательств участников сторон, т.е. обе ставки эквивалентны в финансовом отношении.

■ **Пример 2.9.** Номинальная ставка процента при начислении один раз в квартал равна 16% годовых.

Определить эффективную ставку.

***Решение*:**

$$a=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1=\left(1+\frac{0{,}16}{4}\right)^4-1=0{,}1699,\text{ или } 16{,}99\%.\ \square$$

Соотношения эквивалентности между номинальной процентной ставкой наращения j и силой роста δ определяется из соотношения

$$e^{\delta n}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Отсюда находим

$$\delta=m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right);\qquad j=m\left(e^{\delta/m}-1\right). \qquad \textbf{(2.18)}$$

Соотношения эквивалентности между сложной процентной ставкой наращения a и силой роста δ определяется из (2.18) при $m=1$.

$$\delta=\ln(1+a);\qquad a=e^{\delta}-1. \qquad \textbf{(2.19)}$$

Определим соотношения эквивалентности между сложной годовой процентной ставкой наращения (2.5) и простой учетной ставкой (2.12). Уравнение эквивалентности имеет вид

$$(1+a)^n=\frac{1}{1-nd}.$$

Решив это уравнение, найдем

$$d=\frac{1-\dfrac{1}{(1+a)^n}}{n};\quad a=\sqrt[n]{\frac{1}{1-nd}}-1.$$

Как следует из полученной формулы, простая учетная ставка зависит от временного интервала от момента учета до момента погашения.

Эквивалентные процентные ставки для любых двух рассмотренных в этой главе ставок определяются аналогичным образом.

2.3. Учет инфляции

Без учета инфляции конечные результаты расчетов денежных потоков являются весьма условными. Рассмотрим основные понятия, необходимые для учета инфляционных процессов.

Реальная стоимость C суммы S, обесцененной во времени за счет инфляции, рассчитывается по формуле

$$C = S/I_p, \qquad \textbf{(2.20)}$$

где I_p — индекс цен.

Темпом прироста инфляции называется относительный прирост цен за период:

$$H = I_p - 1. \qquad \textbf{(2.21)}$$

Индекс цен за несколько периодов n, следующих друг за другом, вычисляется по формуле

$$I_p = \prod_{t=1}^{n} I_{p,t} = \prod_{t=1}^{n} (1 + H_t), \qquad \textbf{(2.22)}$$

где t — номер периода; $I_{p,t}$ — индекс цен в периоде под номером t;

H_t — темп инфляции в периоде под номером t.

Если ожидаемый темп инфляции — величина постоянная в течение n периодов, то формула **(2.22)** приобретает вид

$$I_p = (1 + H_t)^n. \qquad \textbf{(2.23)}$$

Средние за период индекс цен $\bar{I}_{p,t}$ и темп инфляции $\bar{H}_t$ находятся по формулам

$$\bar{I}_{p,t} = \sqrt[n]{I_p}; \quad \bar{H}_t = \sqrt[n]{I_p} - 1 = \bar{I}_{p,t} - 1,$$

где n — количество периодов (лет).

Для простых процентов *обесцененная инфляцией сумма* определяется выражением

$$C = P\frac{1 + ni}{I_p} = P\frac{1 + ni}{(1 + \bar{H}_t)^n}. \qquad \textbf{(2.24)}$$

Из **(2.24)** следует, что увеличение наращенной суммы имеет место при выполнении соотношения

$$1 + ni > I_p.$$

Ставка i^*, при которой наращение равно потерям из-за инфляции, определяется из равенства $C = P$. Сопоставив это с **(2.24)**, находим

$$i^* = \frac{I_p - 1}{n}. \qquad \textbf{(2.25)}$$

■ **Пример 2.10.** Месячный темп инфляции составляет: а) $H_{1-12} = 4\%$, б) $H_1 = 4\%,\ H_2 = 3\%,\ H_3 = 2\%$. Для случаев а) и б) найти индекс цен и темп инфляции за 12 и 3 мес. соответственно, а также определить обесцененную наращенную сумму, если на сумму 10 000 руб. в течение указанных сроков начислялась простая процентная ставка 50% годовых (K = 360).

Определить также ставку, при которой наращение равно потерям из-за инфляции.

Решение.

При решении примера используются формулы **(2.21)—(2.25)**:

а) $I_p = (1+0,04)^{12} = 1,601;$ $\qquad H = (1,601-1)\cdot 100\% = 60,1\%;$

$$C = 10\ 000\cdot\left(\frac{1+0,5}{1,601}\right) = 9369,14; \qquad i^* = \frac{1,601-1}{1} = 0,601,\ \text{или } 60,1\%$$

б) $I_p = 1,04\cdot 1,03\cdot 1,02 = 1,0926;$ $\qquad H = (1,0926-1)\cdot 100\% = 9,26\%;$

$$C = 10\ 000\cdot\left(\frac{1+\frac{3}{12}\cdot 0,5}{1,0926}\right) = 10\ 296,54; \quad i^* = \frac{1,0926-1}{3/12} = 0,3704,\quad \text{или } 37,04\%.$$

В варианте а) произошла эрозия капитала, а для его увеличения процентная ставка должна превышать 60,1%. В варианте б) капитал вырос в 10 294,54/10 000 = 1,029454 раза, или приблизительно на 2,94%. □

Для сложных процентов *обесцененная инфляцией сумма* определяется выражением

$$C = P\frac{(1+i)^n}{I_p} = P\left(\frac{1+i}{1+\bar{H}_t}\right)^n. \qquad \textbf{(2.26)}$$

Эрозией капитала называется обесценение денег во времени за счет инфляции.

Для компенсации обесценения денег ставку увеличивают на величину инфляционной премии, являющейся дополнительной доходностью, компенсирующей инфляционные потери. Итоговую ставку называют брутто-ставкой. Выразим величину брутто-ставки r через доходность операции a. Тогда ставку r в формуле **(2.24)** и ставку a в формуле для сложных процентов $C = P(1+a)^n$ надо считать эквивалентными, т.е. их связь определяется уравнением

$$\frac{1+nr}{I_p} = (1+a)^n,$$

где I_p — индекс цен за *n* лет.

Отсюда находим

$$r = \frac{(1+a)^n I_p - 1}{n}; \quad a = \left(\frac{1+nr}{I_p}\right)^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad \textbf{(2.27)}$$

Для сложных процентов брутто-ставка и доходность определяются соотношением

$$\frac{(1+r)^n}{I_p} = (1+a)^n. \qquad \textbf{(2.28)}$$

Из **(2.28)** следует, что

$$r = (1+a)\sqrt[n]{I_p} - 1; \qquad a = \frac{1+r}{\sqrt[n]{I_p}} - 1. \qquad \textbf{(2.29)}$$

При постоянном темпе инфляции при подстановке **(2.23)** в **(2.28)** находим

$$(1+r)^n = \left[(1+a)\left(1+\bar{H}_t\right)\right]^n.$$

Отсюда получим связь между брутто-ставкой и доходностью:

$$r = a + \bar{H}_t + a\bar{H}_t; \quad a = \frac{r - \bar{H}_t + 1 - 1}{1+\bar{H}_t} = \frac{1+r}{1+\bar{H}_t} - 1. \qquad \textbf{(2.30)}$$

При $|a| << 1$ и $\left|\bar{H}_t\right| << 1$ имеем $r \approx a + \bar{H}_t$. Таким образом, как следует из формулы **(2.30)**, определить брутто-ставку путем сложения доходности операции и темпа прироста инфляции можно только при небольших значениях этих величин.

■ **Пример 2.11.** Найти реальную процентную ставку (доходность) при брутто-ставках 60% и 30% годовых и месячных темпах прироста инфляции H_1 = 5%, H_2 = 2%, H_3 = 4%.

Решение.

Найдем индекс цен за три месяца по формуле **(2.22)**:

$$I_p = (1+0,05)(1+0,02)(1+0,04) = 1,11384.$$

По формуле **(2.27)** при n = 3/12 = 0,25 определяем для двух случаев:

$$a_1 = \left(\frac{1+0,25\cdot 0,6}{1,11384}\right)^{\frac{1}{0,25}} - 1 = 0,1363, \text{ или } 13,63\%;$$

$$a_2 = \left(\frac{1+0,25\cdot 0,3}{1,11384}\right)^4 - 1 = -0,1323, \text{ или } -13,23\%.$$

Во втором случае произошла эрозия капитала на 13,23%. □

■ **Пример 2.12.** Найти сложную процентную брутто-ставку при доходности 15% годовых и годовых темпах прироста инфляции за три года для двух случаев: а) $H_1 = 90\%$; $H_2 = 80\%$; $H_3 = 60\%$;

б) $H_t = 80\% = \text{const}$.

***Решение*:**

а) находим средний темп инфляции за три года:

$$\sqrt[n]{I_p} = \sqrt[3]{(1+0,9)(1+0.8)(1+0,6)} = 1,762.$$

По формуле **(2.29)** определяем номинальную процентную ставку:

$$r = (1+a)\sqrt[n]{I_p} - 1 = (1+0,15)\cdot 1,762 - 1 = 1,0263, \text{ или } 102,63\%;$$

б) по формуле **(2.30)** определяем номинальную процентную ставку для постоянного темпа инфляции:

$$r = a + \overline{H}_t + a\overline{H}_t = 0,15 + 0,8 + 0,15\cdot 0,8 = 1,07, \text{ или } 107\%. \ \square$$

2.4. Конверсия валюты

Конверсия (обмен) валюты и временное наращение денег могут привести как к прибыли, так и к потерям. Это зависит от величины процентной ставки, от курсов обмена валюты в начале и конце операции, от инфляции. Рассмотрим прежде всего конверсию валюты за счет ее покупки и последующей продажи. Анализ доходности при покупке и продаже валюты можно провести на основе соотношения

$$C = \frac{P}{K_0}\cdot\frac{K_1}{I_p},$$

где C − реальная стоимость суммы в конце операции, руб.; P — сумма в начале операции, руб.; K_0 и K_1 — курс обмена в начале и в конце операции соответственно, руб./долл.; I_p — индекс цен за время операции n.

Рублевая сумма P обменена на валюту (деление на K_0), затем через период n лет обменена на рубли (умножение на K_1). Для определения реальной стоимости полученной суммы она делится на индекс цен за время операции n, равный I_p.

Введем обозначение: $I_k = K_1/K_0$, тогда полученную формулу можно записать в виде

$$C = P\frac{I_k}{I_p}. \qquad \textbf{(2.31)}$$

Для определения доходности a в виде сложной процентной ставки рассматриваемой финансовой операции используется *принцип финансовой эквивалентности обязательств*. Эквивалентными называются равные друг другу платежи при приведении их к одному моменту времени. В соответствии с принципом финансовой эквивалентности обязательств выражение **(2.31)** можно записать в виде

$$C = P\frac{I_k}{I_p} = P(1+a)^n.$$

Отсюда находим *формулу для доходности операции*:

$$a = \sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1. \qquad \textbf{(2.32)}$$

Доходность операции будет равна нулю при выполнении условия $I_k = I_p$. При $I_k > I_p$ доходность будет больше нуля, а при $I_k < I_p$ — меньше нуля. Поскольку цена покупки валюты и цена ее продажи различаются в один и тот же момент времени, то при расчете доходности за K_0 надо принимать цену покупки, а за K_1 — цену продажи.

Исследование и анализ зависимостей I_k и I_p от времени проведено в [31]. Ход этих зависимостей существенным образом зависит от начальной базы. Для построения зависимости курса доллара и темпа инфляции от времени были использованы статистические данные по темпу инфляции и курсу доллара начиная с 1990 г.

Построенные зависимости курса доллара и темпа инфляции от времени приведены на рис. 2.1.

Из этого рисунка следует, что курс доллара и индекс цен увеличиваются во времени. В самом начале реформ курс доллара резко возрос, а индекс цен медленно изменялся. Затем ситуация изменилась на противоположную, т.е. индекс цен до ноября 1995 г. растет быстрее. Начиная с ноября 1995 г. и до августа 1998 г. значения курса доллара и индекса цен сравнялись относительно базового, и эти значения сравнительно медленно растут с одинаковой скоростью. Начиная с августа 1998 г. равновесие вновь было нарушено. С сентября 1998 по январь 2000 г. индексы цен и курса доллара изменялись практически с постоянной скоростью. Их разность составляла 3 дБ, т.е. индекс курса доллара превышал примерно в два раза индекс цен (без учета инфляции доллара в США). Начиная с середины 2000 г. инфляция растет быстрее курса доллара, т.е. происходит постепенное выравнивание цен.

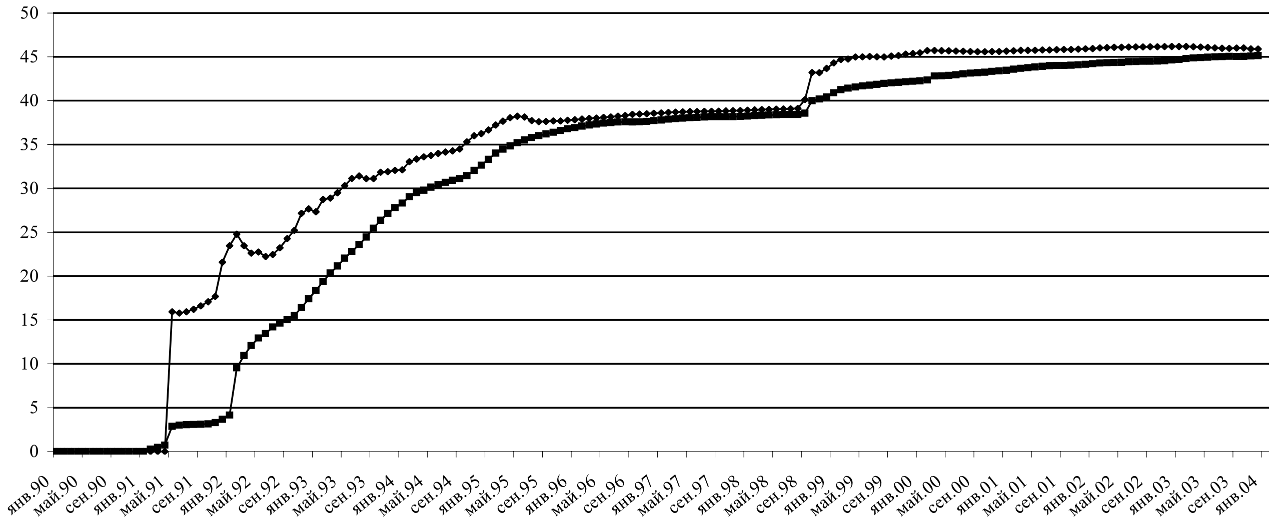


Рис. 2.1. Индексы потребительских цен и курса доллара, нарастающим итогом с базой на январь 1990 г.:
индекс курса доллара (логарифмический масштаб); индекс цен (логарифмический масштаб)

Если рассматриваемая финансовая операция проводилась в период с середины 2000 г. по середину 2002 г., то индекс I_p рос быстрее, чем индекс I_k, и в соответствии с **(2.32)** эта финансовая операция была убыточной.

■ **Пример 2.13.** Доллары были приобретены по курсу 24 руб./долл. и через 1,2 года проданы по 26,4 руб./долл. (27,6 руб./долл.). Темп инфляции за этот промежуток времени составил 12%.

Определить доходность финансовой операции.

Решение.

Для приведенных значений отношение курса продажи к курсу покупки составит

$$I_{k,1} = K_1/K_0 = 26,4/24 = 1,1; \qquad I_{k,2} = K_1/K_0 = 27,6/24 = 1,15.$$

Индекс цен за 1,2 года равен $I_p = 1 + H = 1 + 0,12 = 1,12$.

Доходности для рассматриваемых случаев:

$$a_1 = \sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1 = \sqrt[1,2]{\frac{1,1}{1,12}} - 1 = -0,0149, \text{ или } -1,49\% \text{ годовых;}$$

$$a_2 = \sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1 = \sqrt[1,2]{\frac{1,15}{1,12}} - 1 = 0,0222, \text{ или } 2,22\% \text{ годовых.}$$

В первом случае произошла эрозия капитала, во втором — капитал возрос. □

При наращении процентов с конверсией возможны варианты:

1) Руб. → СКВ → Наращение → СКВ → Руб.;

2) СКВ → Руб. → Наращение → Руб. → СКВ.

Наращение может вестись как по простой, так и по сложной процентной ставке наращения. Рассмотрим первый вариант при наращении по сложной процентной ставке. Обозначения используемых здесь величин те же, что и прежде. Если *r* — сложная годовая ставка наращения СКВ, то уравнение эквивалентности для рассматриваемых условий примет вид

$$C = P\frac{I_k}{I_p}(1+r)^n = P(1+a)^n.$$

Отсюда находим доходность финансовой операции по первой схеме конверсии валюты с наращением процентов

$$a = (1+r)\sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1. \qquad \textbf{(2.33)}$$

■ **Пример 2.14.** Для условий предыдущего примера положить сложную ставку наращения СКВ, равной 14% годовых.

Решение:

$$a_1 = (1+r)\sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1 = (1+0,14)\sqrt[1,2]{\frac{1,1}{1,12}} - 1 = 0,123, \text{ или } 12,3\% \text{ годовых;}$$

$$a_2 = (1+r)\sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1 = (1+0{,}14)\sqrt[1{,}2]{\frac{1{,}15}{1{,}12}} - 1 = 0{,}1654, \text{ или } 16{,}54\% \text{ годовых.}$$

Теперь в обоих случаях произошло наращение капитала. □

Для второго варианта конверсии валюты с наращением наращенная сумма с учетом инфляции СКВ определяется выражением

$$C_{\text{СКВ}} = P_{\text{СКВ}} \frac{K_0}{I_{p,\text{СКВ}}}(1+r)^n = P_{\text{СКВ}}(1+a)^n.$$

Индекс «СКВ» показывает, что величина измеряется в денежных единицах выбранной валюты; $I_{p,\text{СКВ}}$ — индекс цен выбранной валюты за рассматриваемый период; r — рублевая годовая сложная ставка наращения.

Из этого выражения находится формула для доходности финансовой операции:

$$a = \frac{(1+r)}{\sqrt[n]{I_k I_{p,\text{СКВ}}}} = -1. \qquad \textbf{(2.34)}$$

■ **Пример 2.15.** Доллары были проданы по курсу 24 руб./долл., а полученная сумма помещена на депозит по сложной процентной ставке 10% (40%) годовых. Через 1,2 года наращенная сумма была истрачена на покупку долларов по курсу 26,4 руб./долл. Темп инфляции доллара за этот промежуток времени составил 4%.

Определить доходность финансовой операции.

***Решение*:**

$$a_1 = \frac{1+r_1}{\sqrt[n]{I_k I_{p,\text{СКВ}}}} - 1 = \frac{1+0{,}1}{\sqrt[1{,}2]{(26{,}4/24)(1+0{,}04)}} - 1 = -0{,}01666,$$

или −1,666% годовых;

$$a_2 = \frac{1+r_2}{\sqrt[n]{I_k I_{p,\text{СКВ}}}} - 1 = \frac{1+0{,}4}{\sqrt[1{,}2]{(26{,}4/24)(1+0{,}04)}} - 1 = -0{,}2515,$$

или 25,15% годовых. □

2.5. Спотовые и форвардные процентные ставки

Спотовая процентная ставка для периода в n лет — это ставка для облигаций с нулевым купоном, до погашения которой остается n лет. *Облигацией с нулевым купоном* называется ценная бумага, по которой не выплачиваются проценты. Процентные ставки наращения могут самым разнообразным образом изменяться во времени. Примером этих ставок являются безрисковая ставка, доходность облигаций, акций и т.д.

На рис. 2.2 показаны некоторые возможные изменения процентных ставок от времени.

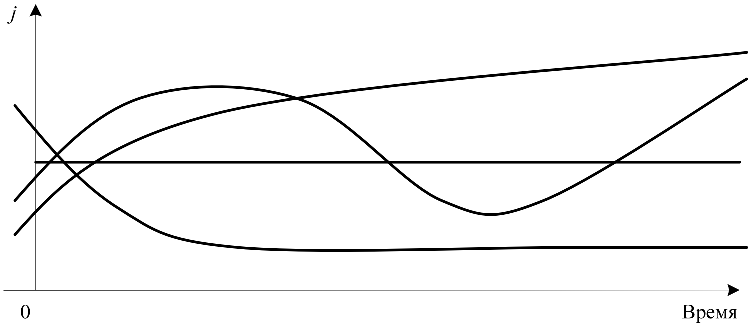


Рис. 2.2. Возможные изменения ставки во времени

Форвардная номинальная процентная ставка — это номинальная спотовая ставка для момента времени τ в будущем (рис. 2.3).

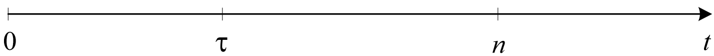


Рис. 2.3. Моменты для определения ставок в будущем

Рассмотрим метод определения спотовой и форвардной ставок при известной функции процентной ставки наращения от времени. Анализ проведем на примере силы роста и сложной годовой номинальной процентной ставки, начисление процентов по которой производится несколько раз в году.

Пусть в настоящий момент ($t = 0$) известны спотовая номинальная процентная ставка $j_{0,n}$ для периода n лет и спотовая номинальная процентная ставка $j_{0,\tau}$ для периода в τ лет, т.е. имеются две спотовые ставки для моментов времени, представленных на рис. 2.3.

Вкладчик покупает облигацию с нулевым купоном, выпущенную на n лет, которая будет погашена по цене S. Современная стоимость P этой облигации определяется соотношением

$$P = \frac{S}{\left(1 + j_{0,n}/m\right)^{mn}},$$

где m — количество начислений процентов в году.

Альтернативой этой финансовой операции является покупка облигации с нулевым купоном, выпущенной на τ лет, продажа ее через τ лет и покупка облигации с нулевым купоном на $T = n - \tau$ лет. В последнем случае процентная ставка является форвардной ставкой. В результате этой финансовой операции инвестор должен получить тот же финансовой результат, что и в первом случае, т.е. при затрате суммы *P* получить через n лет сумму *S*. Современная стоимость платежей для альтернативной финансовой операции определяется выражением

$$P = \frac{S}{\left(1 + j_{0,\tau}/m\right)^{m\tau}\left(1 + j_{\tau}/m\right)^{mT}},$$

где j_{τ} — форвардная номинальная процентная ставка.

Приравнивая правые части полученных соотношений, найдем

$$\left(1 + j_{0,n}/m\right)^{mn} = \left(1 + j_{0,\tau}/m\right)^{m\tau}\left(1 + j_{\tau}/m\right)^{mT}. \quad \textbf{(2.35)}$$

Обозначим силу роста δ, в пределе при $m \to \infty$ получим

$$e^{\delta_{0,n} \cdot n} = e^{\delta_{0,\tau} \cdot \tau} e^{\delta_{\tau} \cdot T}. \quad \textbf{(2.36)}$$

Из соотношений **(2.35)** и **(2.36)** определим связь между номинальной $j_{0,n}$ и непрерывной $\delta_{0,n}$ спотовыми ставками:

$$\delta_{0,n} = m \cdot \ln\left(1 + j_{0,n}/m\right); \quad j_{0,n} = m\left(e^{\delta_{0,n}/m} - 1\right). \quad \textbf{(2.37)}$$

Для годовых спотовых ставок ($m = 1$) имеем

$$\delta_{0,n} = \ln\left(1 + i_{0,n}\right); \quad i_{0,n} = e^{\delta_{0,n}} - 1. \quad \textbf{(2.38)}$$

Формулы **(2.37)** и **(2.38)** совпадают по виду с формулами **(2.9)** и **(2.8)**.

Из соотношения **(2.36)** находим формулу для расчета форвардной силы роста:

$$\delta_{\tau} = \frac{\delta_{0,n} \cdot n - \delta_{0,\tau} \cdot \tau}{n - \tau} = \delta_{0,n} \frac{1 - \dfrac{\delta_{0,\tau}}{\delta_{0,n}} \cdot \dfrac{\tau}{n}}{1 - \dfrac{\tau}{n}}. \quad \textbf{(2.39)}$$

Графики этой функции от τ/n при различных значениях $\delta_{0,\tau}/\delta_{0,n}$ представлены на рис. 2.4.

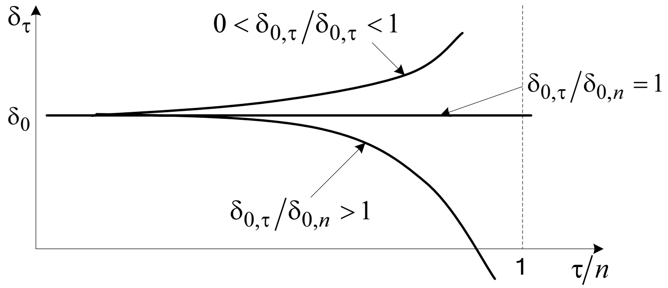


Рис. 2.4. Зависимость форвардной процентной ставки от времени

Вернемся к функции процентной ставки наращения от времени. На рис. 2.5 показан пример временной зависимости номинальной процентной ставки.

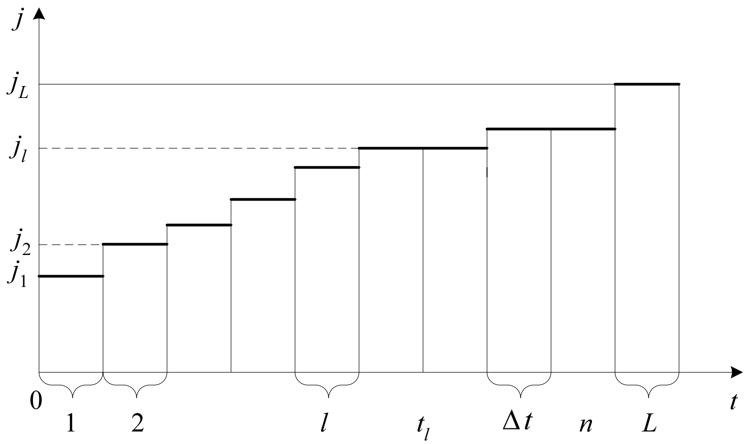


Рис. 2.5. Зависимость ставки от времени

Отрезок времени от 0 до n разбит на L равных элементарных отрезков длительностью Δt. Номинальная процентная ставка внутри каждого отрезка постоянна. Например, на отрезке 1 эта ставка равна j_1, на отрезке 2 — j_2 и т.д. Для поставленных условий долг в момент n определяется соотношением

$$S = P\left(1+\frac{j_1}{m}\right)^{m\cdot\Delta t}\left(1+\frac{j_2}{m}\right)^{m\cdot\Delta t}\ldots\left(1+\frac{j_L}{m}\right)^{m\cdot\Delta t}, \qquad \textbf{(2.40)}$$

где P − первоначальная сумма долга.

Для непрерывного начисления процентов ($m \to \infty$) при замене номинальной ставки j на силу роста δ имеем

$$S = Pe^{\delta_1\cdot\Delta t}e^{\delta_2\cdot\Delta t}\ldots\, e^{\delta_L\cdot\Delta t} = P\cdot e^{\sum_{l=1}^{L}\delta_l\,\Delta t}.$$

При $\Delta t \to 0 \quad (L \to \infty)$ получим

$$S = Pe^{\int_0^n \delta\, dt}. \qquad \textbf{(2.41)}$$

Эту формулу можно получить иначе. Разделим правую и левую части **(2.40)** на P и прологарифмируем результат:

$$\ln\frac{S}{P} = \ln\left[\left(1+\frac{j_1}{m}\right)^m \left(1+\frac{j_2}{m}\right)^m \ldots \left(1+\frac{j_L}{m}\right)^m\right] \cdot \Delta t =$$

$$= \left[\ln\left(1+\frac{j_1}{m}\right)^m + \ln\left(1+\frac{j_2}{m}\right)^m + \ldots + \ln\left(1+\frac{j_L}{m}\right)^m\right] \cdot \Delta t.$$

При $\Delta t \to 0 \quad (L \to \infty)$ получим

$$\ln\frac{S}{P} = \int_0^n \ln\left(1+\frac{j}{m}\right)^m dt.$$

Это выражение можно представить в виде

$$S = Pe^{\int_0^n \ln\left(1+\frac{j}{m}\right)^m dt}. \qquad \textbf{(2.42)}$$

Сопоставив **(2.42)** с **(2.41)**, найдем

$$\delta = m \cdot \ln\left(1+\frac{j}{m}\right); \qquad j = m\left(e^{\frac{\delta}{m}} - 1\right). \qquad \textbf{(2.43)}$$

Для годовых ставок ($m = 1$) имеем

$$\delta = \ln(1+i); \quad i = e^{\delta} - 1, \qquad \textbf{(2.44)}$$

где i — годовая процентная ставка наращения.

Таким образом, вид формул **(2.43)** и **(2.44)**, определяющих связь силы роста наращения и ставки наращения, совпадает с видом формул **(2.37)** и **(2.38)**, определяющих связь спотовой силы роста и спотовой ставки.

Перейдя в **(2.42)** к пределу при $m \to \infty$, получим **(2.41)**.

Если отрезок от 0 до n разбить на два $(0, \tau)$ и (τ, n), где точка τ лежит между 0 и n (см. рис. 2.3), то формулу **(2.41)** можно записать в виде

$$S = P \cdot e^{\int_0^\tau \delta\, dt} \cdot e^{\int_\tau^n \delta\, dt}.$$

Наращенная сумма, выраженная через форвардную силу роста для момента времени τ, по определению форвардной ставки находится из соотношения:

$$S = P \cdot e^{\int_0^\tau \delta dt} \cdot e^{\delta_\tau \cdot (n-\tau)}.$$

Сопоставив два последних выражения, найдем формулу для расчета форвардной силы роста δ_τ в любой произвольный момент τ:

$$\delta_\tau = \frac{1}{n-\tau} \int_\tau^n \delta \, dt. \qquad \textbf{(2.45)}$$

Формула для расчета спотовой силы роста следует из **(2.45)** при $\tau = 0$:

$$\delta_{0,n} = \frac{1}{n} \int_0^n \delta \, dt. \qquad \textbf{(2.46)}$$

Выразим зависимость силы роста наращения от спотовой силы роста. Для этого умножим левую и правую части **(2.46)** на *n* и, продифференцировав их по *n*, получим формулу для расчета силы роста наращения в зависимости от спотовой силы роста:

$$\delta(n) = \delta_{0,n} + n \frac{d\delta_{0,n}}{dn}. \qquad \textbf{(2.47)}$$

Проведя вычисления по этой формуле и заменив в результате *n* на *t*, получим зависимость силы роста наращения от времени $\delta(t)$.

Из выражения **(2.47)** следует, что если $\delta_{0,n}$ возрастает при увеличении *n*, т.е. $\frac{d\delta_{0,n}}{dn} > 0$, то $\delta(t) > \delta_{0,n}$, если же $\delta_{0,n}$ убывает, то $\delta(t) < \delta_{0,n}$.

■ **Пример 2.16.** Определить зависимость непрерывной форвардной процентной ставки от времени, если непрерывная спотовая ставка наращения имеет вид

$$a)\ \delta_{0,n} = \delta_0 = \text{const}; \quad b)\ \delta_{0,n} = \delta_0 \pm kn.$$

Решение.

Непрерывную процентную ставку наращения определим по формуле **(2.47)**:

$$a)\ \delta(t) = \delta_0; \quad b)\ \delta(t) = \delta_0 \pm kt \pm kt = \delta_0 \pm 2kt.$$

Непрерывная форвардная ставка наращения вычисляется по формуле **(2.45)**:

$$a)\ \delta_\tau = \frac{1}{n-\tau} \int_\tau^n \delta \, dt = \frac{\delta_0}{n-\tau} t \Big|_\tau^n = \delta_0;$$

$$b)\ \delta_\tau = \frac{1}{n-\tau}\int_\tau^n(\delta_0 \pm 2kt)\,dt = \frac{\delta_0 t \pm kt^2}{n-\tau}\bigg|_\tau^n =$$

$$= \frac{\delta_0(n-\tau) \pm k\left(n^2-\tau^2\right)}{n-\tau} = \delta_0 \pm k(n+\tau).\ \square$$

Найдем связь между спотовой номинальной ставкой и номинальной ставкой наращения. Для этих целей во вторую формулу **(2.37)** подставим выражение для расчета спотовой силы роста **(2.46)**. В результате получим

$$j_{0,n} = m\left(e^{\frac{1}{mn}\int_0^n \delta dt} - 1\right).$$

Подставив сюда первую формулу **(2.43)**, найдем

$$1 + \frac{j_{0,n}}{m} = e^{\frac{1}{n}\int_0^n \ln\left(1+\frac{j}{m}\right)dt}.$$

Иначе это выражение можно записать в виде

$$\ln\left(1 + \frac{j_{0,n}}{m}\right) = \frac{1}{n}\int_0^n \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)dt. \qquad \textbf{(2.48)}$$

Для годовых ставок ($m = 1$) имеем

$$\ln\left(1 + i_{0,n}\right) = \frac{1}{n}\int_0^n \ln(1+i)\,dt. \qquad \textbf{(2.49)}$$

2.6. Потоки платежей, аннуитеты

Потоки платежей — это платежи последовательные во времени, например выплаты дивидендов, пенсии и т.д.

Регулярным потоком платежей **(*финансовой рентой*, *аннуитетом*)** называются платежи, у которых все выплаты направлены в одну сторону (например, поступления), а интервалы (периоды) между платежами одинаковы.

Нерегулярным потоком платежей называются платежи, у которых часть выплат являются положительными величинами (поступления), а другая часть — отрицательными величинами (выплаты сторонним организациям). Интервалы между платежами в этом случае могут быть не равны друг другу.

Наращенная сумма потока платежей — это сумма всех выплат с начисленными на них к концу срока сложными процентами.

Современная стоимость потока платежей — это сумма всех выплат, дисконтированных на начало срока этого потока по сложной процентной ставке.

Рассмотрим общий случай потока платежей. Пусть R_k — ряд платежей, имеющих знак «плюс» или «минус»; t_k — время выплаты под номером $k = 1, 2, ..., K$; K — количество выплат; t_K — общий срок выплат; i — сложная процентная ставка наращения, начисляемая один раз в году; выплаты производятся в конце периода (рис. 2.6).

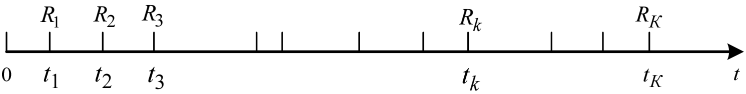


Рис. 2.6. Схема выплат

В соответствии с определением наращенная сумма такого потока платежей рассчитывается по формуле

$$S = \sum_{k=1}^{K} R_k \left(1+i\right)^{t_K - t_k}. \qquad \textbf{(2.50)}$$

Современная стоимость потока платежей определяется соотношением

$$A = \sum_{k=1}^{K} \frac{R_k}{\left(1+i\right)^{t_k}}. \qquad \textbf{(2.51)}$$

Современную стоимость, определяемую соотношением **(2.51)**, можно получить также дисконтированием наращенной суммы **(2.50)**, т.е.

$$A = \frac{S}{\left(1+i\right)^{t_K}}.$$

Действительно,

$$\frac{S}{\left(1+i\right)^{t_K}} = \sum_{k=1}^{K} R_k \left(1+i\right)^{t_K - t_k} \frac{1}{\left(1+i\right)^{t_K}} = \sum_{k=1}^{K} R_k \left(1+i\right)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{K} \frac{R_k}{\left(1+i\right)^{t_k}} = A.$$

По моменту выплат в пределах между началом и концом периода ренты подразделяются на:

- *постнумерандо* (обыкновенные), когда выплаты производятся в конце периода;
- *пренумерандо*, когда выплаты производятся в начале периода;
- *ренты с платежами в середине периода.*

Постоянной рентой называется рента, выплаты которой не изменяются во времени.

Будем рассматривать в основном ренты постнумерандо. Связь рент постнумерандо с остальными типами будет установлена позже.

Рассмотрим различные в и д ы ф и н а н с о в ы х р е н т.

▶ ***Годовая рента постнумерандо*** предусматривает выплаты и начисления процентов один раз в конце года.

Определим *наращенную сумму годовой ренты.* Такая задача формулируется следующим образом: в течение n лет в фонд (банк) в конце каждого года вносится по R рублей, на которые начисляются сложные проценты по ставке i% годовых. Таким образом, на первый взнос проценты начисляются $n-1$ год, на второй — $n-2$ года и т.д. Наращенная сумма к концу срока будет равна

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots + R(1+i) + R.$$

Если посмотреть на это выражение справа налево, то можно увидеть, что оно является суммой геометрической прогрессии со знаменателем прогрессии $q = 1+i$. Сумма геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{R\left(q^n - 1\right)}{q-1},$$

где R — первый член прогрессии; n — количество членов прогрессии.

Таким образом, наращенная сумма годовой ренты к концу срока определяется соотношением

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Часто эту формулу записывают в виде

$$S = Rs_{n;i},$$

где $s_{n;i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ — коэффициент наращения ренты, табулированная функция.

Для определения *современной стоимости годовой ренты* необходимо провести дисконтирование каждого платежа на начало срока ренты и сложить все эти платежи, т.е.

$$A = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n} =$$

$$= \frac{R}{1+i}\left(1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right).$$

Выражение в скобках является суммой геометрической прогрессии со знаменателем прогрессии $\dfrac{1}{1+i}$ и с количеством членов прогрессии, равным n. Таким образом, современная стоимость годовой ренты вычисляется по формуле

$$A = \frac{R}{1+i} \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = R \frac{(1+i)^{-n} - 1}{1-1-i} = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Часто эту формулу записывают в виде

$$A = Ra_{n;i},$$

где $a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ — коэффициент приведения ренты, табулированная функция.

■ **Пример 2.17.** В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 10 000 руб. в течение семи лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых.

Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

Решение.

Коэффициент наращения ренты находится по формуле

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1{,}15^7 - 1}{0{,}15} = 11{,}066799.$$

Наращенная сумма:

$$S = Rs_{n;i} = 10\ 000 \cdot 11{,}066799 = 110\ 667{,}99 \text{ руб.}$$

Коэффициент приведения ренты находится по формуле

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-1{,}15^{-7}}{0{,}15} = 4{,}16042.$$

Современная стоимость определяется соотношением

$$A = Ra_{n;i} = 10\ 000 \cdot 4{,}16042 = 41\ 604{,}2 \text{ руб.} \quad \square$$

▶ ***Рента с начислением процентов по номинальной процентной ставке и с неоднократными выплатами в году*** является самым общим типом ренты. Возможная схема выплат и начислений такой ренты представлена на рис. 2.7.

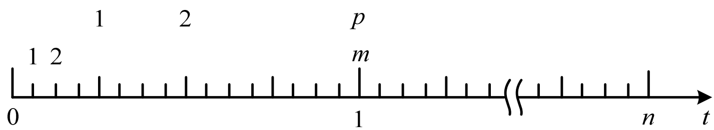


Рис. 2.7. Схема выплат ренты с начислением процентов по номинальной процентной ставке и с неоднократными выплатами в году

Если выплаты производятся p раз в году, то такая рента называется p-срочной или рентой с неоднократными выплатами в году. В любом году производится p выплат по R/p руб., где R — годовая выплата. Количество начислений процентов в году по номинальной ставке j равно m. Срок ренты — n лет. Аналогично случаю годовой ренты находим *соотношения для наращенной суммы* и *современной стоимости исследуемой ренты*:

$$S = Rs^{(p)}_{mn;j/m}, \tag{2.52}$$

где
$$s^{(p)}_{mn;j/m} = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]} \text{ —} \tag{2.53}$$

коэффициент наращения ренты, табулированная функция;

$$A = Ra^{(p)}_{mn;j/m}\ , \tag{2.54}$$

где
$$a^{(p)}_{mn;j/m} = \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]} \text{ —} \tag{2.55}$$

коэффициент приведения ренты, табулированная функция.

Из соотношений **(2.52)** и **(2.53)**, а также из **(2.54)** и **(2.55)** следуют формулы для частного случая, когда количество начислений процентов в году равно количеству выплат в году. Подставив туда $m = p$, найдем

$$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{j};$$

$$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}.$$

Для случая годовой ренты с начислением процентов по номинальной процентной ставке *соотношения для наращенной суммы* и *современной стоимости* получают из **(2.1—2.4)** при подстановке туда $p = 1$:

$$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1} = Rs_{mn;j/m},$$

где

$$s_{mn;j/m} = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1} \text{ —}$$

коэффициент наращения ренты, табулированная функция;

$$A = Ra_{mn;j/m}$$

где

$$a_{mn;j/m} = \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1} \text{ —}$$

коэффициент приведения ренты, табулированная функция.

■ **Пример 2.18.** В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 10 000 руб. в течение семи лет, на которые начисляются проценты по номинальной ставке 15% годовых, причем проценты начисляются поквартально.

Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

Решение.

Коэффициент наращения ренты находится по формуле

$$s_{mn;j/m} = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1} = \frac{\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{4\cdot 7} - 1}{\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{4} - 1} = 11,366392.$$

Наращенная сумма

$$S = Rs_{mn;j/m} = 10\ 000 \cdot 11,366392 = 113\ 663,92 \text{ руб.}$$

Коэффициент приведения ренты определим по формуле

$$a_{mn;j/m} = \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1} = \frac{1-\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{-4\cdot 7}}{\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{4} - 1} = 4,0546724.$$

Современная стоимость ренты

$$A = Ra_{mn;j/m} = 10\ 000 \cdot 4,054672 = 40\ 546,72 \text{ руб.} \ \square$$

Для p-срочной ренты формулы для наращенной суммы и современной стоимости также находят из **(2.52—2.55)** при подстановке туда $m=1$:

$$S = Rs_{n;i}^{(p)},$$

где
$$s_{n;i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]} \text{ —}$$

коэффициент наращения ренты, табулированная функция;

$$A = Ra_{n;i}^{(p)},$$

где
$$a_{n;i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]} \text{ —}$$

коэффициент приведения ренты, табулированная функция. □

■ **Пример 2.19.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение семи лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в конце квартала.

Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

Решение.

Коэффициент наращения ренты находится по формуле

$$s_{n;i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]} = \frac{1{,}15^7 - 1}{4\left(1{,}15^{1/4} - 1\right)} = 11{,}671179.$$

Наращенная сумма $S = Rs_{n;i}^{(p)} = 10\ 000 \cdot 11{,}671179 = 116\ 711{,}79$ руб.

Коэффициент наращения ренты находится по формуле

$$a_{n;i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]} = \frac{1-1{,}15^{-7}}{4\left(1{,}15^{1/4} - 1\right)} = 4{,}387629.$$

Современная стоимость фонда

$$A = Ra_{n;i}^{(p)} = 10\ 000 \cdot 4{,}387629 = 43\ 876{,}29 \text{ руб.} \quad □$$

При расчете характеристик рент с выплатами в начале и в середине периодов используются характеристики аналогичных рент постнумерандо.

При выплатах в начале периода (рента пренумерандо) *наращенная сумма* и *современная стоимость ренты* определяются выражением

$$S_1 = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p},$$

где S_1, S — наращенная сумма ренты пренумерандо и постнумерандо с начислением процентов по номинальной процентной ставке и с неоднократными выплатами в году соответственно;

$$A_1 = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p},$$

где A_1, A — современная стоимость ренты пренумерандо и постнумерандо с начислением процентов по номинальной процентной ставке и с неоднократными выплатами в году соответственно.

▶ ***Для ренты с выплатами в середине периода*** имеем

$$S_{1/2} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{2p}},$$

где $S_{1/2}, S$ — наращенная сумма ренты с выплатами в середине периода и ренты постнумерандо с начислением процентов по номинальной процентной ставке и с неоднократными выплатами в году соответственно;

$$A_{1/2} = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{2p}},$$

где $A_{1/2}, A$ — современная стоимость ренты с выплатами в середине периода и ренты постнумерандо с начислением процентов по номинальной процентной ставке и с неоднократными выплатами в году соответственно.

▶ ***Отложенными рентами*** называются ренты, у которых начало выплат сдвинуто вперед. При расчете современной стоимости такой ренты вначале находят современную стоимость исходной ренты, у которой моментом приведения считается начало выплат, а затем дисконтируют полученный результат к началу отложенной ренты. Для годовой отложенной ренты *современная стоимость* ${}_tA$ рассчитывается по формуле

$${}_tA = \frac{A}{(1+i)^t} = \frac{Ra_{n;i}}{(1+i)^t},$$

где A — современная стоимость исходной ренты, у которой моментом приведения считается начало выплат; t — время задержки в выплате ренты; $a_{n;i}$ — коэффициент приведения ренты к началу выплат.

▶ Если срок ренты очень большой или конкретно не оговаривается, т.е. если $n \to \infty$, то такая рента называется ***вечной рентой***. Формула для вычисления современной стоимости годовой ренты имеет вид

$$A_\infty = \frac{R}{i}.$$

2.7. Характеристики потоков платежей

При определении величины годовой выплаты ренты используются полученные выше формулы для расчета наращенной суммы и современной стоимости различных типов рент. При этом должны быть заданы все параметры ренты, кроме годовой выплаты. Для p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году формула для величины годовой выплаты определяется из соотношений **(2.52)** и **(2.54)**:

$$R = \frac{S}{s_{mn;j/m}^{(p)}}; \qquad R = \frac{A}{a_{mn;j/m}^{(p)}}, \tag{2.56}$$

где S и A наращенная сумма и современная стоимость ренты соответственно; $s_{mn;j/m}^{(p)}$ и $a_{mn;j/m}^{(p)}$ — коэффициенты наращения и приведения ренты соответственно; p — количество выплат в году; m — количество начислений процентов в году; j — номинальная процентная ставка; n — срок ренты в годах.

В практической деятельности довольно часто возникают задачи определения срока ренты при прочих известных параметрах. Срок ренты определяется из формул для наращенной суммы и современной стоимости ренты, которые были получены нами ранее. Наиболее общим случаем постоянной ренты является рента с начислением процентов по номинальной процентной ставке и с неоднократными выплатами в году. Для этой ренты наращенная сумма определяется формулой

$$S = R\frac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]}.$$

Представим эту формулу в виде

$$\frac{S}{R}p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right] + 1 = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Прологарифмировав правую и левую части этого равенства, получим

$$\ln\left\{\frac{S}{R}p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]+1\right\}=mn\ln\left(1+\frac{j}{m}\right).$$

Решив это уравнение относительно n, окончательно найдем

$$n=\frac{\ln\left\{\frac{S}{R}p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]+1\right\}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}. \qquad \textbf{(2.57)}$$

При расчете по этой формуле срок получается, как правило, дробным, поэтому количество периодов n_p округляется до целого числа n_0. Затем уточняется значение разового платежа по формуле

$$\frac{R}{p}=S\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn_0}-1}. \qquad \textbf{(2.58)}$$

■ **Пример 2.20.** В фонд поступают средства, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в конце каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно. Величина фонда на конец срока составит 100 тыс. руб., годовая выплата — 10 тыс. руб.

Определить срок ренты.

Решение.

Срок ренты находится по формуле

$$n=\frac{\ln\left\{\frac{10^5}{10^4}4\left[\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{\frac{12}{4}}-1\right]+1\right\}}{12\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)}=\frac{\ln 2{,}518828}{12\cdot\ln 1{,}0125}=6{,}197 \text{ лет.}$$

Количество кварталов в полученном сроке составит $np = 6{,}197\cdot 4 =$ $= 24{,}788$. Округляем полученное число до 25, т.е. количество лет ренты принимается равным $n_0 = 6{,}25$ лет. Величину ежеквартальной выплаты получим, подставив это число в формулу

$$\frac{R}{p}=S\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn_0}-1}=10^5\frac{\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{\frac{12}{4}}-1}{\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{12\cdot 6{,}25}-1}=2467{,}56 \text{ руб.} \quad \square$$

Аналогично находят формулу для срока ренты с начислением процентов по номинальной процентной ставке и с неоднократными выплатами в году по ее современной стоимости. Эта формула имеет вид

$$n = -\frac{\ln\left\{1 - \frac{A}{R} p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]\right\}}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}. \tag{2.59}$$

Формула для уточнения значения разового платежа:

$$\frac{R}{p} = A \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn_0}}. \tag{2.60}$$

Для других типов ренты срок находится аналогично.

Важной проблемой при анализе потоков платежей является задача расчета процентной ставки ренты. Если известны все параметры ренты, кроме процентной ставки, то расчет процентной ставки можно трактовать как определение доходности финансовой операции. Процентная ставка определяется из соотношений для расчета наращенной суммы и современной стоимости по формулам, полученным выше, для различных типов рент. В отличие от определения годовой выплаты ренты или ее срока выражение для расчета процентной ставки, как правило, нельзя представить в виде формулы. Поэтому процентную ставку ренты рассчитывают цифровыми способами. Рассмотрим один из способов, называемый методом Ньютона—Рафсона.

В общем случае *метод Ньютона—Рафсона* состоит в последовательном приближении к решению x_0 нелинейного уравнения $f(x) = 0$. Геометрический смысл метода поясняется на рис. 2.8.

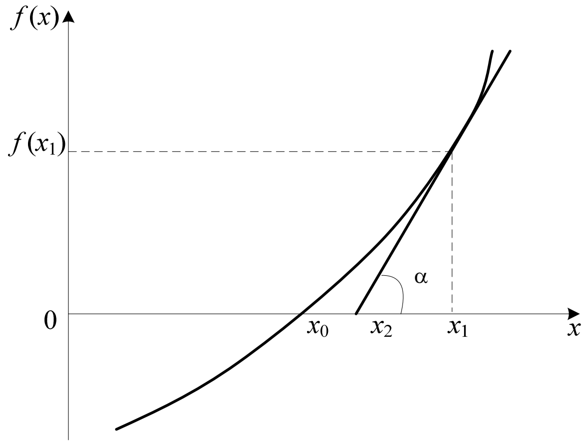


Рис. 2.8. График, поясняющий метод Ньютона—Рафсона

Предполагается, что функция $f(x)$ в исследуемой области является гладкой, непрерывной, монотонно возрастающей или монотонно убывающей. Вблизи решения x_0 выбирается произвольная точка x_1. Через точку $(x_1, f(x_1))$ проводится касательная к функции $f(x)$, которая пересекается с осью $0x$ в точке x_2. Как следует из рис. 2.8, эта точка лежит ближе к решению x_0 по сравнению с точкой x_1. Координата точки x_2 определяется согласно рис. 2.8. Для прямоугольного треугольника

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}.$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha$ является производной $f'(x_1)$ функции $f(x)$ в точке x_1, то решение последнего уравнения относительно x_2 можно записать в виде

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Аналогично находится координата точки x_3, лежащей еще ближе к решению x_0. В общем случае рекуррентное соотношение можно представить в виде

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}, \tag{2.61}$$

где t — номер шага или итерации.

Для годовой ренты наращенная сумма определяется формулой

$$\frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

При решении этого уравнения его приводят к виду, удобному для дальнейших расчетов. Прежде всего, введем замену

$$x = 1 + i \tag{2.62}$$

и перенесем левую часть вправо. В результате получим

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} - \frac{S}{R} = 0.$$

Так как на ноль делить нельзя, то $x \neq 1$.

Умножив левую и правую части этого уравнения на $x-1$, найдем

$$x^n - \frac{S}{R}x + \frac{S}{R} - 1 = 0.$$

В качестве искомой функции принимаем

$$f(x) = x^n - \frac{S}{R}x + \frac{S}{R} - 1. \qquad \textbf{(2.63)}$$

Производная этой функции вычисляется по формуле

$$f'(x) = nx^{n-1} - \frac{S}{R}. \qquad \textbf{(2.64)}$$

■ **Пример 2.21.** В накопительный фонд ежегодно в конце года поступают средства по 10 тыс. руб. в течение 7 лет, причем на конец срока величина фонда составит 100 тыс. руб.

Определить доходность инвестиций.

***Решение*:**

$S/R = 10$. Положим $x_1 = 1{,}15$.

▶ Первая итерация:

$$f(x_1) = x_1{}^n - \frac{S}{R}x_1 + \frac{S}{R} - 1 = 1{,}15^7 - 10 \cdot 1{,}15 + 10 - 1 = 0{,}16;$$

$$f'(x_1) = nx_1{}^{n-1} - \frac{S}{R} = 7 \cdot 1{,}15^6 - 10 = 6{,}19;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}15 - \frac{0{,}16}{6{,}19} = 1{,}1241578 \cdot$$

▶ Вторая итерация:

$$f(x_2) = 0{,}0271944; \; f'(x_2) = 4{,}127383;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}117569.$$

▶ Третья итерация:

$$f(x_3) = 0{,}0016208; \; f'(x_3) = 3{,}637794;$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1{,}1171235.$$

Поскольку результаты во второй и в третьей итерациях слабо отличаются друг от друга, то вычисления можно прекратить и принять $i = x - 1 = 0{,}1171235$, или 11,71235%.

Другим методом, подтверждающим окончание вычислений, является проверка. Для этого в правую часть исходного уравнения подставляют полученное значение ставки. Если результат совпадает с левой частью или слабо отличается от нее, то вычисления прекращаются. Для рассматриваемого примера

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1{,}1171235^7 - 1}{0{,}1171235} = 10{,}00006.$$

Поскольку результаты практически совпали, так как $S/R = 10$, то принимаем $i = 11{,}71235\% \approx 11{,}71\%$. □

Аналогичным образом проводится расчет процентной ставки и для других рент. Например, современная стоимость p-срочной ренты определяется формулой

$$\frac{A}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}.$$

Так же как и в предыдущем случае, это уравнение приведем к виду, удобному для дальнейших расчетов. Введем замену $x = 1+i$ и проведем преобразования. В результате получим

$$\frac{A}{R} p x^{n+\frac{1}{p}} - \left(1+\frac{A}{R}p\right)x^n + 1 = 0.$$

Решение $x = 1$ не является решением исходного уравнения. В качестве искомой функции принимаем

$$f(x) = \frac{A}{R} p x^{n+\frac{1}{p}} - \left(1+\frac{A}{R}p\right)x^n + 1.$$

Производная этой функции вычисляется по формуле

$$f'(x) = \left(n+\frac{1}{p}\right)\frac{A}{R} p x^{n+\frac{1}{p}-1} - n\left(1+\frac{A}{R}p\right)x^{n-1}.$$

2.8. Непрерывные потоки платежей

2.8.1. НАРАЩЕННАЯ СУММА ПЛАТЕЖА ДЛЯ ПРЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ РОСТА

Ссуда в размере P руб. получена в момент времени b_1. Сила роста изменяется во времени так, как показано на рис. 2.9.

Найдем значение наращенной суммы в момент b_2. При этом можно поступить следующим образом.

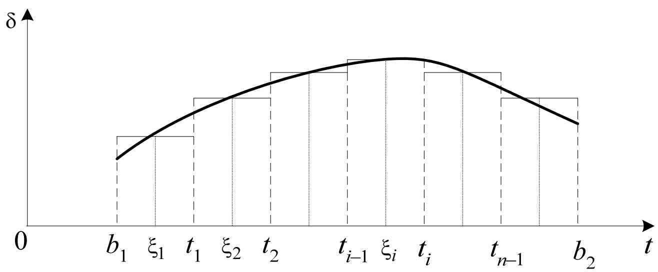


Рис. 2.9. Представление непрерывной функции силы роста от времени отдельными дискретными точками

Интервал $[b_1, b_2]$ разбивается на n элементарных интервалов произвольными числами t_1, t_2, ..., t_{n-1}. Внутри (или на границе) каждого элементарного интервала $[t_{i-1}, t_i]$ выбирается произвольно одно число ξ_i, такое, что

$$t_{i-1} \le \xi_i \le t_i.$$

В момент t_1 наращенная сумма будет равна

$$S_1 = P \cdot e^{\delta(\xi_1)\cdot\Delta t}.$$

В момент t_2 будем иметь

$$S_2 = S_1 \cdot e^{\delta(\xi_2)\cdot\Delta t} = P \cdot e^{\delta(\xi_1)\cdot\Delta t} \cdot e^{\delta(\xi_2)\cdot\Delta t} = P \cdot e^{(\delta(\xi_1)+\delta(\xi_2))\cdot\Delta t}.$$

Для момента b_2 получим

$$S_n = P \cdot e^{(\delta(\xi_1)+\delta(\xi_2)+\ldots+\delta(\xi_n))\cdot\Delta t} = P \cdot e^{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta(\xi_i)}.$$

Найдем предел суммы, полученной в показателе степени при стремлении к нулю каждого элементарного интервала, т.е. $\Delta t_{i-1} \to 0$ и, следовательно, $n \to \infty$. Этот предел называется *определенным интегралом.* При этом пишут

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} \delta(t)\,dt = \lim_{\substack{\Delta t_{i-1}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \delta(\xi_i)\cdot \Delta t_{i-1}.$$

Таким образом, наращенная сумма вычисляется по формуле

$$S = P \cdot e^{\int\limits_{b_1}^{b_2} \delta(t)\,dt}. \qquad \textbf{(2.65)}$$

Приведенная к моменту b_1 стоимость платежа для силы роста, изменяющейся во времени, вычисляется по формуле

$$P = S \cdot e^{-\int\limits_{b_1}^{b_2} \delta(t)\,dt}. \qquad \textbf{(2.66)}$$

Современная стоимость этого платежа, т.е. стоимость, пересчитанная на нулевой момент, определяется соотношением

$$A = P \cdot e^{-\int\limits_{0}^{b_1} \delta(t)\,dt} = S \cdot e^{-\int\limits_{0}^{b_2} \delta(t)\,dt}.$$

■ **Пример 2.22.** Инвестор планирует через год вложить 100 тыс. руб. в проект. По прогнозу доходность проекта в виде силы роста, начиная с момента оценки, будет увеличиваться во времени по линейному закону $\delta(t) = 0{,}1 + 0{,}01 \cdot t$.

Определить сумму, которую получит инвестор через пять лет с момента оценки проекта.

Решение.

Наращенная сумма определяется по формуле

$$S = P \cdot e^{\int_{b_1}^{b_2} \delta(t)dt} = 10^5 \cdot e^{\int_1^5 (0{,}1+0{,}01 \cdot t)dt} = 10^5 \cdot e^{\left(0{,}1 \cdot t+0{,}005 \cdot t^2\right)\Big|_1^5} =$$

$$= 10^5 \cdot e^{0{,}1 \cdot 5+0{,}005 \cdot 25-0{,}1-0{,}005} = 10^5 \cdot e^{0{,}52} = 168\ 202{,}76 \text{ руб.} \quad \square$$

2.8.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОТОКА ПЛАТЕЖЕЙ ДЛЯ ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ РОСТА

Пусть через равные промежутки времени выплачивают или получают платеж постнумерандо R_k (рис. 2.10). Здесь k — номер платежа или промежутка времени. В общем случае различные платежи могут иметь знаки минус и плюс и могут быть равны нулю.

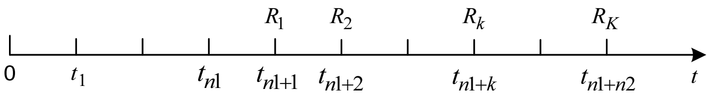


Рис. 2.10. Схема платежей

Выплаты постнумерандо начинаются по прошествии $n1$ периодов после начала процесса. Первая выплата производится в конце периода $n1$, т.е. в момент t_{n1+1}. Всего таких выплат *K*. Сила роста $\delta(t)$ является функцией времени. Современная стоимость для первого платежа определяется соотношением

$$A_1 = R_1 \cdot e^{-\int_0^{t_{n1+1}} \delta(t)dt}.$$

Для второго платежа современная стоимость вычисляется по формуле

$$A_2 = R_2 \cdot e^{-\int_0^{t_{n1+2}} \delta(t)dt}.$$

Для платежа под номером K имеем

$$A_K = R_K \cdot e^{-\int_0^{t_{n1+n2}} \delta(t)dt}.$$

Современная стоимость всего потока равна сумме всех частных современных стоимостей:

$$A = \sum_{k=1}^{K} R_k \cdot \mathrm{e}^{-\int\limits_0^{t_{n1+k}} \delta(t)dt}. \qquad \textbf{(2.67)}$$

Если $\delta(t) = \delta = \mathrm{const}$, то

$$A = \sum_{k=1}^{K} R_k \cdot \mathrm{e}^{-\delta \cdot t_{n1+k}}. \qquad \textbf{(2.68)}$$

Для годовой ренты, у которой $R_k = R = \mathrm{const}$ и $t_{n1+k} = n1 + k$, где $(n1+k)$ — номер года, получим

$$A = R\sum_{k=1}^{K} \mathrm{e}^{-\delta\cdot(n1+k)} = R \cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot n1} \cdot \mathrm{e}^{-\delta} \sum_{k=1}^{K} \mathrm{e}^{-\delta\cdot(k-1)} =$$

$$= R \cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot n1} \cdot \mathrm{e}^{-\delta} \frac{\mathrm{e}^{-\delta\cdot K} - 1}{\mathrm{e}^{-\delta} - 1} = R \cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot n1} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta\cdot K}}{\mathrm{e}^{\delta} - 1}.$$

Если выплаты начинаются с начала процесса, то эта формула приобретает вид

$$A = R\frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta\cdot K}}{\mathrm{e}^{\delta} - 1}.$$

Отсюда имеем

$$A = R \cdot a_{K;\delta}; \; a_{K;\delta} = \mathrm{e}^{-\delta\cdot n1} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta\cdot n}}{\mathrm{e}^{\delta} - 1}. \qquad \textbf{(2.69)}$$

Аналогично находят формулу для наращенной суммы годовой ренты:

$$S = R \cdot s_{K;\delta}; \quad s_{R;\delta} = \frac{\mathrm{e}^{\delta\cdot K} - 1}{\mathrm{e}^{\delta} - 1}. \qquad \textbf{(2.70)}$$

Для *p*-срочной ренты с непрерывным начислением процентов имеем

$$A = Ra_{K;\delta}^{(p)}; \quad a_{K;\delta}^{(p)} = \mathrm{e}^{-\delta\cdot n1} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-\delta\cdot K}}{p\left(\mathrm{e}^{\delta/p} - 1\right)}; \qquad \textbf{(2.71)}$$

$$S = Rs_{n;\delta}^{(p)}; \; s_{n;\delta}^{(p)} = \frac{\mathrm{e}^{\delta n} - 1}{p\left(\mathrm{e}^{\delta/p} - 1\right)}. \qquad \textbf{(2.72)}$$

■ **Пример 2.23.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение семи лет, на которые начисляются проценты по силе роста 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально (раз в году), а проценты начисляются непрерывно.

Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока.

Решение.

Найдем коэффициент наращения и наращенную сумму ренты. Для поквартальных выплат

$$s_{K;\delta}^{(p)} = \frac{e^{\delta \cdot K} - 1}{p\left(e^{\delta/p} - 1\right)} = \frac{e^{0,15 \cdot 7} - 1}{4\left(e^{0,15/4} - 1\right)} = 12,153583.$$

Наращенная сумма $S = Rs_{K;\delta}^{(p)} = 10\ 000 \cdot 12,153584 = 121\ 535,83$ руб.

Для выплат один раз в году коэффициент наращения будет равен

$$s_{K;\delta} = \frac{e^{\delta \cdot K} - 1}{e^{\delta} - 1} = \frac{e^{0,15 \cdot 7} - 1}{e^{0,15} - 1} = 11,478722.$$

Наращенная сумма

$$S = Rs_{K;\delta} = 10\ 000 \cdot 11,478722 = 114\ 787,22 \text{ руб.} \ \square$$

Связь между δ и j можно найти, приравняв множители наращения и приведения дискретной ренты к множителям наращения и приведения непрерывной ренты. Например, имеем

$$\frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]} = \frac{e^{\delta n} - 1}{p\left(e^{\delta/p} - 1\right)}.$$

Это равенство превращается в тождество при выполнении условия

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} = e^{\delta}.$$

Отсюда следуют связи:

$$\delta = m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right); \quad j = m\left(e^{m/\delta} - 1\right).$$

2.8.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ НАЧИСЛЕНИЕМ ПРОЦЕНТОВ

Помимо непрерывного начисления иногда рассматривают потоки с непрерывной выплатой платежей. Непрерывные выплаты так же, как и непрерывные начисления, являются математической абстракцией, однако такие абстракции существенно упрощают анализ сложных финансовых операций.

В этом случае плотность потока платежей можно представить в виде функции времени

$$R_t = R(t),$$

где t — время (рис. 2.11).

Срок инвестиций равен $b_2 - b_1$. Заметим, что плотность потока платежей имеет размерность руб./год.

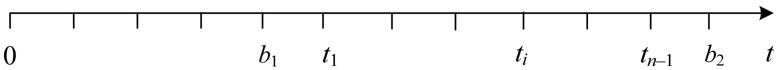


Рис. 2.11. Разбиение периода инвестиций на временной оси на равное количество интервалов

Для интервала времени от b_1 до t_1, равного $\Delta t = t_1 - b_1$, наращенная сумма будет равна

$$\Delta S_1 = R(t_1)\,\mathrm{e}^{\int_{t_1}^{b_2}\delta(t_1)dt}\,\Delta t.$$

Для интервала времени от t_1 до t_2 имеем

$$\Delta S_2 = R(t_2)\,\mathrm{e}^{\int_{t_2}^{b_2}\delta(t_2)dt}\,\Delta t.$$

Для интервала от t_{i-1} до t_i

$$\Delta S_i = R(t_i)\,\mathrm{e}^{\int_{t_i}^{b_2}\delta(t_i)dt}\,\Delta t.$$

Суммарная наращенная стоимость

$$S = \sum_{i=1}^{n} R(t_i)\,\mathrm{e}^{\int_{t_i}^{b_2}\delta(t_i)dt}\,\Delta t.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$S = \int_{b_1}^{b_2} R(t)\,\mathrm{e}^{\int_{t}^{b_2}\delta(t)dt}\,dt. \qquad \mathbf{(2.73)}$$

Пусть интеграл в показателе степени

$$\mu = \int \delta(t)\,dt. \qquad \mathbf{(2.74)}$$

Тогда формулу для наращенной суммы можно записать в виде

$$S = \int_{b_1}^{b_2} R(t) \cdot \mathrm{e}^{\mu(b_2)-\mu(t)} dt. \qquad \textbf{(2.75)}$$

Для $\delta(t) = \delta = \text{const}$ имеем

$$\mu = \int \delta dt = \delta \cdot t;$$

$$S = \int_{b_1}^{b_2} R(t) \cdot \mathrm{e}^{\delta \cdot (b_2 - t)} dt. \qquad \textbf{(2.76)}$$

Аналогично находят формулу для современной стоимости непрерывного переменного потока платежей. Для интервала времени от b_1 до t_1 современная стоимость будет равна

$$\Delta A_1 = R(t_1) \mathrm{e}^{-\int_0^{t_1} \delta(t_1) dt} \Delta t.$$

Для интервала времени от t_1 до t_2 имеем

$$\Delta A_2 = R(t_2) \mathrm{e}^{-\int_0^{t_2} \delta(t_2) dt} \Delta t.$$

Для интервала от t_{i-1} до t_i

$$\Delta A_i = R(t_i) \mathrm{e}^{-\int_0^{t_i} \delta(t_i) dt} \Delta t.$$

Современная суммарная стоимость

$$A = \sum_{i=1}^{n} R(t_i) \mathrm{e}^{-\int_0^{t_i} \delta(t_i) dt} \Delta t.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$A = \int_{b_1}^{b_2} R(t) \mathrm{e}^{-\int_0^{t} \delta(t) dt} dt = \int_{b_1}^{b_2} R(t) \mathrm{e}^{-(\mu(t)-\mu(0))} dt. \qquad \textbf{(2.77)}$$

Для $\delta(t) = \delta = \text{const}$ имеем

$$\mu = \int \delta dt = \delta \cdot t;$$

$$A = \int_{b_1}^{b_2} R(t) \cdot \mathrm{e}^{-\delta \cdot t} dt. \qquad \textbf{(2.78)}$$

Полученные выражения **(2.75)** и **(2.77)** позволяют определить связь между наращенной суммой и современной стоимостью непрерывного переменного потока платежей. Для определения этой связи в **(2.75)** и в **(2.77)** постоянный коэффициент вынесем за знак интеграла:

$$S = \mathrm{e}^{\mu(b_2)} \int_0^n R(t) \cdot \mathrm{e}^{-\mu(t)} dt;$$

$$A = \mathrm{e}^{\mu(0)} \int_0^n R(t) \mathrm{e}^{-\mu(t)} dt.$$

Перепишем формулу для наращенной суммы в виде

$$S = \mathrm{e}^{\mu(b_2)-\mu(0)} \cdot \mathrm{e}^{\mu(0)} \cdot \int_0^n R(t) \cdot \mathrm{e}^{-\mu(t)} dt = A \cdot \mathrm{e}^{\mu(b_2)-\mu(0)};$$

$$S = A \cdot \mathrm{e}^{\int_0^{b_2} \delta(t) dt}. \qquad \textbf{(2.79)}$$

Для $\delta(t) = \delta = \mathrm{const}$

$$S = A \cdot \mathrm{e}^{\delta \cdot b_2}. \qquad \textbf{(2.80)}$$

Зная современную и наращенную стоимость потока можно определить среднегодовую силу роста. Среднегодовой множитель наращения определяется как среднее геометрическое из множителя наращения формулы **(2.79)**:

$$\mathrm{e}^{\overline{\delta}} = \sqrt[b_2]{\mathrm{e}^{\int_0^{b_2} \delta(t) dt}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{b_2} \int_0^{b_2} \delta(t) dt}.$$

Отсюда следует, что среднегодовая сила роста определяется по формуле:

$$\overline{\delta} = \frac{1}{b_2} \int_0^{b_2} \delta(t)\, dt.$$

С другой стороны, из формулы **(2.79)** следует, что

$$\int_0^{b_2} \delta(t) dt = \ln \frac{S}{A}.$$

Окончательно получим

$$\overline{\delta} = \frac{1}{n} \ln \frac{S}{A}. \qquad \textbf{(2.81)}$$

■ **Пример 2.24.** Плотность потока платежей изменяется во времени по экспоненциальному закону $R(t) = 10^6 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot t}$ $R = 100\,000 - 10\,000 \cdot t$. Сила роста является величиной постоянной и равной 15%. Найти современную стоимость, наращенную сумму при сроке потока четыре года.

Решение.
Современную стоимость найдем по формуле **(2.78)**:

$$A = \int_0^4 10^6 \cdot e^{-0,1\cdot t} \cdot e^{-0,15\cdot t} dt = 10^6 \int_0^4 e^{-0,25\cdot t} = 10^6 \left. \frac{e^{-0,25\cdot t}}{-0,25} \right|_0^4 =$$
$$= 4 \cdot 10^6 \left(1 - e^{-1}\right) = 2\ 528\ 482,24 \text{ руб.}$$

Наращенная сумма определяется по формуле **(2.80)**:

$$S = 2\ 528\ 492,24 \cdot e^{0,15\cdot 4} = 4\ 607\ 195,02 \text{ руб.} \quad \square$$

Упражнения

ЗАДАЧИ

2.1. Ссуда в размере 8 млн руб. выдана 28 января по 15 июня включительно под простые проценты 22% годовых. Определить величину долга в конце при базе, равной: а) 365 дней, б) 360 дней.

2.2. Какой величины достигнет долг, равный 6000 руб., через 4 года при росте по сложной ставке наращения 18,5% годовых?

2.3. Построить таблицу для дисконтного множителя при сроке ссуды 5; 10; 20; 50 лет и при сложной годовой ставке наращения 10 и 20%.

2.4. Сумма 12 000 руб. выплачивается через 2,4 года. Номинальная ставка процентов — 16% годовых. Определить современную стоимость при ежеквартальном начислении процентов.

2.5. 27 февраля должник получил информацию о возможности выплатить долг сегодня вместо указанного в договоре срока: *а*) 23 мая, *б*) 8 июля этого же года. Величина долга на указанные моменты выплат составляет 10 000 руб. Простая ставка дисконтирования, оговоренная в договоре, равна 22,5% годовых. Определить величину долга на 27 февраля для вариантов *а*) и *б*) при базе, равной 365 дней.

2.6. Покупая бескупонную облигацию, инвестор намерен через два года получить 14 400 руб. Доходность этого типа облигаций составляет 20% годовых. Определить стоимость облигации и дисконт.

2.7. Вексель на сумму 20 000 руб., срок платежа по которому наступает через 1,8 года, учтен по сложной учетной ставке 18% годовых. Определить сумму, полученную владельцем векселя при учете, и дисконт.

2.8. За какой срок сумма, равная 25 000 руб., достигнет 40 000 руб. при начислении по сложной процентной ставке 18% годовых?

2.9. Определить силу роста для сложной процентной ставки наращения 20% годовых.

2.10. Темп прироста инфляции за каждый год составляет $H_1 = 18\%$, $H_2 = 12\%$, $H_3 = 9{,}5\%$. Определить обесцененную наращенную сумму, если на сумму 95 000 руб. в течение этих трех лет начислялась сложная процентная ставка: *а*) 16% годовых, *б*) 11% годовых.

2.11. Доллары были приобретены по курсу 30 руб./долл. и проданы через 0,5 года. Темп инфляции за этот промежуток времени составил 8%. Определить доходность финансовой операции при следующих условиях:

вариант 1 — доллары хранились у владельца и проданы по курсу 31,5 руб./долл.;

вариант 2 — доллары хранились у владельца и проданы по курсу 33 руб./долл.;

вариант 3 — доллары помещены на депозит по ставке 2% годовых и по истечении полугодового срока депозита проданы по курсу 31,5 руб./долл.;

вариант 4 — доллары помещены на депозит по ставке 7% годовых и по истечении полугодового срока депозита проданы по курсу 31,5 руб./долл.

2.12. Имеется следующий график платежей во времени:

1 января 2005 г. — 20 тыс. руб.;
1 июля 2005 г. — 30 тыс. руб.;
1 января 2006 г. — 10 тыс. руб.;
1 января 2007 г. — 40 тыс. руб.

Определить сумму задолженности на 1 января 2001 г. и ее современную стоимость на момент выплаты первой суммы при ставке наращения 15% годовых.

2.13. В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение семи лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в конце квартала, а проценты начисляются ежемесячно. Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

2.14. В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение семи лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем проценты начисляются и выплаты производятся в конце каждого месяца. Определить величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

2.15. В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение семи лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в начале каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно. Определить наращенную сумму и современную стоимость фонда.

2.16. В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение семи лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в середине каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно. Определить наращенную сумму и современную стоимость фонда.

2.17. Спустя три года после образования фонда в него начинают поступать средства по 10 000 руб. в конце каждого года в течение последующих семи лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых. Определить современную стоимость и наращенную сумму фонда.

2.18. Определить цену годовой вечной ренты, выплаты по которой в конце каждого года составляют 24 тыс. руб. при процентной ставке 12% годовых.

2.19. В фонд ежегодно в конце периода поступают средства в течение семи лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально, а проценты начисляются ежемесячно (раз в году). Наращенная сумма к концу срока составит 100 тыс. руб. Определить коэффициент наращения ренты и годовую выплату.

2.20. Долг в размере 50 тыс. руб. погашается равными частями в конце каждого квартала по 2,5 тыс. руб. На взносы начисляются проценты раз в году по ставке 15% годовых. Определить время погашения долга.

2.21. Единовременное вложение средств в предприятие составило 50 тыс. руб. В течение семи лет по истечении каждого квартала инвестор получает 2,5 тыс. руб. Определить доходность инвестиций.

2.22. Инвестор планирует вложить средства в проект и получить через три года 1 млн руб. По прогнозу доходность проекта в виде силы роста будет увеличиваться во времени по экспоненциальному закону $\delta(t) = 0{,}1 \cdot e^{0{,}2 \cdot t}$. Определить сумму, которую инвестор должен вложить в проект.

2.23. В фонд ежегодно поступают средства по 20 000 руб. в течение пяти лет, на которые начисляются проценты по силе роста 12% годовых, причем выплаты производятся помесячно, а проценты начисляются непрерывно. Определить коэффициент приведения ренты и его современную стоимость.

2.24. Наращенная сумма непрерывного потока, имеющего срок четыре года, в три раза превышает его современную стоимость. Найти среднегодовую доходность в виде сложной процентной ставки.

Глава 3 ПОНЯТИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

3.1. Содержание инвестиционного проекта

Инвестиционный проект — это система целей, реализация которых основывается на инвестициях, сформированных для достижения этих целей, а также исходных данных, обусловливающих способ достижения поставленных целей. Инвестиционный проект включает в себя замысел, средства реализации этого замысла и результаты.

Рассмотрим основное содержание инвестиционного проекта. В общем виде все вопросы, представленные в этой книге, так или иначе связаны с этим содержанием.

На начальном этапе инвестиционного проекта разрабатывается его *концепция*. Основная идея проекта, как правило, возникает в голове предпринимателя. Предвидение предпринимателя позволяет в общих чертах интуитивно разработать *схему проекта*.

После определения основной идеи проекта переходят к анализу. Это уже не интуитивное решение задач, а рациональное решение проблем.

Анализ распадается, как правило, на три части:

- конкурентный анализ;
- внешний анализ;
- внутренний анализ.

Конкурентный анализ в данном случае выделяется из внешнего, так как его результаты тесно связаны с внутренним анализом.

В результате проведения анализа снимаются проблемы реализации целей. При этом находят наилучшее или оптимальное решение, выбирают, например, тип технологического процесса, определяются с поставщиками и потребителями и т.д.

Реакция на важнейшие проблемы занимает высший приоритет в деятельности руководителей проекта. *Выявление наиболее важных* *проблем* в современной экономике становится необходимым, так как окружающая среда становится все более сложной. Важнейшие проблемы вытекают из следующих моментов:

- наиболее важных факторов развития окружающей среды;
- наиболее важных сильных и слабых сторон;
- предпринимательского предвидения.

Примером наиболее распространенной проблемы в российских условиях является качество продукции. Если конкуренты уже заняты повышением качества, то ваш бизнес попал в затруднительное положение.

После разработки проблем переходят к действиям и принятию решений. *Процесс принятия решений* основан на трех моментах:

- формулирование целей;
- составление плана действия;
- составление финансового плана.

После выполнения анализа формулируют цели, основанные на проектных целях компании. Корпоративные цели вытекают из задач корпорации. *Цели*, *формирующие задачи корпорации*, строятся на основе следующих параметров:

- заданные показатели финансовой деятельности;
- желаемое поведение компании (репутация компании);
- границы действия компании и ее отделений (категория клиентов, география рынков, виды продуктов или услуг, виды технологий);
- цели, касающиеся сфер бизнеса;
- цели, касающиеся социальной ответственности компании.

В качестве целей компании могут быть поставлены, например, высокая эффективность и качество, производство дешевых качественных продуктов или услуг, доля на рынке, доходность, товарооборот и рост прибыли, финансовые показатели и т.д.

В общем случае ни у кого не может быть полной уверенности в благополучной реализации проекта. Это связано с тем, что всегда существует возможность убытков или даже возможность провала проекта. Для снижения вероятности убытков *рисками проектов необходимо управлять*. При этом, зная виды рисков и степень их влияния на доходность, управление рисками сводится к снижению или полному исключению их влияния. Обычно *анализ риска* проводится всеми участниками проекта.

Важнейшее место в управлении проектами занимает *планирование*. Планы составляются на всех этапах инвестиционного проекта. Инвестиционное планирование предусматривает обработку информации в целях разработки проекта. При этом заранее устанавливает показатели для достижения целей. Планирование позволяет стремиться к выполнению заранее сформулированных целей и показателей. Поэтому оно является основой деятельности любой организации.

Важное место в реализации проекта занимает разработка проектно-сметной документации, а также документации на поставки, складирование и хранение.

Большое значение для инвесторов имеет качество инвестиционного проекта. Это довольно широкое понятие. В него входит, например, качество продукции и соответствие этого качества стандартам, например международным стандартам управления качеством ISO-9000.

Международная организация по стандартизации ИСО (International standard organization — ISO) создана решением комитета по координации стандартов ООН в 1946 г. ИСО является неправительственной организацией и пользуется консультативным статусом ООН. Ее основная цель — содействие стандартизации в мировом масштабе.

Другим важным примером качества инвестиционного проекта является *обеспечение качественного управления проектом.* И наконец, качество инвестиционного проекта определяется его финансовыми характеристиками, которые, в свою очередь, существенным образом зависят от потоков платежей проекта.

3.2. Классификация инвестиционных проектов

Инвестиционные проекты *классифицируются по следующим признакам*:

- размер проекта;
- срок реализации;
- ресурсы;
- условия реализации.

Размер проекта, как правило, определяют по количеству инвестиций.

Инвестиции в малые проекты не превышают 300 млн руб. К таким проектам можно отнести модернизацию действующих производств, создание небольших предприятий.

В противоположность малым проектам выделяют мегапроекты. Инвестиции в такие проекты достигают миллиарда и более долларов. Обычно мегапроекты включают в себя несколько проектов, связанных общей целью и общими ресурсами. Примерами мегапроектов могут служить проекты нефтегазовых комплексов.

По срокам реализации проекты делятся на *краткосрочные* и *долгосрочные.* Сроки создания инвестиционных объектов краткосрочных проектов составляют менее года. Особенности таких проектов заключаются в том, что из-за срочности выполнения работ обычно идут на увеличение инвестиций. Это связано с тем, что инвестор заинтересован в скором выполнении работ.

К долгосрочным проектам относятся, например, мегапроекты. Инвестиционные объекты таких проектов вводятся, как правило, по частям. Например, строительство газовых трубопроводов может занимать до семи лет. Сооружение отдельных очередей газопровода составляет 2—3 года.

По ресурсам проекты подразделяют на мультипроекты, монопроекты и модульные проекты [20].

Мультипроект — это множество проектов в рамках программы предприятия, ограниченной его ресурсными возможностями. К таким возможностям относят производственные, финансовые, временные ресурсы.

От мультипроектов отличаются монопроекты. Здесь производственные, финансовые и временные ресурсы четко определены.

Модульные проекты включают в себя прежде всего модульное строительство. Модульное строительство служит также примером классификационного признака, связанного с условиями реализации. Суть этих проектов состоит в том, что бóльшая часть инвестиционного объекта изготавливается на специализированных заводах, а не на месте создания этого объекта. Это характерно для объектов, создаваемых в отдаленных, труднодоступных районах.

3.3. Основные фазы развития инвестиционного проекта

Основными фазами развития инвестиционного проекта являются: предынвестиционная, инвестиционная и эксплуатационная фазы.

На *предынвестиционной фазе* разрабатывается основной документ — технико-экономическое обоснование (бизнес-план), в котором, в частности, приведен план реализации проекта. Именно на этом этапе принимается окончательное решение о реализации проекта.

На *инвестиционной фазе* создается объект инвестиционного проекта, при этом решаются основные юридические, финансовые и технические вопросы, вопросы, связанные с созданием этого объекта.

Эксплуатационная фаза посвящена выпуску продукции, внедрению инноваций, замене оборудования и получению прибыли.

3.4. Основы управления инвестиционным проектом

Управление проектом — это процесс, при котором определяются, задаются или согласуются цели, достижение которых происходит посредством вовлечения рабочей силы и других производственных факторов [5]. В качестве функций управления выступают:

- инвестиционное планирование;
- инвестиционный контроль;
- инвестиционный контроллинг;
- принятие решения.

3.4.1. ИНВЕСТИЦИОННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Планирование необходимо на всех этапах инвестиционного проекта. На инвестиционной фазе должно происходить планирование по созданию и вводу в строй объекта инвестирования. На фазе эксплуатации планируется приемка и пуск объекта, замена оборудования, расширение, инновации, выпуск продукции и получение прибыли.

Инвестиционное планирование — это упорядоченный процесс обработки информации в целях разработки проекта, который заранее устанавливает показатели для достижения целей [5].

Планирование имеет следующие у р о в н и:

- стратегический — со сроками более года;
- тактический — со сроками от одного до двенадцати месяцев;
- оперативный — со сроками менее месяца.

Значение планирования заключается прежде всего в том, что оно позволяет стремиться к выполнению заранее сформулированных целей и показателей. Тем самым оно является предпосылкой к эффективной деятельности организации.

При составлении планов используется информация. В конечном счете *информация* представляет собой знания, предназначенные для достижения определенных целей. Поиск и использование информации являются одной из функций планирования. Информацию получают путем обработки данных, собранных от различных источников. Например, при анализе конкурентных возможностей анализируются продукция конкурентов, а также характеристики компаний, выпускающих эту продукцию. Для этого, в частности, покупается товар конкурента, разбирается на части и анализируется его работа, собираются и анализируются годовые отчеты конкурентов, биржевые, страховые и другие доступные материалы, отчеты консультантов и аналитиков рынка, изучаются научные статьи и другие публикации. Другим примером является выбор технологий по производству продукции. При этом собираются данные обо всех доступных технологиях. После проведенного анализа этих данных выбирается наилучшая технология и составляется план по ее приобретению и внедрению в производство. В процессе этой работы формируются цели, внешние и внутренние показатели, рассматриваются альтернативные варианты.

Другой функцией планирования является *выявление рисков*. После идентификации возможных рисков анализируется степень их влияния на характеристики проекта. Планы составляются с учетом минимизации влияния рисков на эффекты и эффективности проекта.

При составлении планов полезно выделить несколько этапов. Ниже рассматриваются случаи разработки инвестиционных планов в рамках существующей корпорации или случаи использования опыта работы при создании новых предприятий.

▶ *Первый этап посвящается формированию целей.* Цели бывают качественные и количественные. В качестве целей могут быть поставлены, например, высокая эффективность и качество, производство дешевых качественных продуктов или услуг, доля на рынке, доходность, товарооборот и рост прибыли, финансовые показатели и т.д.

Выделяют три типа целей:

- корпоративные цели, касающиеся корпорации в целом (рынки, тип изделия или услуги, технологии);
- бизнес-цели, т.е. цели однородной группы конкретной деятельности;
- функциональные цели, например цели финансовых, технологических и социальных областей.

Интересен пример целей американской телекоммуникационной компании Rolm. К этим целям относятся:

- создание прибыли;
- рост компании;
- выпуск изделий высокого качества и удовлетворение требованиям клиентов;
- создание «большого пространства» для работы, т.е.:
  - работа должна быть интересной, стимулирующей и приятной;
  - рабочее место должно быть располагающим к работе;
  - в компании должна быть создана атмосфера, в которой каждый служащий может развивать себя посредством достижений, творчества и конструктивной обратной связи.

▶ *На втором этапе проводят выявление и анализ проблем.* При изучении проблем может быть использован следующий алгоритм.

1. Избирается подход диагностики, например анкеты, интервью или групповое обсуждение.

2. Согласуется список участников и объем исследования. Определяется, кто будет привлечен к обследованию.

3. Избираются методы. При использовании прямого метода непосредственным участникам задается вопрос, в чем, по их мнению, заключаются проблемы. При использовании косвенного метода осуществляются наблюдение за практической деятельностью или моделирование поведения работников и оценка его влияния на результаты работы.

4. Согласуется подробный график проведения мероприятий.

5. Составляется план проведения мероприятий по сбору информации.

Для проведения интервью и групповых дискуссий:

- обеспечиваются такие помещения, где никто не мешает проведению мероприятия;
- выделяется достаточно времени для встреч;
- обеспечиваются необходимое оборудование и материалы;
- составляются план проведения совещаний и руководство по структуризации дискуссий.

Для анкетирования:

- намечается план распределения анкет;
- намечается план сбора заполненных анкет;
- составляется план их обработки и выделяется компьютерное время специально для данной цели.

Для обследования методами косвенного подхода:

- разрабатывается новая модель или используется одна из существующих моделей;
- организуется место встречи и подготавливается все необходимое.

6. Приступают к выполнению мероприятий:

- проводят интервью;
- начинают обследование.

7. Проводят анализ, формулируют выводы, разрабатывают рекомендации и составляют отчет.

▶ *На третьем этапе предпринимается поиск альтернатив.* Обычно поиск альтернатив сводится к выбору одного или нескольких инвестиционных проектов из имеющегося ограниченного числа предложений. При выборе проектов могут быть использованы интегральные показатели. К числу таких показателей относятся чистый приведенный доход, рентабельность, внутренняя норма доходности, срок окупаемости. Каждый из этих показателей может оказать влияние на выбор проектов. На выбор проекта, помимо указанных показателей, могут повлиять также социальные факторы, качество выпускаемой продукции и т.д. Для выбора проектов и расстановки приоритетов могут быть использованы, например, мозговой штурм или метод номинальной группы.

Мозговой штурм помогает генерировать множество идей.

Правила мозгового штурма.

1. Мозговой штурм — это метод групповой работы.

2. Обсуждаемый вопрос или проблема ясно определены. Вопросы начинаются со слов «почему», «как», «что». Например: «Почему люди не вносят рационализаторских предложений?»

3. Группе необходимо подумать перед ответами 2—3 минуты.

4. Высказывания всех членов группы записываются на бумагу.

5. Во время выступления членов группы запрещаются комментарии и эмоциональные оценки (похвалы, критика, смех, реплики, гримасы изумления и т.д.).

6. При записи необходимо точно сохранить формулировку, которую дал выступающий. Не надо пытаться сократить или переформулировать идею на данной стадии.

7. Опрос продолжается около 10 минут. Можно ожидать, что в течение этого срока будет выдвинуто от 20 до 75 предложений.

8. Тщательно рассматриваются все предложения. При необходимости формулировка уточняется у автора предложения.

9. Снова внимательно рассматриваются предложения и объединяются повторяющиеся в том случае, если с этим согласны оба автора.

Метод номинальной группы — это метод ранжирования соображений по списку, содержащему до 40 пунктов. Используются группы численностью от 2 до 25 человек. Каждый член группы выбирает из списка соображений заранее установленное количество соображений, например пять, кажущихся ему наиболее важными. Ранжируя эти соображения, каждый член группы присваивает наиболее важному соображению балл 5, следующему по важности — балл 4 и т.д. Затем в списке соображений напротив каждого из них записываются полученные баллы. После суммирования всех баллов по каждому из соображений высший ранг присваивается набравшему наибольшее количество баллов, следующий ранг — набравшему следующее по величине количество баллов и т.д.

На основе отобранных проектов проводят прогнозы.

Прогнозы представляют собой предсказания о будущем положении дел, составляющиеся на основе практического опыта и теоретических знаний.

Прогнозы подразделяются на краткосрочные, среднесрочные и долгосрочные.

К методам прогнозирования относятся:

- экспертный метод;
- метод рядов динамики;
- корреляционно-регрессионный анализ;
- метод сценариев и т.д.

После завершения всех этапов разрабатывается плановая документация.

3.4.2. ИНВЕСТИЦИОННЫЙ КОНТРОЛЬ

Инвестиционный контроль — это систематически протекающий процесс обработки информации, предназначенный для проверки соответствия плановых величин реальным, полученным в результате завершения тех или иных этапов реализации проекта, анализа выявленных отклонений и выявления результатов управленческих воздействий на инвестиционный объект.

Информация о ходе выполнения проектов содержится в месячных и квартальных финансовых отчетах. Проверка реального хода работ по проекту должна проводиться не реже одного раза в месяц. По результатам контроля принимается решение о продолжении работ, об изменении плана работ и корректировке бизнес-плана, о прекращении проекта.

Часто в результате контроля над осуществлением проекта возникает необходимость в его изменении. *Изменениями проекта* называются замены одних пунктов проекта другими. Они связаны с недостаточной проработкой проекта на начальных этапах и бывают техническими, временными и финансовыми. Причинами их может быть как внутренняя, так и внешняя среда проекта.

Внешними источниками изменений проекта являются инфляция и налоги, развитие науки, техники и технологии, нестабильность в политике, законодательстве, экономике, социальной жизни общества, экологии, международных отношениях.

Внутренними источниками изменений проекта являются противоречия между его участниками и появление более экономичных проектных решений, внедрение новых производственных процессов.

Изменения в проекте увеличивают суммарные затраты на реализацию проекта (по статистики США в среднем до 75%). Затраты существенно увеличиваются по мере продвижения проекта. Финансовые резервы на непредвиденные изменения, связанные с ожидаемым ростом стоимости проекта, создаются на этапе анализа потребностей проекта в финансировании. В больших проектах работу с изменениями проводят специальные подразделения.

При управлении группой проектов создаются корпоративные объединения (холдинги), к которым относятся финансово-промышленные группы, инвестиционные фонды, фонды поддержки бизнеса, крупные промышленные предприятия. Для управления группой проектов разрабатываются компьютерные технологии, позволяющие обеспечить контроль процесса реализации инвестиционных проектов, своевременно информировать руководство холдинга о возникающих проблемах, выработать наиболее эффективные управленческие решения, оценить финансово-экономическую эффективность по каждому проекту, провести анализ рисков проектов путем разработки различных сценариев их реализации, а также ранжирование проектов по различным критериям.

3.4.3. ИНВЕСТИЦИОННЫЙ КОНТРОЛЛИНГ

Слово «контроллинг» с английского переводится как «контроль». Источники, отечественные и зарубежные, понятию «контроллинг» придают различное значение. Например, в это понятие включаются планирование, контроль, получение информации и координирование. Будем так же, как и в [5], под термином «контроллинг» понимать координацию общей системы управления по обеспечению целенаправленного руководства.

Контроллинг обладает следующими функциями:

- формирование и надзор за системами планирования, контроля и информации;
- координация систем планирования, контроля и информации;
- координация систем планирования, контроля и информации с организационной структурой и управлением персоналом;
- консультирование высшего руководства предприятия.

Координация ставится в центр функции контроллинга, поскольку функция координации не выполняется никакой другой системой управления. Планирование и контроль должны координироваться, формироваться и осуществляться при помощи контроллинга, но они не должны превращаться в составные части контроллинга.

В функции инвестиционного контроллинга входят вопросы координации как в рамках отдельного инвестиционного проекта, так и в рамках всего предприятия. Задачей инвестиционного контроллинга является наилучшее распределение средств между отдельными инвестиционными проектами.

Инвестиционный контроллинг координирует инвестиционный проект в рамках инвестиционного планирования и в рамках инвестиционного процесса, координирует предоставление информации для инвестиционного планирования и контроля, интегрирует информацию в инвестиционной сфере в информационную систему всего предприятия, координирует работу руководства с работой персонала предприятия.

3.4.4. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ

Решение — это выбор, который должен сделать руководитель, для достижения поставленной цели. Для принятия решения используется информация, получаемая в результате инвестиционного планирования, инвестиционного контроля и контроллинга. На основе этой информации создается модель принятия решения. ***Модель*** представляет собой упрощенное изображение действительности. По виду отражения реальной действительности модели подразделяются на *математические*, *графические* и *физические*. В экономике рассматриваются только математические модели.

Моделью инвестиционного проекта является набор формул, таблиц, графиков и логических зависимостей между различными элементами инвестиционного проекта.

Рассмотрим пример простой инвестиционной модели при покупке депозитного сертификата. *Депозитный сертификат* — это письменное свидетельство банка по выплате размещенных у него юридическими лицами депозитных вкладов, на основании которого права могут переходить от одного лица к другому. Обозначим: P — номинал сертификата, или цена в момент выпуска; i — объявленная простая ставка наращения; n — срок сертификата в годах. Цена погашения сертификата определяется по формуле простой ставки наращения:

$$S = P(1 + n \cdot i). \qquad \textbf{(3.1)}$$

Пусть в целях получения прибыли инвестор хочет купить депозитный сертификат. Альтернативами решения является покупка сертификата или отказ от покупки. Цена сертификата со сроком погашения 0,5 года составляет 10 000 руб., объявленная простая ставка наращения равна 14,5% годовых. При принятии решения инвестор воспользуется моделью, представленной формулой **(3.1)**. По истечении указанного срока инвестор сможет получить

$$S = 10\ 000(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}145) = 10\ 725 \text{ руб.}$$

Имея этот результат, инвестор принимает решение, т.е. выбирает из двух альтернатив одну. Если результат его устраивает, то сертификат будет куплен, если не устраивает, то покупка отменяется.

Принять решение по инвестированию в депозитный сертификат инвестор может также по другой модели. Для этих целей инвестор оценивает доходность финансовой операции в виде сложной процентной ставки. Это связано с тем, что рыночная доходность финансовых операций, как правило, задается в виде сложных процентных ставок. Модель для определения доходности финансовой операции в виде сложной процентной ставки при заданной доходности в виде простой ставки определяется формулой

$$a = \sqrt[n]{1+ni} - 1,$$

где a — доходность в виде сложной процентной ставки; i — доходность в виде простой ставки.

Для условий рассматриваемого депозитного сертификата имеем

$$a = \sqrt[0,5]{1+0,5\cdot 0,145} - 1 = 0,1503, \text{ или } 15,03\%.$$

Сравнив полученную доходность с рыночной доходностью для ценных бумаг с аналогичным риском, инвестор принимает решение.

Важнейшим элементом модели принятия решений являются альтернативы. Например, ряд инвестиционных проектов, из которых необходимо выбрать только часть. При этом распределение инвестиционных средств между проектами должно быть наилучшим.

Принятие решения зависит во многом от состояния внешней среды, которая входит в модели теории принятия решений. Влияние внешней среды на принятие решений не подвержено влиянию со стороны предприятия. Обычно *к внешним факторам* относят:

- перемены в экономике, т.е. в структуре капитала, технологиях, масштабах производства, конкурентоспособности;
- социальные и демографические изменения;
- ресурсы;
- фискальную (касающуюся государственных финансовых интересов) и налоговую политику;
- структурные макроэкономические изменения;
- цикл деловой активности;
- изменения в технологии и политике в области НИОКР;
- общественную инфраструктуру (транспорт, средства связи, образование, здравоохранение и т.д.);
- развитие трудовых ресурсов;
- неправительственные организации и общественные движения (центры по вопросам эффективности, аналитические и консалтинговые центры).

В общем виде модель принятия решений определяется системой целей модели управления. В моделях математического программирования цели определяются целевыми функциями и наложенными на задачу ограничениями. Функции результативности, построенные по принципу прогнозирования основных результатов, являются основой при принятии решений. При этом результаты могут быть детерминированными или случайными. Обычно случайные процессы имеют несколько возможных результатов.

Упражнения

ТЕСТ 3.1

Какие из приведенных ниже работ проводят на предынвестиционной фазе?

1. Разработка, изготовление и испытание образцов продукции.
2. Составление доклада об инвестиционных возможностях.
3. Приобретение и монтаж оборудования.
4. Разработка технико-экономического обоснования.
5. Выпуск продукции и получение прибыли.
6. Приемка и пуск предприятия.
7. Анализ инвестиционных возможностей.
8. Строительство.
9. Приобретение земли.
10. Набор и обучение персонала.

ТЕСТ 3.2.

Какие из перечисленных ниже функций выполняет контроллинг? Назовите их.

1. Выявление шансов и рисков.
2. Формирование и надзор за системами планирования, контроля и информации.
3. Создание маневра для действий.
4. Снижение степени сложности.
5. Координация систем планирования, контроля и информации.
6. Координация организационной структуры и управления персоналом.
7. Координация потребностей в информации, ее производства и представления.
8. Постановка цели.
9. Содействие при планировании и осуществлении контроля в целях обеспечения их текущей координации.
10. Раннее предупреждение.
11. Информирование и мотивация сотрудников.
12. Консультирование высшего руководства предприятия.

Часть 2

МЕТОДЫ ФИНАНСИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ

Глава 4 ИСТОЧНИКИ И ФОРМЫ ИНВЕСТИЦИЙ

4.1. Типы инвестиций

Источниками инвестиций являются физические лица, предприятия негосударственных форм собственности, государство и его органы, иностранцы. В соответствии с этим инвестиции можно квалифицировать следующим образом:

- частные инвестиции;
- государственные инвестиции;
- иностранные инвестиции;
- совместные инвестиции.

Частные инвестиции — вложение средств гражданами и предприятиями негосударственных форм собственности за счет собственных и заемных средств.

Государственные инвестиции — вложения центральными и местными органами власти и управления за счет средств бюджета, внебюджетных фондов, а также государственными предприятиями и учреждениями за счет собственных и заемных средств.

Иностранные инвестиции — вложения средств иностранными гражданами, юридическими лицами и государствами.

Совместные инвестиции — это вложения средств субъектами данной страны и иностранных государств.

Основными формами финансирования являются:

- собственный капитал;
- заемный капитал.

4.2. Собственный капитал

Собственный капитал предприятия состоит из уставного капитала, резервного фонда и нераспределенной прибыли.

Методы комплектования собственного капитала предприятия во многом определяются формой собственности. Наиболее характерным типом собственного капитала является акционерный капитал.

Акционерным обществом называется общество, уставный капитал которого разделен на определенное число акций, удостоверяющих обязательные права акционеров по отношению к обществу. Участники акционерного общества не отвечают по его обязательствам и несут риск убытков, связанных с деятельностью общества, в пределах стоимости принадлежащих им акций.

Уставный капитал акционерного общества – номинальная стоимость акций общества, приобретенных акционерами.

Акционерные общества могут быть открытыми и закрытыми.

Открытым акционерным обществом называется общество, участники которого могут отчуждать принадлежащие им акции без согласия других акционеров. Такие акционерные общества вправе проводить как закрытую, так и открытую подписку на выпускаемые ими акции и осуществлять их открытую продажу. Открытое акционерное общество обязано ежегодно публиковать для всеобщего сведения годовой отчет, бухгалтерский баланс, отчет о прибылях и убытках. Число акционеров открытого акционерного общества не ограничено. Размер минимального уставного капитала открытого общества должен быть не менее 1000 минимальных размеров оплаты труда.

Закрытым акционерным обществом называется общество, акции которого распределяются только среди его учредителей или иного заранее определенного круга лиц. Такое общество не вправе проводить открытую подписку на выпускаемые им акции. Акционеры закрытого акционерного общества имеют преимущественное право приобретения акций, продаваемых другими акционерами этого общества. Срок осуществления этого права не может быть менее 30 и более 60 дней с момента предложения акций на продажу. Число участников закрытого акционерного общества не должно быть больше 50. В противном случае оно в течение года подлежит преобразованию в открытое акционерное общество. Размер минимального уставного капитала закрытого акционерного общества должен быть не менее 100 минимальных размеров оплаты труда.

Акция — это эмиссионная ценная бумага, закрепляющая право ее владельца на получение части прибыли акционерного общества в виде дивидендов, на участие в управлении акционерным обществом и на часть имущества, оставшегося после его ликвидации. Акция является бессрочной ценной бумагой, и акционерное общество не обязано ее выкупать.

Различают акции привилегированные и обыкновенные. *Привилегированные* акции приносят, как правило, постоянный доход (дивиденд) и имеют преимущества перед обыкновенными при распределении прибыли и ликвидационной выручки акционерного общества. Привилегированные акции не дают права в управлении, за исключением вопросов по решению о невыплате дивидендов по этим акциям и вопросов, касающихся имущественных интересов владельцев этих акций, например вопросов о реорганизации и ликвидации акционерного общества. *Обыкновенные акции* дают право на участие в управлении, и их владельцы участвуют в распределении чистой прибыли после пополнения резервов и выплаты дивидендов по привилегированным акциям.

Важнейшей характеристикой акции является ее ***номинальная цена***, т.е. цена, указанная на бланке акции. Номинальная цена всех обыкновенных акций данного акционерного общества должна быть одинаковой. Одинаковой также должна быть номинальная цена привилегированных акций одного типа. Номинальная цена акций обычно не совпадает с их рыночной стоимостью.

Собрание акционеров может принять решение о дроблении акций. ***Дробление акций*** представляет собой обмен одной акции на две или более акций. Причем номинальная цена акции делится в соответствующие число раз. Например, если одна акция номинальной стоимостью 1500 руб. заменяется тремя, то номинальная стоимость новой акции будет равна 500 руб. При этом размер капитала инвесторов не изменяется.

Контрольным пакетом акций называется пакет, в который входят 50% всех акций плюс одна акция.

Стоимость акции при покупке контрольного пакета больше стоимости отдельно покупаемой акции на величину премии. Стоимость контрольного пакета зависит также от ликвидности акций.

Если пакет не является контрольным, то его цена определяется по формуле

$$P = \frac{S}{Q} \cdot q ,$$

где S — рыночная стоимость оцениваемого предприятия; Q — число выпущенных предприятием акций, за исключением акций, не размещенных на рынке; q — число акций в пакете.

Премия за контрольный пакет связана с тем, что ее владелец может влиять на капитал предприятия и его доходы. Это влияние связано со следующими возможностями:

- проведением трансфертных сделок по трансфертным ценам (по трансфертным ценам обмениваются активы предприятия и продукты между отделениями и филиалами, например, при передаче актива или продукта через границу трансфертные цены могут быть установлены таким образом, что бóльшую часть прибыли фирма будет получать в странах с низким уровнем налогообложения);
- завышением своей заработной платы, если инвестор является наемным работником предприятия или инвестор контролирует предприятие через третье лицо;
- получением в удобный для себя момент свободного от долгов остатка имущества предприятия при добровольной ликвидации предприятия по настоянию контролирующего его инвестора;

- решением вопроса продажи в удобное для себя время либо сдачи в аренду нефункционирующих активов предприятия в ущерб объему операций предприятия.

Премия за контрольный пакет акций зависит от метода оценки бизнеса.

Если приобретается контрольный пакет акций бизнеса, то согласно международной статистике его цена увеличивается на 30—40% расчетной цены.

Премия за ликвидность следует из возможности продажи акций в тот момент, когда удобно владельцу контрольного пакета.

Реинвестированной частью прибыли является та часть чистой прибыли, которая направляется на инвестиции после всех выплат, оговоренных законом.

Прежде всего, из чистой прибыли должны быть выплачены проценты по кредитам и сами кредиты в случае наступления сроков платежей. Затем выплачиваются:

- проценты и основной долг по облигациям;
- дивиденды по привилегированным и обыкновенным акциям;
- нормативные отчисления.

4.3. Венчурный капитал

Венчурный капитал — особый вид собственного капитала, используемого для продвижения на рынок научно-технических нововведений, связанных с повышенным риском [1]. Венчурный капитал широко использовался при разработках и продвижении на рынок микроэлектроники, вычислительной техники, систем автоматизации и т.д. Поэтому правительства всех развитых стран поддерживают и внедряют в практику механизмы венчурного финансирования. В 1990-х годах в развитых странах наблюдался бум венчурного финансирования. Например, в США венчурное финансирование в конце последнего десятилетия XX в. превысило 100 млрд долл. в год [1]. В начале XXI в. венчурное финансирование пошло на убыль. Возможно, это связано с тем, что в развитии мировой экономики наступил новый *цикл Кондратьева.* В соответствии с моделью Кондратьева бум цикла закончился и началась рецессия. Известно, что при спаде вложения в инновационные проекты уменьшаются.

Специфика рискового предпринимательства заключается, прежде всего, в том, что средства предоставляются на безвозвратной, беспроцентной основе. Переданные в распоряжение венчурной фирмы ресурсы не подлежат изъятию. Единственным залогом служит только доля акций, выделяемая инвестору венчурной фирмой. Таким образом, с самого начала допускается возможность потери средств, вложенных в проект. Прибыль определяется разностью между курсовой стоимостью акций и суммой вложенных в проект средств. Другой особенностью венчурного механизма финансирования является значительный период ввода объекта инвестирования в строй, он может достигать десяти лет.

Инвесторами венчурного капитала могут выступать фирмы, специализирующиеся на венчурном капитале, крупные промышленные компании, частные лица.

Венчурные специализированные фирмы для реализации научных разработок создают ученые-исследователи, инженеры, новаторы. В работе [6] утверждается, что в США только 20—30% венчурных инвестиций первого этапа имеют успех и только 10% способны принести существенную прибыль.

Как показывает опыт, в развитии венчурного финансирования заинтересованы государственные органы всех развитых стран. При этом используются как косвенные, так и прямые методы воздействия на венчурный механизм финансирования.

Косвенные методы воздействия государства на венчурное финансирование предполагают развитие экономических рычагов. К таким рычагам относят создание благоприятного режима налогообложения, специализированных государственных программ обучения венчурных бизнесменов, специальных фондовых бирж венчурных акций (это содействует повышению их ликвидности).

Прямые методы воздействия предусматривают непосредственное участие государства в венчурном финансировании.

Рентабельностью венчурных инвестиций называется отношение суммы средств инвестора, полученной им после продажи акций, к вложенной в проект сумме инвестиций:

$$U = \frac{S}{P},$$

где U — рентабельность инвестиций; S — сумма средств инвестора, полученная им после продажи акций; P — сумма вложенных в проект инвестиций.

Доходность инвестора рассчитывается по формуле

$$r = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1,$$

где r — годовая доходность инвестора; n — срок (в годах) от момента вложения инвестиций в проект до момента получения дохода.

В России в последнее время также наметились тенденции к развитию венчурного финансирования. Эти тенденции связаны прежде всего с более активной государственной позицией в этом вопросе.

4.4. Формы долгового финансирования

К заемному финансированию относят:

- краткосрочные и долгосрочные ссуды;
- товарный кредит;
- облигации;
- лизинг;
- ипотеку.

4.4.1. КРАТКОСРОЧНЫЕ И ДОЛГОСРОЧНЫЕ ССУДЫ

Заемные средства получить довольно легко для хорошо обоснованного бизнес-плана. *К краткосрочным финансовым обязательствам* относятся все виды краткосрочного заемного капитала со сроком его использования до одного года. Основными формами этих обязательств являются краткосрочные кредиты банков и краткосрочные заемные средства, например кредиты поставщика (кредит, предоставляемый в товарной форме продавцами покупателям в виде отсрочки платежа за проданные товары).

Потребность в привлечении заемных средств и оценка их эффективного использования определяются в процессе аналитических исследований.

Краткосрочные ссуды можно получить у коммерческих банков и местных финансовых организаций. Они предоставляются в счет имущественных залогов. Обычно краткосрочные ссуды покрывают 50—80% товарно-материальных запасов (проценты устанавливаются банками), а остальные 20—50% должны финансироваться из других источников.

Основные цели привлечения заемных средств:

1) *пополнение необходимого объема оборотного капитала*. Это связано с тем, что многие организации не имеют возможности финансировать полностью оборотный капитал за счет собственных средств. Для повышения эффективности использования оборотных средств эти средства необходимо минимизировать;

2) *формирование недостающей части инвестиционных ресурсов*. Заемные средства в этом случае привлекаются для ускорения реализации отдельных проектов или изменений проектов. Изменения в проекте увеличивают суммарные затраты на реализацию проекта (в США в среднем до 75%). Затраты существенно увеличиваются по мере продвижения проекта. Финансовые резервы на непредвиденные изменения, связанные с ожидаемым ростом стоимости проекта, создаются на этапе анализа потребностей проекта в финансировании. Обычно эти резервы не превышают 15—20%. Эти резервы могут быть заложены в виде краткосрочных кредитов.

Долгосрочные ссуды обычно получают у национальных или международных финансовых организаций развития. *К долгосрочным фи-*

нансовым обязательствам относятся все виды заемного капитала со сроком его использования более одного года. Капитал, формируемый за счет долгосрочных кредитов, может быть использован для финансирования инвестиционных проектов.

Банковский кредит предоставляется в следующих основных формах.

1. *Банковский* (*необеспеченный*) *кредит*. Как правило, такой кредит предоставляется коммерческим банком, осуществляющим расчетно-кассовое обслуживание организации. Формально этот кредит носит необеспеченный характер, но фактически обеспечивается размером дебиторской задолженности организации и ее средствами на расчетном и других счетах в этом же банке. Кроме того, этот вид кредита является самоликвидирующимся, так как проведенная с его использованием хозяйственная операция генерирует при ее завершении денежный поток, достаточный для полного погашения данного кредита.

2. *Сезонный кредит с ежемесячной амортизацией долга*. Этот кредит предоставляется обычно на формирование переменной части оборотного капитала на период сезонного роста потребностей в средствах. Проценты и основной долг (амортизация) по такому кредиту выплачиваются ежемесячно.

3. *Кредитная линия*. В договоре открытия кредитной линии оговариваются сроки, условия и предельная сумма кредита. Такой кредит выдается тогда, когда в нем возникает потребность. Банк устанавливает комиссионный процент за свои финансовые обязательства по предоставлению кредита в объеме неиспользованного лимита кредитной линии. Обычно кредитная линия открывается на срок до одного года.

4. *Онкольный кредит*. Такой кредит предоставляется без указания срока использования, но с обязательством погасить такой кредит по первому требованию кредитора. Для погашения кредита обычно предоставляется льготный период (по действующей практике — до трех дней).

5. *Ломбардный кредит*. Этот кредит выдается под заклад высоколиквидных активов (векселей, ГКО и др.), которые на период кредитования передаются банку. Размер кредита соответствует только части стоимости переданных в заклад активов.

4.4.2. ТОВАРНЫЙ КРЕДИТ

Товарный, или ***коммерческий***, ***кредит*** — это кредит, предоставляемый в товарной форме продавцами покупателям в виде отсрочки платежа за проданные товары.

Этот кредит носит целевой характер. Виды товарного кредита определяются сложившейся хозяйственной практикой, т.е. структурой закупок, их периодичностью, сложившимися связями.

Важнейшей задачей финансового менеджера, занимающегося товарным кредитом, является совершенствование видов кредита в целях увеличения сроков кредитования и уменьшения его стоимости, что при условии правильной работы менеджера может быть более выгодной финансовой операцией для предприятия, чем банковский кредит. Это достигается за счет расширения сферы деятельности с существующими кредиторами и за счет привлечения новых, более выгодных кредиторов.

Товарный кредит подразделяется на следующие основные виды [2].

1. *Товарный кредит с отсрочкой платежа по условиям контракта.* Этот кредит предоставляется на основе контракта на поставку товара и не требует других документов.

2. *Товарный кредит с оформлением задолженности векселем.* Используются простые и переводные векселя.

3. *Товарный кредит по открытому счету.* Используется, как правило, при работе с постоянными поставщиками. Этот поставщик относит платежи по товарному кредиту на дебет счета, открытого предприятию-должнику. Предприятие-должник погашает свою задолженность в оговоренные контрактом сроки.

4. *Товарный кредит в форме консигнации.* Этот кредит представляет собой внешнеэкономическую операцию. Поставщик поставляет свою продукцию на склад торгового предприятия с поручением реализовать ее. Расчет осуществляется после реализации товара.

Товарный кредит имеет ряд преимуществ.

1. Товарный кредит позволяет финансировать наименее ликвидную часть оборотного капитала (запасы).

2. Товарный кредит позволяет избежать привлечения других видов кредитования при сезонных колебаниях оборотного капитала.

3. В товарном кредите заинтересованы как потребители, так и кредиторы.

4.4.3. ОБЛИГАЦИИ

Облигация — срочная ценная долговая бумага, удостоверяющая отношение займа между ее владельцем и эмитентом. Платежи по облигациям осуществляются эмитентом перед платежами по акциям.

Корпоративная облигация — ценная бумага, удостоверяющая право владельца требовать ее погашения в установленные сроки. Облигация может выпускаться под залог имущества, под обеспечение третьих лиц и без обеспечения, но только на третий год после учреждения акционерного общества и после двух лет его безупречной работы. Сумма номиналов выпущенных облигаций не должна превышать уставный капитал или величину предоставленного обеспечения.

Облигации могут быть *именными* и *на предъявителя*. При выпуске именных облигаций акционерному обществу следует позаботиться о ведении реестра их владельцев. При наступлении срока погашения облигации оплачиваются деньгами или иным имуществом сериями или единовременно.

При ликвидации акционерного общества на первом этапе происходит выплата денежных средств кредиторам, к которым относятся также владельцы облигаций. На втором этапе после удовлетворения требований кредиторов удовлетворяются требования акционеров.

Проценты по облигациям должны выплачиваться независимо от результатов хозяйственной деятельности общества. Дивиденды по акциям могут не выплачиваться вовсе.

Большое распространение получили также государственные облигации. ***Государственные ценные бумаги*** являются финансовыми инструментами, обслуживающими государственный внутренний долг, представляющими собой облигации и векселя Министерства финансов РФ. Рынок ценных государственных бумаг является исключительно важным элементом экономической структуры страны с рыночной экономикой. Для государства он представляет собой механизм привлечения инвестиционных ресурсов, а для инвесторов является выгодным направлением вложения денежных средств.

Ценными федеральными государственными бумагами признаются бумаги, выпущенные от имени Российской Федерации. Денежные средства, привлекаемые в результате размещения ценных государственных бумаг, и порядок их расходования определяются федеральными законами и законами субъектов Российской Федерации.

Эмитентом на рынке ценных государственных бумаг выступает государство в лице Министерства финансов РФ. Первичное размещение и погашение ценных бумаг осуществляются Центральным банком РФ по поручению Министерства финансов РФ.

Инвестором на рынке ценных государственных бумаг может быть любое юридическое или физическое лицо, резиденты и нерезиденты.

Контролирующим органом на рынке ценных государственных бумаг является Центральный банк РФ.

Существенную долю в структуре внутреннего государственного долга занимают государственные краткосрочные облигации (ГКО) и облигации федерального займа (ОФЗ), которые используются для покрытия дефицита федерального бюджета.

Значительное развитие среди ценных государственных бумаг получил сегмент рынка, связанный с обращением государственных краткосрочных бескупонных облигаций. Эти облигации выпускаются в обращение как ценные именные государственные бумаги. Размещение ГКО происходит с дисконтом, а погашение осуществляется в безналичной форме по номинальной стоимости.

Облигации государственного федерального займа с переменным купонным доходом (ОФЗ-ПК) являются именными государственными ценными бумагами и выпускаются в бездокументарной форме. Владелец облигации имеет право на получение номинальной стоимости и на купонный доход при погашении выпуска. Поэтому рыночная стоимость ОФЗ-ПК определяется номинальной стоимостью облигации и накопленным купонным доходом.

Облигации государственного федерального займа с постоянным купонным доходом (ОФЗ-ПД) являются ценными именными государственными бумагами. Номинальная стоимость облигации равна 1000 руб.

Облигации государственного сберегательного займа (ОГСЗ) предназначены для активного привлечения средств населения в российскую экономику. ГКО и ОФЗ с переменным купоном предназначены для физических и юридических лиц. Однако в силу специфики их выпуска и обращения участие физических лиц в операциях с этими ценными бумагами весьма затруднительно. Это связано с тем, что облигации выпущены в обращение в бездокументарной форме, их учет ведется в специализированном депозитарии, операции купли-продажи ценных бумаг проводятся только через биржевые торги, к участию в которых допущены уполномоченные дилеры, а дилеру выгодно работать только с крупными суммами. Поэтому для частных лиц выпущены ОГСЗ с номинальной стоимостью 500 руб. Облигации выпускаются в документарной форме со сроком обращения 1—2 года и регулярной выплатой дохода по купонам. Реализация облигаций осуществляется через уполномоченные банки, которым эмитент продает выпущенные облигации на аукционе. С ОГСЗ можно совершать сделки купли-продажи в течение срока их обращения.

Основные характеристики облигаций:

- номинальная цена (номинал) напечатана на самой облигации и обозначает сумму, которая берется взаймы и подлежит возврату по истечении срока займа;
- выкупная цена или правило ее определения, если она отличается от номинала;
- дата погашения;
- купонная процентная ставка;
- дата выплаты по купонам.

По отношению к конкретной облигации аналитические компании формируют рейтинг. В США считаются надежными рейтинги, полученные, например, компанией «Standard & Poor's». *Рейтинги облигаций* этой компании имеют следующие о б о з н а ч е н и я:

AAA — высший;
AA — очень высокий;
A — высокий;
BBB — приемлемый;
BB — немного спекулятивный;
B — спекулятивный;
CCC — ненадежный;
CC — высокоспекулятивный;
C — проценты не выплачиваются;
D — банкротство.

4.4.4. ЛИЗИНГ

Слово «лизинг» в переводе с английского языка означает *аренда*. По договору лизинга обычно предусматривается первоначальный платеж и ежегодная арендная плата. Лизинг может оказаться выгоднее, нежели покупка нового оборудования или техники.

Субъектами лизинга являются лизингодатель, лизингополучатель и продавец. Субъектами лизинга могут быть как резиденты, так и нерезиденты РФ.

При лизинге право собственности на предмет аренды сохраняется за арендодателем, а лизингополучатель приобретает лишь право на его временное использование. По истечении срока лизингового договора лизингополучатель может приобрести объект сделки по согласованной цене, продлить лизинговый договор или вернуть оборудование владельцу.

Предмет лизинга учитывается на балансе лизингодателя или лизингополучателя по взаимному соглашению сторон. Амортизационные отчисления производит балансодержатель.

Лизинговые операции можно разбить на д в а в и д а.

Финансовый лизинг — договор, предусматривающий выплату лизингополучателем сумм, покрывающих полностью амортизацию оборудования или бóльшую ее часть, дополнительные издержки и прибыль лизингодателя. Срок договора такого лизинга приравнивается к сроку службы оборудования.

Операционный лизинг — это договор со сроком, меньшим амортизационного периода имущества. По окончании договора лизингополучатель может продлить срок договора на более выгодных условиях, вернуть оборудование лизингодателю, купить оборудование.

Обычно предмет лизинга передается вместе со всеми принадлежностями и документацией. Лизингополучатель за свой счет осуществляет техническое обслуживание оборудования, обеспечивает его сохранность и осуществляет капитальный и текущий ремонт.

Закон РФ «О финансовой аренде (лизинге)» от 29 октября 1998 г. №164-ФЗ с изменениями от 24 декабря 2002 г. не требует обязательного страхования предмета лизинга. Однако на практике обязательным условием является страхование оборудования лизингополучателем в пользу лизингодателя на срок с момента поставки оборудования до окончания договора. В отдельных случаях лизингополучатель является как страхователем, так и выгодополучателем. Страхователем может выступать также и лизингодатель.

Коммерческий риск лизингодателя, т.е. риск неполучения лизинговых платежей, может быть застрахован лизингодателем либо за свой счет, либо за счет лизингополучателя.

Лизингополучатель обязан страховать также ответственность за причинение вреда жизни, здоровью или имуществу других лиц и окружающей среде в случае аварии.

Преимущества лизинга для лизингодателя:

1) лизинг в отличие от кредита снижает риск невозврата средств, так как лизингодержатель остается собственником имущества;

2) договор лизинга позволяет выбрать наиболее удобную для обеих сторон схему выплат.

Преимущества лизинга для лизингополучателя:

1) обновление производственных фондов может произойти без финансового напряжения, так как в договоре лизинга могут отсутствовать немедленные платежи;

2) так как имущество берется во временное пользование, то риск морального и физического устаревания имущества существенно снижается;

3) лизинговое имущество не ставится на баланс лизингополучателя и поэтому не облагается налогом на имущество;

4) лизинговые платежи относятся на себестоимость выпускаемой продукции, поэтому на них действует правило налоговой защиты, уменьшающей эффективную ставку платежей. Это же правило действует и на платежи за некоторые кредиты. Преимущества по лизинговым и кредитным платежам зависят от существующего законодательства и типа платежей и должны быть исследованы в каждом отдельном случае.

4.4.5. ИПОТЕЧНОЕ КРЕДИТОВАНИЕ

Ипотека — это заем под залог недвижимости. Этот заем погашается заемщиком серией платежей. Стороны, участвующие в ипотечном кредитовании, называют залогодателем, или заемщиком, и залогодержателем, или кредитором.

Предметом ипотеки может быть не только недвижимость, но и право на недвижимость. При этом недвижимость или право на нее остается во владении залогодателя.

Как правило, ипотечный кредит выдается на долгосрочной основе для приобретения имущества, выступающего в качестве залога, например жилой квартиры.

Права залогодержателя по обеспеченному ипотекой обязательству и по договору об ипотеке могут быть удостоверены закладной.

Закладная является ценной именной бумагой. Закладная составляется залогодателем. Если залогодатель является третьим лицом, то также и должником.

В закладной должно быть указано имя залогодателя и его место жительства. Если залогодатель является юридическим лицом, то указывается место его нахождения. Если должник не является залогодателем, то в закладной необходимо указать имя этого должника и его место жительства или нахождения.

В закладной указывается также сумма долга, процентная ставка ипотеки, схема выплат со сроками и величинами платежей, название залогового имущества и его денежная оценка.

Ипотечные ссуды выдаются специальными ипотечными банками. В настоящее время в России внедряется практика ипотечного кредитования в целях покупки жилья. Например, по условиям некоторых банков заемщик оплачивает 30% стоимости жилья, а остальные 70% он покрывает ипотечным кредитом на 10 лет по ставке 10% годовых в валюте. Долг погашается равными суммами, например, раз в месяц.

При расчете характеристик ипотечного кредита используются *принципы финансовой эквивалентности платежей.* Так, например, стоимость залоговой недвижимости должна быть равна величине кредита плюс собственные средства заемщика, вложенные в эту недвижимость:

$$A = K + C\,, \tag{4.1}$$

где A — стоимость недвижимости; K — сумма ипотечного кредита; C — собственный капитал заемщика, вложенный в недвижимость.

Остальные инвестиционные характеристики кредита определяются так же, как типовые характеристики платежей, изложенные в гл. 2.

Рассмотрим, например, как *определить доходность собственного капитала инвестора в недвижимость* для следующих условий ипотечного кредита:

A — стоимость недвижимости, руб.,

C — собственный капитал заемщика, руб.,

K — сумма ипотечного кредита, руб.,

R — годовой доход кредитора, постоянные выплаты (один раз в конце года), определяемые соотношением

$$R = \frac{K}{a_{n;i}}\,,$$

где $a_{n;i}$ — коэффициент приведения годовой ренты; n — срок кредита, годы; i — годовая процентная ставка кредита.

Будем считать, что временной период, когда инвестор получает доход от недвижимости, очень большой. Тогда можно положить, что $n \to \infty$, т.е. имеет место вечная рента.

Для приведенных условий найдем доходность кредитора и инвестора.

Доходность кредитора равна годовой процентной ставке кредита i.

Найдем *доходность инвестора.* Его доход за первые n лет (срок кредита) равен разности получаемых от инвестиций годовых доходов и годовыми доходами кредитора, т.е. $P-R$. Все последующие выплаты от инвестиций принадлежат инвестору. Поэтому уравнение для доходности собственного капитала инвестора приобретает вид

$$C=\sum_{t=1}^{n}\frac{P-R}{(1+r)^t}+\sum_{t=n+1}^{\infty}\frac{P}{(1+r)^t}=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{P}{(1+r)^t}-\sum_{t=1}^{n}\frac{R}{(1+r)^t},$$

где P — годовой доход, приносимый недвижимостью, руб.; r — доходность инвестора.

Используя формулы для суммы геометрической прогрессии, получим

$$C=\frac{P}{r}-\frac{K}{a_{n;i}}\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Введем следующие связи выплат, приведенных в **(4.2)**, со стоимостью недвижимости: $C=c\cdot A,\quad P=p\cdot A,\quad K=k\cdot A.$ Тогда полученное уравнение можно записать в виде

$$\frac{p}{r}-\frac{k}{a_{n;i}}\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}-c=0. \qquad \textbf{(4.3)}$$

Решив полученные уравнения относительно r, найдем доходность инвестора.

■ **Пример 4.1.** Ипотечный кредит получен на пять лет. Ставка кредита равна 12%. На сумму кредита и собственные средства, которые составляют 25% стоимости недвижимости, инвестор приобрел эту недвижимость. Недвижимость приносит ежегодный доход, равный 15% (10%) ее стоимости.

Определить доходность собственного капитала инвестора.

Решение.

Коэффициент приведения ренты равен

$$a_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{1-1{,}12^{-5}}{0{,}12}=3{,}6047762.$$

Вариант 1. Уравнение для доходности кредита можно записать в виде

$$\frac{0{,}15}{r}-\frac{0{,}75}{3{,}6047762}\cdot\frac{1-(1+r)^{-5}}{r}-0{,}25=0.$$

Решить это уравнение можно методом Ньютона—Рафсона или графическим методом. Его решение $r=0{,}1615$.

Вариант 2. Уравнение для доходности инвестора имеет вид

$$\frac{0,1}{r}-\frac{0,75}{3,6047762}\cdot\frac{1-(1+r)^{-5}}{r}-0,25=0.$$

Его решение: $r=0,0954$.

Таким образом, доходность собственного капитала инвестора в первом варианте составит 16,15% годовых, а во втором варианте — 9,54% годовых. □

Мы рассмотрели случай определения доходности без учета инфляции. Такая доходность называется *брутто-доходностью*. Если учесть инфляцию, то уравнение для доходности инвестора надо записать в виде

$$C=\sum_{t=1}^{n}\frac{P-R}{\bar{I}_p^t(1+a)^t}+\sum_{t=n+1}^{\infty}\frac{P}{\bar{I}_p^t(1+a)^t}=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{P}{\left[\bar{I}_p(1+a)\right]^t}-\sum_{t=1}^{n}\frac{R}{\left[\bar{I}_p(1+a)\right]^t},$$

где a — чистая доходность, очищенная от инфляции; $\bar{I}_p=1+\bar{H}$ — среднегодовой индекс цен; $\bar{H}$ — среднегодовой темп прироста инфляции.

После суммирования, получим

$$C=\frac{P}{a+\bar{H}+r\bar{H}}-R\cdot\frac{1-\left(1+a+\bar{H}+a\bar{H}\right)^{-n}}{a+\bar{H}+r\bar{H}}.$$

Решив это уравнение относительно $a+\bar{H}+r\bar{H}$, определяют при известном значении $\bar{H}$ чистую доходность. При выполнении условий $a<<1$ и $\bar{H}<<1$ это уравнение приобретает вид

$$A=\frac{P}{a+\bar{H}}-R\cdot\frac{1-\left(1+a+\bar{H}\right)^{-n}}{a+\bar{H}}.$$

В этом случае брутто-доходность и чистая доходность связаны простым соотношением:

$$r\approx a+\bar{H}.$$

■ **Пример 4.2.** Для условий примера 4.1 определить чистую доходность кредитора и собственного капитала инвестора при среднегодовом темпе прироста инфляции, равном 10%.

Решение.

Чистая доходность кредитора

$$a\approx i-\bar{H}=12-10=2\%.$$

Чистая доходность собственного капитала инвестора в первом варианте равна 16,15 − 10 = 6,15%, а во втором варианте — 9,54 − 10 = −0,46%.

Таким образом, доходность кредитора равна 2% годовых. Инвестор же в первом варианте получит годовую доходность на свой капитал, равную 6,15% годовых, а во втором варианте он понесет убытки, равные −0,46% годовых. □

■ **Пример 4.3.** Стоимость залоговой недвижимости, на создание которой инвестируются собственные средства и ипотечный кредит, составляет 10 млн руб. На ее создание инвестор потратил 2,5 млн руб. собственных средств. По договору ипотечного кредита выплаты основного долга и процентов осуществляются равными платежами раз в квартал в течение шести лет. Процентная ставка кредита равна 14% годовых.

Определить величину разовых выплат.

Решение.

Величину ипотечного кредита находим по формуле **(4.1)**:

$$K = A - C = 10 - 2{,}5 = 7{,}5 \text{ млн руб.}$$

Годовые выплаты находят по второй формуле **(2.56)**, которую для рассматриваемого случая можно записать в виде

$$R = \frac{K}{a_{n;i}^{(p)}},$$

где множитель приведения ренты определяется соотношением

$$a_{n,i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}.$$

Подставив данные примера в эти формулы, получим

$$a_{6,14}^{(4)} = \frac{1-(1+0{,}14)^{-6}}{4\cdot\left[(1+0{,}14)^{1/4}-1\right]} = 4{,}08725132;$$

$$R = \frac{7\ 500\ 000}{4{,}08725132} = 1\ 834\ 974{,}02.$$

Квартальная выплата будет равна

$$M = \frac{R}{p} = \frac{1\ 834\ 974{,}02}{4} = 458\ 743{,}51 \text{ руб.}$$

Таким образом, для того чтобы расплатиться с кредитором, инвестор 24 раза с интервалом в квартал должен будет выплачивать по 458 743,51 руб. □

Упражнения

ТЕСТ 4.1

Какие из приведенных ниже высказываний относятся к формам финансирования, а какие к источникам финансирования?

1. Краткосрочные ссуды.
2. Физические лица.
3. Долгосрочные ссуды.
4. Предприятия негосударственных форм собственности.
5. Обыкновенные акции.
6. Иностранцы.
7. Венчурный капитал.
8. Государство и его органы.
9. Кредиты поставщика.
10. Облигации.

ЗАДАЧИ

4.1. Венчурный инвестор вложил в проект 150 тыс. руб. По прошествии шести лет инвестор продал акции венчурной фирмы за 9 млн руб. Определить рентабельность инвестиций и доходность инвестора.

4.2. Стоимость залоговой недвижимости, на создание которой инвестируются ипотечный кредит и собственный капитал, составляет 10 млн руб. Собственный капитал составляет 9% стоимости недвижимости. По договору ипотечного кредита процентная ставка кредита принята равной 10% годовых. Срок этого кредита при выплате равными ежегодными платежами равен шести годам. Доход, который недвижимость ежегодно будет приносить инвестору в течение шести лет, равен 2,3 млн руб. (2,4 млн руб.). Определить доходность кредитора и инвестора. Провести анализ для среднегодового темпа инфляции, равного 8%.

Глава 5 СТОИМОСТЬ КАПИТАЛА И ЕГО СТРУКТУРА

5.1. Определение стоимости капитала

Стоимость капитала — это эффективная процентная ставка, по которой начисляются проценты на полученную сумму. Стоимости капиталов, привлекаемых из различных источников, отличаются друг от друга. Задача финансового менеджера состоит в правильном выборе источников финансирования. Он должен сформировать структуру капитала наилучшим образом. Ниже рассмотрены методы определения стоимости основных источников капитала и методы его формирования.

Стоимость капитала является стоимостью средств, привлекаемых для финансирования инвестиционного проекта. Использование в качестве капитала инвестиционного проекта собственной чистой прибыли предприятия не влечет никаких платежей. Поэтому, казалось бы, этот капитал ничего не стоит. Однако такое перераспределение чистой прибыли приводит к потерям определенных возможностей собственников предприятия, например акционеров. Поэтому цена собственного капитала не равна нулю. Цена собственного функционирующего капитала равна норме прибыли этого капитала и может быть определена по формуле

$$r_{\text{СК}} = \frac{\text{П}}{\text{С}},$$

где П — прибыль, полученная за счет функционирования собственного капитала за исследуемый период; С — сумма функционирующего собственного капитала в исследуемом периоде.

Особые требования на стоимость капитала накладывает неопределенность, в которой функционируют реальные инвестиционные проекты. Условия неопределенности создают основные проблемы при определении стоимости капитала. Эта стоимость существенным образом зависит от степени риска инвестиционного проекта. С увеличением риска стоимость капитала увеличивается на величину, равную премии за риск. Эта премия растет с увеличением степени риска.

5.2. Стоимость акционерного капитала

Стоимость капитала, полученного с помощью обыкновенной акции, находится из формулы для ее рыночной цены, которая определяется из следующих соображений. Если акция остается у одного владельца, то ее рыночная цена равна современной стоимости всех поступлений этого владельца. При этом первая выплата поступит в конце первого периода. Тогда современная стоимость всех поступлений, равная рыночной цене акции, будет равна

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{(1+r)^j}, \tag{5.1}$$

где P — рыночная цена акции; d_j — дивиденд в периоде под номером j; $j = 1, 2, 3, ...$ — номер периода, например года; r — ставка процента (если период изменяется в годах, то это годовая ставка).

Положим, что дивиденд увеличивается с темпом роста h, т.е. для j-го периода она вычисляется по формуле

$$d_j = d(1+h)^j,$$

где d — величина дивиденда в начале процесса.

Подставив это выражение в формулу **(5.1)**, получим

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} d\left(\frac{1+h}{1+r}\right)^j.$$

Этот ряд сходится при условии $h < r$. В этом случае

$$P = \sum_{j=0}^{\infty} d\left(\frac{1+h}{1+r}\right)^j - d = \frac{d}{1-\dfrac{1+h}{1+r}} - d = d\frac{1+h}{r-h}. \tag{5.2}$$

Решая это уравнение относительно r, найдем стоимость капитала, полученного с помощью обыкновенной акции $r_{\text{ОА}}$, т.е.

$$r_{\text{ОА}} = \frac{d(1+h)}{P} + h, \tag{5.3}$$

где $d(1+h)$ — прогнозируемое значение дивиденда на ближайший период.

Из выражения **(5.3)** легко получить формулу для стоимости капитала, полученного с помощью привилегированной акции $r_{\text{ПА}}$. Для привилегированных акций дивиденд постоянен во времени, поэтому $h = 0$. Тогда

$$r_{\text{ПА}} = d/P. \tag{5.4}$$

■ **Пример 5.1.** АО выплатило на одну акцию дивиденд в размере 5 тыс. руб. Рыночная цена этой акции в момент выплаты дивиденда составляет 42 тыс. руб. Ожидается рост размера дивиденда 5% в год.

Определить стоимость капитала, вложенного в акцию.

Решение:

$$r_{\text{ОА}} = [5(1 + 0{,}05)/42] + 0{,}05 = 0{,}175, \text{ или } 17{,}5\%. \ \square$$

Стоимость вновь привлекаемого акционерного капитала $r_{\text{НК}}$ зависит, с одной стороны, от выплачиваемых акционерам дивидендов, с другой — от стоимости затрат на осуществление новой эмиссии акций:

$$g = \frac{B - D}{B},$$

где B — цена акции, по которой финансовая компания, организующая размещение новой эмиссии, намерена ее продать; D — цена акции, по которой финансовая компания, организующая размещение новой эмиссии, намерена расплатиться с эмитентом.

Если бы затрат на эмиссию не было, то современная стоимость всех дивидендов, выплачиваемых за одну акцию, определялась бы по формуле **(5.2)**.

Однако современная стоимость всех дивидендов с учетом платы за эмиссию равна $P(1-g)$. Эта сумма должна быть равна всем платежам по ставке $r_{\text{НК}}$, которая является стоимостью вновь привлекаемого акционерного капитала, т.е.

$$P(1-g) = \sum_{j=1}^{\infty} d \frac{(1+h)^j}{(1+r_{\text{НК}})^j} = d \frac{1+h}{r_{\text{НК}} - h}.$$

Решая систему из последнего уравнения и уравнения **(5.2)** относительно $r_{\text{НК}}$, найдем

$$r_{\text{НК}} = \frac{r - hg}{1 - g}. \qquad \textbf{(5.5)}$$

■ **Пример 5.2.** АО собирается осуществить новую эмиссию акций. Характеристики ранее эмитированных акций представлены в примере 5.1. Те же доходности инвесторы желают получить по новым акциям. Финансовая компания, организующая размещение новой эмиссии, намерена продать акции по 42 тыс. руб. и расплатиться с АО по 40 тыс. руб. за акцию.

Определить стоимость вновь привлекаемого капитала.

Решение.

Затраты на осуществление эмиссии для АО составят

$$g = \frac{42 - 40}{42} = \frac{1}{21}.$$

Стоимость вновь привлекаемого капитала для АО равна

$$r_{\text{НК}} = \frac{0{,}175 - 0{,}05 \cdot \dfrac{1}{21}}{1 - \dfrac{1}{21}} = 0{,}18125, \text{ или } 18{,}125\%. \quad \square$$

5.3. Налоговая защита платежей

Налоговая защита платежей существенным образом зависит от схемы формирования чистой прибыли, которая является основным показателем в рыночной экономике. Схема формирования чистой прибыли предприятия во многом зависит от законодательства страны. Рассмотрим основные элементы схемы формирования чистой прибыли.

Чистая выручка от реализации равна валовой выручке от реализации (доход от реализации) минус НДС, акцизы, таможенные пошлины.

Валовая прибыль равна чистой выручке от реализации минус себестоимость продукции. В себестоимость входят:

- затраты на сырье, энергию и другие материальные затраты;
- амортизационные отчисления;
- расходы на оплату труда, включая единый социальный налог.

На основе амортизационных отчислений рассчитывается среднегодовая стоимость имущества, являющаяся налоговой базой для налога на имущество.

Прибыль от продаж равна валовой прибыли минус коммерческие и управленческие расходы, включая заработную плату управленческого персонала, промежуточные налоги.

Прибыль до налогообложения равна прибыли от продаж минус внереализационные расходы, куда входят проценты по долговым обязательствам, налог на имущество, резервы, штрафы, пени, неустойки, убытки по операциям прошлых лет, выявленные в отчетном году, потери от стихийных бедствий.

Чистая прибыль равна прибыли до налогообложения минус налог на прибыль. Из чистой прибыли производятся выплаты по кредиту (помимо процентов), облигациям, дивиденды по привилегированным и обыкновенным акциям. Уставный капитал, резервный фонд и нераспределенная прибыль образуют *собственный капитал предприятия*.

Выплата платежа из налогооблагаемой прибыли уменьшает налоговую базу, что приводит к увеличению чистой прибыли по сравнению со случаем выплаты того же платежа из чистой прибыли. Возможность отдельных выплат из налогооблагаемой прибыли называется налоговой защитой. Варианты использования налоговой защиты определяются законом. Например, в соответствии с новым Налоговым кодексом налоговой защите подлежат выплаты процентов по кредиту, если процентная ставка по этому кредиту не превышает ставку рефинансирования Центрального банка РФ, увеличенную в 1,1 раза. Для долговых обязательств в иностранной валюте максимальная ставка равна 15%.

Другим примером налоговой защиты являются выплаты по покупке материалов, комплектующих, оборудования. Все эти затраты относятся на себестоимость продукции. Это также понижает налогооблагаемую базу.

5.4. Стоимость товарного кредита и краткосрочного банковского кредита

При использовании товарного кредита должнику важно оценить его стоимость и сравнить со стоимостью, например, банковского кредита. Стоимость товарного (коммерческого) кредита, предоставляемого в форме краткосрочной отсрочки платежа, может оказаться существенной. Эта стоимость оценивается размером скидки с цены продукции при осуществлении наличного платежа за продукцию. Пусть C — цена продукции; B — скидка с цены продукции при осуществлении наличного платежа; P — выплата за товар при осуществлении наличного платежа.

Рассмотрим два случая.

1. *Выплаты производятся из чистой прибыли.* Например, этот случай справедлив для физического лица, приобретающего товар для своих целей.

2. *Выплаты производятся как из налогооблагаемой прибыли, так и из чистой прибыли.* Например, выплаты процентов по кредиту производятся из налогооблагаемой прибыли, выплаты основного долга по кредиту – из чистой прибыли.

▶ Для первого случая из чистой прибыли в момент совершения сделки может выплачиваться сумма P руб. Если бы выплата проводилась с отсрочкой k дней, то в момент времени после завершения отсрочки *из чистой прибыли* выплачивается сумма C руб. Поскольку сроки финансовой операции меньше года, то для анализа используется простая процентная ставка. Связь между суммами P и C определяется соотношением

$$C = P\left(1 + \frac{k}{K}r\right),$$

где K — временная база, или число дней в году; r — простая годовая процентная ставка.

Из приведенной формулы можно найти простую годовую процентную ставку:

$$r = \left(\frac{C}{P} - 1\right)\cdot\frac{K}{k} = \frac{B}{P}\cdot\frac{K}{k}, \qquad \textbf{(5.6)}$$

где B — скидка с цены продукции при осуществлении наличного платежа.

Процентная ставка r, определяемая по формуле **(5.6)**, может рассматриваться для рассматриваемых условий как доходность кредитора или как цена кредита для должника.

Эту операцию можно сравнить с другой операцией, сравнив их доходности или стоимости. Например, сравним ее со стоимостью банковского кредита. В этом случае должник вместо товарного кредита берет кредит в банке в размере P руб. и покупает товар в момент совершения сделки за P руб. В момент времени после завершения отсрочки из чистой прибыли выплачивается сумма, равная наращенной по простой процентной ставке кредита. Эта сумма определяется по формуле

$$S = P\left(1 + \frac{k}{K}a\right), \qquad \textbf{(5.7)}$$

где S — наращенная в момент времени после завершения отсрочки сумма; a — простая годовая процентная ставка банковского кредита; эта ставка является в данном случае доходностью кредитора и стоимостью капитала для должника.

Процентная ставка банковского кредита определяется банком и является известной величиной. Сравнив ее со стоимостью товарного кредита r, рассчитанного по формуле **(5.6)**, покупатель выбирает ту финансовую операцию, стоимость которой меньше.

■ **Пример 5.3.** Товар стоимостью 100 тыс. руб. при осуществлении наличного платежа продается за 97 тыс. руб. Отсрочка платежа равна одному месяцу. Выплаты проводятся из чистой прибыли.

Определить стоимость товарного кредита и сравнить его с банковским кредитом, имеющим простую ставку кредита, равную 20% годовых.

***Решение*:**

$$r = \frac{3}{97} \cdot \frac{360}{30} = 0{,}3711, \text{ или } 37{,}11\%.$$

Стоимость товарного кредита оказалось выше стоимости банковского кредита. Таким образом, выгоднее взять банковский кредит для немедленной оплаты продукции с соответствующей ценовой скидкой. □

Наиболее интересным случаем для предприятий является отнесение расходов на приобретенный товар на себестоимость. Рассмотрим общий случай, когда выплаты проводятся *из налогооблагаемой* и *из чистой прибыли*. Например, выплаты процентов по банковскому кредиту проводятся из налогооблагаемой прибыли, а основной долг – из чистой прибыли. Рассмотрим несколько вариантов оплаты приобретаемого товара.

▶ *1-й вариант.* Выплата за товар производится из налогооблагаемой прибыли в момент совершения сделки. Покупатель выплачивает P руб. Выплата относится на себестоимость. Если прибыль до налогообложения до покупки была равна A руб., то после покупки эта прибыль будет равна $A - P$ руб. После выплаты налога на прибыль чистая прибыль будет равна

$$\Pi = (A - P)\cdot(1 - g), \tag{5.8}$$

где g — ставка налога на прибыль.

Если бы долг выплачивался из чистой прибыли, то величина чистой прибыли после выплаты долга и налога на прибыль была бы равна

$$\Pi_1 = A\cdot(1 - g) - P. \tag{5.9}$$

Дополнительную прибыль за счет выплаты за товар из налогооблагаемой прибыли получим, вычтя **(5.9)** из **(5.8)**:

$$\Delta\Pi = \Pi - \Pi_1 = Pg.$$

Это эквивалентно тому, что реальная стоимость товара уменьшилась на величину Pg, т.е.

$$P_{\text{реал}} = P - Pg = P(1 - g).$$

■ **Пример 5.4.** Предприятие приобрело комплектующие изделия на сумму 25 000 руб.

Определить реальную стоимость этих изделий при ставке налога на прибыль 20%.

***Решение*:**

$$P_{\text{реал}} = 25\,000(1 - 0,2) = 20\,000 \text{ руб.} \quad \square$$

▶ *2-й вариант*. Выплаты за товар производятся с отсрочкой k дней из налогооблагаемой прибыли. Пусть прибыль до налогообложения равна A руб. После выплаты долга, равного C руб., налогооблагаемая прибыль будет равна $(A - C)$ руб. Чистая прибыль определяется соотношением

$$\Pi = (A - C)\cdot(1 - g), \tag{5.10}$$

где g — ставка налога на прибыль.

Если бы долг выплачивался из чистой прибыли, то величина чистой прибыли после выплаты долга и налога на прибыль была бы равна

$$\Pi_1 = A\cdot(1 - g) - C. \tag{5.11}$$

Сравнивая **(5.8)** и **(5.9)**, видим, что чистая прибыль будет больше на Cg руб. при выплате долга из налогооблагаемой прибыли. Это говорит о том, что стоимость долга при выплате из налогооблагаемой прибыли уменьшится по сравнению со случаем выплаты долга из чистой прибыли.

Стоимость долга при выплате из налогооблагаемой прибыли можно рассчитать, составив уравнение эквивалентности. Для этих целей эквивалентную выплату из чистой прибыли, равную $C(1-g)$, дисконтируем на момент совершения сделки по ставке, равной стоимости долга. Затем приравняем результат дисконтирования величине выплаты для момента совершения сделки, равной P руб. В результате получим

$$P = \frac{C(1-g)}{1+\frac{k}{K}q},$$

где q — стоимость долга.

Отсюда находим стоимость долга:

$$q = \left(\frac{C}{P}(1-g)-1\right)\frac{K}{k} = \left(\frac{B}{P} - \frac{Cg}{P}\right)\frac{K}{k}. \qquad \textbf{(5.12)}$$

Сравнив формулу **(5.12)** с формулой **(5.6)**, видим, что стоимость долга уменьшилась при выплатах из налогооблагаемой прибыли.

■ **Пример 5.5.** Условия примера 5.3.

Определить стоимость товарного кредита при ставке налога на чистую прибыль 20% и для отсрочки платежа, равной одному, трем, шести и двенадцати месяцам.

Решение:

$$q_1 = \left(\frac{3}{97} - \frac{100 \cdot 0,2}{97}\right)\frac{360}{30} = -2,103, \text{ или } -210,3\%;$$

$$q_3 = \left(\frac{3}{97} - \frac{100 \cdot 0,2}{97}\right)\frac{360}{90} = -0,701, \text{ или } -70,1\%;$$

$$q_6 = \left(\frac{3}{97} - \frac{100 \cdot 0,2}{97}\right)\frac{360}{180} = -0,35, \text{ или } -35\%;$$

$$q_{12} = \left(\frac{3}{97} - \frac{100 \cdot 0,2}{97}\right)\frac{360}{360} = -0,175, \text{ или } -17,5\%.$$

Во всех случаях имеем стоимость кредита меньше нуля. Это означает, что должник, взяв кредит, не платит проценты по нему, а получает. Эти проценты тем больше, чем меньше период отсрочки при постоянной скидке с цены продукции. □

▶ *3-й вариант.* Для оплаты долга по товарному кредиту с отсрочкой платежа должник берет банковский кредит. На эти средства должник покупает товар. Пусть сумма кредита равна P руб., простая годовая процентная ставка банковского кредита равна a, а срок кредита равен k дней.

Прибыль до налогообложения равна A руб. После покупки товара за P руб. налогооблагаемая прибыль будет равна $(A-P)$ руб. Чистая прибыль определяется соотношением

$$\Pi = \left(A - P\right) \cdot \left(1 - g\right). \qquad \textbf{(5.13)}$$

Чистая прибыль по сравнению со случаем всех выплат из чистой прибыли увеличилась на Pg руб. Через k дней должник из чистой прибыли выплачивает банку сумму, вычисляемую по формуле **(5.7)**. Если уменьшить эту сумму на Pg руб., то получим реальную выплату должником банку:

$$S_{\text{реал}} = S - Pg = P\left(1 + \frac{k}{K}a - g\right).$$

Стоимость кредита, истраченного на покупку товара, при отнесении затраченной суммы на себестоимость можно рассчитать следующим образом. Реальную выплату банку дисконтируем на момент совершения сделки по ставке, равной стоимости кредита. Затем приравняем результат дисконтирования величине кредита, равной P руб.

$$P = \frac{P\left(1 + \dfrac{k}{K}a - g\right)}{1 + \dfrac{k}{K}s},$$

где s — стоимость кредита.

Из этой формулы найдем стоимость кредита:

$$s = a - \frac{K}{k}g. \qquad \textbf{(5.14)}$$

■ **Пример 5.6.** Для условий примера 5.5 определить стоимость банковского кредита при кредитной ставке 15% годовых.

Решение:

$$s_1 = 15 - \frac{360}{30} \cdot 24 = -273\%; \quad s_1 = 15 - \frac{360}{30} \cdot 20 = -225\%;$$

$$s_1 = 15 - \frac{360}{90} \cdot 24 = -81\%; \quad s_3 = 15 - \frac{360}{90} \cdot 20 = -65\%;$$

$$s_1 = 15 - \frac{360}{180} \cdot 24 = -33\%; \quad s_6 = 15 - \frac{360}{180} \cdot 20 = -25\%;$$

$$s_1 = 15 - \frac{360}{360} \cdot 24 = -9\%. \quad s_{12} = 15 - \frac{360}{360} \cdot 20 = -5\%.$$ □

Таким образом, при выборе товарного или банковского кредита менеджер должен оценить стоимости этих кредитов и выбрать операцию с наименьшей стоимостью.

Упражнения

ТЕСТ 5.1

Предприятие реинвестирует часть чистой прибыли в новый инвестиционный проект. Укажите правильный ответ.

1. Стоимость реинвестированного капитала равна нулю.

2. Стоимость реинвестированного капитала больше нуля.

ТЕСТ 5.2

Налоговая защита платежей определяется выплатами из следующей статьи:

1. Из налогооблагаемой прибыли.

2. Из чистой прибыли.

ЗАДАЧИ

5.1. Стоимость акционерного капитала составляет 20% годовых. Дивиденд на момент оценки равен 52 руб., а рыночная цена акции — 480 руб. Определить ожидаемый годовой темп прироста дивиденда.

5.2. Предприятие планирует приобрести комплектующие изделия на сумму 200 тыс. руб. Поставщик предложил поставить эти изделия с отсрочкой платежа на два месяца. При этом цена комплектующих возрастает до 205 тыс. руб. С другой стороны, для немедленной оплаты можно использовать банковский кредит со сроком два месяца. Ставка кредита равна 20% годовых. Выбрать тип финансовой операции.

Часть 3

ХАРАКТЕРИСТИКИ ДОЛГОВОГО ФИНАНСИРОВАНИЯ

Глава 6 ДОХОДНОСТЬ КРЕДИТА

6.1. Доходность долгосрочной кредитной операции с периодической выплатой процентов

Долгосрочный кредит в размере A выдается на срок n под сложную годовую процентную ставку a. При выдаче ссуды удерживаются комиссионные B. В результате должник получает сумму, равную $A-B$. Проценты выплачиваются p раз в году (p-срочная рента), годовая выплата суммы процентов равна $A \cdot a$, основной долг выплачивается в конце срока. При определении полной доходности финансовой операции кредитора в виде годовой ставки сложных процентов r полагают, что современная стоимость всех выплат по ставке r равна сумме $A-B$, полученной должником, т.е. балансовое уравнение принимает вид

$$A-B=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_1}{(1+r)^j}+\frac{A}{(1+r)^n},$$

где A_1 — стоимость всех выплат за каждый отдельный год, приведенных к концу этого года.

Эта стоимость определяется по формуле

$$A_1=\frac{Aa}{p}(1+r)^{(p-1)/p}+\frac{Aa}{p}(1+r)^{(p-2)/p}+\ldots+\frac{Aa}{p}(1+r)^{1/p}+\frac{Aa}{p}.$$

Знаменатель этой геометрической прогрессии равен $(1+r)^{1/p}$, поэтому

$$A_1=\frac{Aa}{p}\left(\frac{\left((1+r)^{1/p}\right)^p-1}{(1+r)^{1/p}-1}\right)=\frac{Aa}{p}\left(\frac{r}{(1+r)^{1/p}-1}\right).$$

Подставив выражение для A_1 в исходную формулу, найдем

$$A-B=\frac{Aa}{p}\left(\frac{r}{(1+r)^{1/p}-1}\right)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}+\frac{A}{(1+r)^{n}}.$$

Проведя необходимые преобразования и сократив на A, получим

$$1-\frac{B}{A}=a\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+r)^{1/p}-1\right]}+\frac{1}{(1+r)^{n}}=aa_{n;r}^{(p)}+(1+r)^{-n}.$$

Решить это уравнение относительно r можно, например, методом Ньютона—Рафсона. Введем замену $x=1+r$ и преобразуем последнее выражение к виду

$$\left(1-\frac{B}{A}\right)x^{n}-a\frac{x^{n}-1}{p\left[x^{1/p}-1\right]}-1=0.$$

Умножим левую и правую части этого уравнения на $x^{1/p}-1$, тогда

$$\left(1-\frac{B}{A}\right)x^{n}\left(x^{1/p}-1\right)-\frac{a}{p}\left(x^{n}-1\right)-\left(x^{1/p}-1\right)=0.$$

В качестве функции $f(x)$ принимается выражение

$$f(x)=\left(1-\frac{B}{A}\right)x^{n+\frac{1}{p}}-\left(1-\frac{B}{A}+\frac{a}{p}\right)x^{n}-x^{1/p}+1+\frac{a}{p}.$$

Производная от этой функции

$$f'(x)=\left(n+\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{B}{A}\right)x^{n+\frac{1}{p}-1}-n\left(1-\frac{B}{A}+\frac{a}{p}\right)x^{n-1}-\frac{x^{\frac{1}{p}-1}}{p}.$$

■ **Пример 6.1.** Кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на два года по сложной процентной ставке 8% годовых. При выдаче ссуды кредитором были удержаны комиссионные в размере 5 тыс. руб. Проценты выплачиваются раз в полгода.

Определить полную доходность кредитора.

Решение.

Принимаем $x_1=1{,}1$; $B/A=5/100=0{,}05$.

▶ Первая итерация:

$$f(x_1)=(1-0{,}05)\cdot 1{,}1^{2{,}5}-\left(1-0{,}05+\frac{0{,}08}{2}\right)\cdot 1{,}1^{2}-1{,}1^{1/2}+1+\frac{0{,}08}{2}=-0{,}001103;$$

$$f'(x_1)=2{,}5\cdot 0{,}95\cdot 1{,}1^{1{,}5}-2\cdot 0{,}99\cdot 1{,}1-\frac{1{,}1^{-0{,}5}}{2}=0{,}0852817;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}1 - \frac{-0{,}001103}{0{,}0852817} = 1{,}1129336.$$

▶ Вторая итерация:

$$f(x_2) = 0{,}0001655\,;\ \ f'(x_2) = 0{,}110918;$$

$$x_3 = 1{,}1129336 - \frac{0{,}0001655}{0{,}110918} = 1{,}1114415.$$

▶ Третья итерация:

$$f(x_3) = 0{,}0000021;\ \ f'(x_3) = 0{,}10794878;$$

$$x_4 = 1{,}126755 - \frac{0{,}0000815}{0{,}2291641} = 1{,}1263994.$$

Принимаем полную доходность кредитора $r = 11{,}14\%$. □

При выплате процентов раз в году в конце каждого года уравнение для вычисления доходности принимает вид

$$1 - \frac{B}{A} = a\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + \frac{1}{(1+r)^n} = aa_{n;r} + (1+r)^{-n}.$$

Если комиссионные при выдаче кредита, предусматривающего выплату процентов раз в году, не выплачиваются, то полная доходность кредитора *r* равна сложной годовой процентной ставке кредита *a*. Этот вывод легко проверить, подставив в последнюю формулу $B = 0$ и $r = a$. Действительно,

$$1 - \frac{0}{A} = a\frac{1-(1+a)^{-n}}{a} + \frac{1}{(1+a)^n}\text{, т.е. } 1 \equiv 1.$$

6.2. Доходность долгосрочной кредитной операции с равными периодическими расходами по долгу

Долгосрочный кредит в размере *A* выдается на срок *n* под сложную годовую процентную ставку *a*. При выдаче ссуды удерживаются комиссионные *B*. В результате должник получает сумму, равную $A - B$. Проценты и основной долг выплачиваются *p* раз в году в конце периода, причем сумма расходов постоянна. При определении полной доходности финансовой операции кредитора в виде годовой ставки сложных процентов r полагают, что современная стоимость всех выплат по ставке *r* равна сумме $A - B,$ полученной должником, т.е. балансовое уравнение принимает вид

$$A-B=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_1}{(1+r)^j} \quad ,$$

где A_1 — стоимость всех выплат за каждый отдельный год, приведенных к концу этого года.

Формула для вычисления A_1 при ежегодных выплатах, равных R, имеет вид

$$A_1=\frac{R}{p}\left(\frac{r}{(1+r)^{1/p}-1}\right).$$

Подставив выражение для A_1 в исходную формулу, найдем

$$A-B=\frac{R}{p}\frac{1-(1+r)^{-n}}{\left[(1+r)^{1/p}-1\right]}=Ra_{n;r}^{(p)} \, ,$$

где $a_{n;r}^{(p)}=\dfrac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+r)^{1/p}-1\right]}$ — коэффициент приведения *p*-срочной ренты.

С другой стороны, выплаты в конце каждого периода суммы R/p должны погасить задолженность A в конце срока n, т.е. A является современной величиной *p*-срочной ренты с годовой выплатой R и годовой процентной ставкой a. Таким образом, $R=A\big/a_{n;a}^{(p)}$. Подставив это значение в балансовое уравнение, получим

$$1-\frac{B}{A}=\frac{a_{n;r}^{(p)}}{a_{n;a}^{(p)}}.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1-(1+a)^{-n}}{\left[(1+a)^{1/p}-1\right]}=\frac{1-(1+r)^{-n}}{\left[(1+r)^{1/p}-1\right]}.$$

При решении этого уравнения относительно *r* введем, как и прежде, замену $x=1+r$, $\left(1-\dfrac{B}{A}\right)\dfrac{1-(1+a)^{-n}}{\left[(1+a)^{1/p}-1\right]}=D$ и преобразуем его к виду

$$D\left(x^{1/p}-1\right)-1+x^{-n}=0.$$

В качестве функции $f(x)$ принимается выражение

$$f(x)=x^{-n}+Dx^{1/p}-D-1.$$

Производная от этой функции

$$f'(x)=-nx^{-n-1}+D\frac{x^{\frac{1}{p}-1}}{p}.$$

■ **Пример 6.2.** Кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на два года по сложной процентной ставке 8% годовых. При выдаче ссуды кредитором были удержаны комиссионные в размере 5 тыс. руб. Проценты и основной долг выплачиваются раз в полгода, причем сумма расходов постоянна.

Определить полную доходность кредитора.

Решение.

Принимаем $x_1=1{,}1$; $B/A=5/100=0{,}05$; тогда

$$D=0{,}95\cdot\frac{1-(1+0{,}08)^{-2}}{(1+0{,}08)^{1/2}-1}=3{,}4546626.$$

▶ Первая итерация:

$$f(x_1)=1{,}1^{-2}+3{,}4546626\cdot 1{,}1^{1/2}-3{,}4546626-1=-0{,}0049358;$$

$$f'(x)=-2\cdot 1{,}1^{-3}+3{,}4546626\frac{1{,}1^{-0{,}5}}{2}=0{,}1443162;$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1{,}1-\frac{-0{,}0049358}{0{,}1443162}=1{,}1342013.$$

▶ Вторая итерация:

$$f(x_2)=0{,}0018703;\quad f'(x_2)=0{,}25117;$$

$$x_3=1{,}1342013-\frac{0{,}0018703}{0{,}25117}=1{,}126755.$$

▶ Третья итерация:

$$f(x_3)=0{,}0000815;\quad f'(x_3)=0{,}2291641;$$

$$x_4=1{,}126755-\frac{0{,}0000815}{0{,}2291641}=1{,}1263994.$$

▶ Четвертая итерация:

$$f(x_4)=0{,}0000002;\quad f'(x_4)=0{,}2280964;$$

$$x_5=1{,}1263994-\frac{0{,}0000002}{0{,}2280964}=1{,}1263985.$$

Принимаем полную доходность кредитора $r\approx 12{,}64\%$. □

При отсутствии комиссионных и выплате процентов p раз в году при постоянной сумме расходов балансовое уравнение можно представить в виде

$$1 = \frac{a_{n;r}^{(p)}}{a_{n;a}^{(p)}}.$$

Решение этого уравнения очевидно и имеет вид $r = a$, т.е. полная доходность кредитора равна сложной годовой процентной ставке кредита a.

6.3. Доходность потребительского кредита

В потребительском кредите проценты по простой ставке наращения начисляются на всю сумму кредита в момент его открытия и присоединяются к основному долгу. Наращенная сумма долга в этом случае будет равна

$$S = P(1 + ni),$$

где P — сумма кредита; n — срок кредита в годах; i — простая годовая ставка наращения.

Величина разового погасительного платежа r составит

$$r = \frac{S}{pn} = \frac{P(1 + ni)}{pn},$$

где p — число платежей в году.

Решая это уравнение относительно суммы кредита P, получим

$$P = \frac{rpn}{1 + ni} = \frac{Rn}{1 + ni}.$$

Здесь $R = rp$ — выплаты в счет погашения кредита в течение года. С другой стороны, выплаты в счет погашения кредита можно представить в виде годовой p-срочной ренты по ставке a, которая является полной доходностью кредитора. Современная стоимость такой ренты равна

$$P = Ra_{n;a}^{(p)}.$$

Приравняв правые части двух последних соотношений, получим уравнение для полной доходности a:

$$a_{n;a}^{(p)} = \frac{n}{1 + ni}.$$

Решить уравнение можно, например, методом Ньютона—Рафсона. Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{1-(1+a)^{-n}}{p\left[(1+a)^{1/p}-1\right]}=\frac{n}{1+ni}.$$

При решении этого уравнения вместо a будем искать $x=1+a$. Введем также обозначение $B=n/(1+ni)$. Тогда исследуемое уравнение можно переписать в виде

$$1-x^{-n}=Bp\left(x^{1/p}-1\right).$$

Решение $x=1$ не является решением исходного уравнения. В качестве искомой функции $f(x)$ принимаем

$$f(x)=1+Bp-Bpx^{1/p}-x^{-n}.$$

Производная по x от этой функции имеет вид

$$f'(x)=-Bx^{\frac{1}{p}-1}+nx^{-n-1}.$$

Теперь можно записать рекуррентное соотношение Ньютона—Рафсона в общем виде

$$x_{t+1}=x_t-\frac{1+Bp-Bpx_t^{1/p}-x_t^{-n}}{-Bx_t^{\frac{1}{p}-1}+nx_t^{-n-1}}.$$

■ **Пример 6.3.** Потребительский кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на четыре года по ставке 8% годовых. Погасительные платежи выплачиваются ежемесячно.

Определить величину ежемесячных выплат и полную доходность кредитора.

Решение.

Величина ежемесячных выплат рассчитывается по формуле

$$r=\frac{P(1+ni)}{pn}=\frac{100\,000(1+4\cdot 0{,}08)}{12\cdot 4}=2750 \text{ руб.}$$

Для определения полной доходности кредитора найдем коэффициент

$$B=n/(1+ni)=4/1{,}32=3{,}030303.$$

Тогда рекуррентное соотношение можно представить в виде

$$x_{t+1}=x_t-\frac{37{,}363636-36{,}363636x_t^{1/12}-x_t^{-4}}{-3{,}030303x_t^{-11/12}+4x_t^{-5}}.$$

Положим $x_1 = 1{,}16$. Первая итерация:

$$x_2 = 1{,}16 - \frac{37{,}363636 - 36{,}363636 \cdot 1{,}16^{1/12} - 1{,}16^{-4}}{-3{,}030303 \cdot 1{,}16^{-11/12} + 4 \cdot 1{,}16^{-5}} = 1{,}16 - \frac{-0{,}00484}{-0{,}7404} = 1{,}153463.$$

Проведем *проверку*, для чего в левую часть уравнения подставим x_2:

$$\frac{1-(1+a)^{-n}}{p\left[(1+a)^{1/p}-1\right]} = \frac{1-1{,}153463^{-4}}{12\left(1{,}153463^{1/12}-1\right)} = 3{,}0293555.$$

В идеальном случае эта величина должна быть равна $B = 3{,}030303$. Полученное значение левой части уравнения составляет от B величину $\frac{3{,}030303 - 3{,}0293555}{3{,}030303} = 0{,}00031$, т.е. 0,031%. Поэтому расчет можно прекратить и принять полную доходность кредитора равной $a = 15{,}35\%$.

Как следует из рассмотренного примера, ставка кредита 8% отличается от полной доходности кредитора 15,53% почти в два раза. Это связано с тем, что ставка кредита назначается на всю сумму первоначального долга, а долг последовательно уменьшается по мере выплат. Таким образом, потребителя заставляют платить за кредит, которым он не пользовался. □

Упражнения

ЗАДАЧИ

6.1. Кредит на сумму 1 млн руб. выдан на пять лет по сложной процентной ставке 14% годовых. При выдаче ссуды кредитором были удержаны комиссионные в размере 2% суммы кредита. Проценты выплачиваются один раз в год. Определить полную доходность кредитора.

6.2. Кредит на сумму 1 млн руб. выдан на пять лет по сложной процентной ставке 14% годовых. При выдаче ссуды кредитором были удержаны комиссионные в размере 2% суммы кредита. Проценты и основной долг выплачиваются раз в год, причем сумма расходов постоянна. Определить полную доходность кредитора.

6.3. Потребительский кредит на сумму 50 тыс. руб. выдан на два года по ставке 10% годовых. Погасительные платежи выплачиваются ежеквартально. Определить величину ежеквартальных выплат и полную доходность кредитора.

Глава 7

СТОИМОСТЬ ДОЛГОСРОЧНОГО КРЕДИТА

7.1. Постановка задачи

Если расчет за кредит проводится из чистой прибыли, то стоимость кредита, как правило, равна доходности кредитных операций различного типа. При вычислении платежей за кредит из налогооблагаемой прибыли стоимость за кредит уменьшается благодаря налоговой защите. При этом часть обязанностей по погашению кредита берет на себя государство. В каждом отдельном случае эту стоимость надо определять особо.

Схема возможных выплат по кредиту представлена на рис. 7.1. Рассмотрим методы определения стоимости кредита при выплатах по кредиту из чистой прибыли и из налогооблагаемой прибыли.

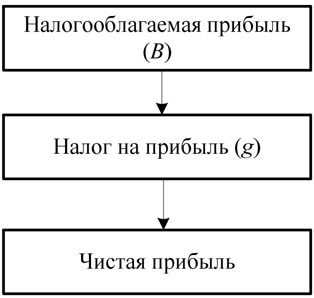


Рис. 7.1

Полагаем, что кредит в сумме A руб. взят на n лет под сложную годовую процентную ставку a. Налогооблагаемую прибыль обозначим B руб. Ставка налога на прибыль равна g, срок кредита — n лет.

7.2. Проценты по кредиту выплачиваются в конце каждого года, а основная сумма долга — в конце срока

1. ***Выплаты по кредиту производятся из чистой прибыли.*** Тогда чистая прибыль определяется соотношениями

$$ЧП = B(1-g).$$

Если проценты по кредиту выплачиваются один раз в году, то после их выплаты чистая годовая прибыль будет равна

$$ЧП_1 = B(1-g) - Aa. \qquad \textbf{(7.1)}$$

Отсюда следует, что величина чистой прибыли каждый раз уменьшается на *Aa* руб., т.е. на величину выплаченных процентов.

Стоимость кредита будем обозначать буквой *r*. Уравнение для определения стоимости кредита получают, приравняв современную стоимость всех платежей по кредиту из чистой прибыли в течение *n* лет к сумме кредита *A*. Эта современная стоимость может быть рассчитана по формуле

$$A = \sum_{j=1}^{n} \frac{Aa}{(1+r)^j} + \frac{A}{(1+r)^n} = A\left(a\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + (1+r)^{-n} \right).$$

Сократив на *A*, получим уравнение

$$1 = a\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + (1+r)^{-n}.$$

Перенесем последнее слагаемое из правой части в левую:

$$1-(1+r)^{-n} = a\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

Разделив левую и правую части уравнения на $1-(1+r)^{-n}$, найдем

$$1 = \frac{a}{r}.$$

Таким образом,

$$r = a,$$

т.е. стоимость кредита равна сложной годовой процентной ставке кредита a.

2. ***Выплаты процентов производятся из налогооблагаемой прибыли.*** В этом случае налогооблагаемая прибыль будет равна $B - Aa$. После выплаты налога на прибыль чистая прибыль составит

$$ЧП_2 = (B - Aa)\cdot(1-g).$$

Сопоставим эту формулу с формулой **(7.1)**. Для этого из этой формулы вычтем **(7.1)**. В результате получим

$$\Delta ЧП = (B - Aa)\cdot(1-g) - \big(B(1-g) - Aa\big) =$$
$$= B(1-g) - Aa + Aag - B(1-g) + Aa = Aag.$$

При выплате процентов из чистой прибыли чистая прибыль уменьшалась на величину *Aa*. Теперь она будет уменьшаться на величину $Aa - Aag = Aa(1-g)$.

Таким образом, выплаты процентов из налогооблагаемой прибыли уменьшают эквивалентные выплаты процентов из чистой прибыли в $(1 - g)$ раз. Современная стоимость всех платежей за кредит за n лет из чистой прибыли по ставке r будет равна

$$A = \sum_{j=1}^{n} \frac{Aa(1-g)}{(1+r)^j} + \frac{A}{(1+r)^n} = Aa(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + A(1+r)^{-n}.$$

Сократив на A, получим уравнение

$$1 = a(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + (1+r)^{-n}.$$

Перенесем последнее слагаемое из правой части в левую:

$$1-(1+r)^{-n} = a(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

Разделив левую и правую части уравнения на $1-(1+r)^{-n}$, найдем

$$1 = \frac{a(1-g)}{r}.$$

Таким образом,

$$r = a(1-g), \qquad \textbf{(7.2)}$$

т.е. стоимость кредита в $(1 - g)$ раз меньше ставки кредита.

3. ***Выплаты процентов и основного долга производятся из налогооблагаемой прибыли.*** В некоторых странах по некоторым типам кредита, например на социальные нужды, практикуют выплату из налогооблагаемой прибыли не только процентов, но и основного долга. Современная стоимость всех платежей за кредит за n лет из чистой прибыли по ставке r будет равна

$$A = \sum_{j=1}^{n} \frac{Aa(1-g)}{(1+r)^j} + \frac{A(1-g)}{(1+r)^n} = Aa(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + A(1-g)(1+r)^{-n}.$$

Сократив на A, получим уравнение

$$1=a(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}+(1-g)(1+r)^{-n}.$$

Перенесем последнее слагаемое из правой части в левую:

$$1-(1-g)(1+r)^{-n}=a(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

Разделив левую и правую части уравнения на $\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ и перенеся правую часть влево, найдем

$$\frac{1-(1-g)(1+r)^{-n}}{1-(1+r)^{-n}}\cdot r-a(1-g)=0. \qquad \textbf{(7.3)}$$

Решить это уравнение относительно стоимости кредита можно цифровыми методами, например методом Ньютона—Рафсона.

При $n\to\infty$ уравнение **(7.3)** преобразуется в формулу **(7.2)**.

■ **Пример 7.1.** Кредит выдан на четыре года по ставке 10% годовых. При погашении кредита в конце каждого года из налогооблагаемой прибыли выплачиваются проценты. Основной долг выплачивается в конце срока. Ставка налога на прибыль равна 20%.

Определить стоимость этого кредита при выплате основного долга из чистой прибыли и из налогооблагаемой прибыли.

Решение.

Стоимость кредита при выплате основного долга из чистой прибыли рассчитывается по формуле

$$r=a(1-g)=0,1(1-0,2)=0,08 \text{ или } 8\%.$$

При выплате основного долга из налогооблагаемой прибыли стоимость кредита определяется из уравнения

$$\frac{1-(1-0,2)(1+r)^{-n}}{1-(1+r)^{-n}}\cdot r-0,1(1-0,2)=0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{1-0,8(1+r)^{-4}}{1-(1+r)^{-4}}\cdot r-0,08=0.$$

Решение этого уравнения $r\approx 0,0324$. Принимаем стоимость кредита равной 3,24% годовых. □

4. ***Учет амортизационных выплат при определении стоимости кредита.*** Если кредит берется на покупку амортизируемой продукции, например оборудования, то амортизационные выплаты понижают налогооблагаемую базу. Это приводит к тому, что операция по покупке амортизируемой продукции увеличивает чистую прибыль. В конечном счете это уменьшает стоимость кредита.

Пусть срок амортизации равен N лет. Сумма кредита A равна стоимости оборудования. При линейной амортизации годовая амортизационная выплата будет равна $\frac{A}{N}$ руб. За счет налоговой защиты получим увеличение чистой прибыли на величину $\frac{A}{N}g$. Современная стоимость всех добавок к чистой прибыли составит

$$D = \sum_{t=1}^{N} \frac{Ag}{N} \cdot \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{Ag}{N} \cdot \frac{1-(1+i)^{-N}}{i},$$

где i — среднегодовая рыночная процентная ставка.

Это эквивалентно тому, что должник получил кредит не в сумме A, а в сумме

$$E = A + \frac{Ag}{N} \cdot \frac{1-(1+i)^{N}}{i} = A\left(1 + \frac{g}{N} \cdot \frac{1-(1+i)^{-N}}{i}\right).$$

В рассматриваемом случае так же, как и раньше, налогооблагаемая прибыль, из которой вычитается налог на прибыль, будет равна $B - Aa$. После выплаты налога на прибыль чистая прибыль составит

$$\text{ЧП}_2 = (B - Aa) \cdot (1-g).$$

Так же как и раньше, чистая прибыль будет увеличиваться на величину Aag. Выплаты процентов из налогооблагаемой прибыли уменьшают эквивалентные выплаты процентов из чистой прибыли в $(1 - g)$ раз. Современная стоимость всех платежей за кредит за n лет из чистой прибыли по ставке r будет равна эквивалентному долгу E, т.е.

$$E = \sum_{j=1}^{n} \frac{Aa(1-g)}{(1+r)^j} + \frac{A}{(1+r)^n} = Aa(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + A(1+r)^{-n}.$$

Сократив на A, получим уравнение

$$1 + \frac{g}{N} \cdot \frac{1-(1+i)^{-N}}{i} = a(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + (1+r)^{-n}.$$

Перенесем последнее слагаемое из правой части в левую:

$$1-(1+r)^{-n} + \frac{g}{N} \cdot \frac{1-(1+i)^{-N}}{i} = a(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

Разделив левую и правую части уравнения на $1-(1+r)^{-n}$, найдем

$$1+\frac{g}{N\cdot i}\cdot\frac{1-(1+i)^{-N}}{1-(1+r)^{-n}}=\frac{a}{r}(1-g).$$

■ **Пример 7.2.** Кредит выдан на четыре года по ставке 10% годовых. При погашении кредита в конце каждого года из налогооблагаемой прибыли выплачиваются проценты. Основной долг выплачивается в конце срока. Ставка налога на прибыль равна 20%, рыночная процентная ставка — 12% годовых, срок амортизации — 50 лет.

Определить стоимость этого кредита без учета и с учетом амортизационных выплат.

Решение.

Стоимость кредита без учета амортизационных выплат рассчитывается по формуле

$$r=a(1-g)=0,1(1-0,2)=0,08, \text{ или } 8\%.$$

При учете амортизационных выплат стоимость кредита определяется из уравнения

$$1+\frac{0,2}{50\cdot 0,12}\cdot\frac{1-(1+0,12)^{-50}}{1-(1+r)^{-4}}=\frac{0,1}{r}(1-0,2).$$

Перепишем это уравнение в виде

$$1+\frac{0,03333333}{1-(1+r)^{-4}}=\frac{0,08}{r}.$$

Решение этого уравнения $r\approx 0,0702$. Принимаем стоимость кредита равной 7% годовых.

Таким образом, стоимость кредита при учете амортизационных отчислений по рассматриваемой финансовой операции уменьшилась на 1%. □

7.3. Кредитная операция с периодическими равными выплатами

1. ***Проценты начисляются по сложной годовой процентной ставке а и выплачиваются в конце срока из налогооблагаемой прибыли.*** Основной долг также выплачивается в конце срока. Это частный случай периодических выплат. Наращенная к концу срока кредита сумма долга будет равна

$$S=A(1+a)^n,$$

где S — наращенная к концу срока кредита сумма долга; A — сумма кредита; n — срок кредита в годах.

Величина процентов находится как разность между наращенной суммой и первоначальной суммой кредита:

$$I = S - A = A\left[(1+a)^n - 1\right].$$

Выплаты процентов из налогооблагаемой прибыли уменьшают эквивалентные выплаты процентов из чистой прибыли в $(1-g)$ раз. Современная стоимость, эквивалентная величине процентов и основного долга, выплачиваемых из чистой прибыли по ставке r, равной стоимости долга, будет равна

$$A = \frac{A\left[(1+a)^n - 1\right]\cdot(1-g)}{(1+r)^n} + \frac{A}{(1+r)^n}.$$

Сократив на A и умножив на $(1+r)^n$, получим уравнение

$$(1+r)^n = \left[(1+a)^n - 1\right]\cdot(1-g) + 1 = (1+a)^n\left(1 - g + \frac{g}{(1+a)^n}\right).$$

Отсюда находим формулу для стоимости кредита:

$$r = (1+a)\cdot\left(1 - g + \frac{g}{(1+a)^n}\right)^{1/n} - 1.$$

Можно показать, что стоимость кредита возрастает с ростом срока кредита *n*. При сроке кредита, равном одному году, стоимость кредита будет равна

$$r = a(1-g).$$

При стремлении срока к бесконечности стоимость кредита стремится к *a*.

Увеличение стоимости кредита при увеличении его срока связано с тем, что должник получает дополнительный доход за счет налоговой защиты, и чем быстрее он получит этот доход, тем меньше стоимость кредита.

■ **Пример 7.3.** Кредит выдан на два года по ставке 16% годовых. При погашении кредита в конце срока из налогооблагаемой прибыли выплачиваются проценты. Основной долг выплачивается в конце срока из чистой прибыли. Ставка налога на прибыль равна 20%.

Определить стоимость этого кредита.

Решение.

Стоимость кредита рассчитывается по формуле

$$r = (1+0{,}16)\cdot\left(1 - 0{,}2 + \frac{0{,}2}{(1+0{,}16)^2}\right)^{1/2} - 1 = 0{,}128 \text{ или } 12{,}8\%. \square$$

2. ***Проценты начисляются по сложной годовой процентной ставке а и выплачиваются вместе с основным долгом в конце срока из налогооблагаемой прибыли.*** Современная стоимость эквивалентной величины процентов и основного долга, выплачиваемых из чистой прибыли по ставке *r*, равной стоимости долга, будет равна

$$A=\frac{A\left[\left(1+a\right)^{n}-1\right]\cdot\left(1-g\right)}{\left(1+r\right)^{n}}+\frac{A\left(1-g\right)}{\left(1+r\right)^{n}}.$$

Сократив на A и умножив на $\left(1+r\right)^{n}$, получим уравнение

$$\left(1+r\right)^{n}=\left[\left(1+a\right)^{n}-1\right]\cdot\left(1-g\right)+\left(1-g\right)=\left(1+a\right)^{n}\left(1-g\right).$$

Отсюда находим формулу для стоимости кредита:

$$r=\left(1+a\right)\cdot\left(1-g\right)^{1/n}-1. \qquad \textbf{(7.4)}$$

При сроке кредита, равном одному году, стоимость кредита будет равна

$$r=-g+a-ag.$$

При стремлении срока к бесконечности стоимость кредита стремится к *a*.

■ **Пример 7.4.** Кредит выдан на два (четыре, один) года по ставке 16% годовых. При погашении кредита из налогооблагаемой прибыли выплачиваются проценты и основной долг. Ставка налога на прибыль равна 20%.

Определить стоимость этого кредита, а также срок кредита, при котором его стоимость будет равна нулю.

Решение.

Стоимость кредита рассчитывается по формуле

$$r_1=\left(1+0{,}16\right)\cdot\left(1-0{,}2\right)^{1/2}-1=0{,}0375 \text{ или } 3{,}75\%;$$

$$r_2=\left(1+0{,}16\right)\cdot\left(1-0{,}2\right)^{1/4}-1=0{,}0971 \text{ или } 9{,}71\%;$$

$$r_3=\left(1+0{,}16\right)\cdot\left(1-0{,}2\right)-1=-0{,}072 \text{ или } -7{,}2\%.$$

Для определения срока кредита, при котором его стоимость будет равна нулю, формулу **(7.4)** приравняем нулю и запишем в виде

$$\left(1+a\right)^{n}\cdot\left(1-g\right)=1.$$

После логарифмирования и решения уравнения относительно срока получим

$$n=-\frac{\ln\left(1-g\right)}{\ln\left(1+a\right)}.$$

Подставив в эту формулу условия задачи, получим

$$n = -\frac{\ln(1-0,2)}{\ln(1+0,16)} = 1,5 \text{ года.}$$

Таким образом, так же как и в предыдущем примере, стоимость кредита при увеличении срока увеличивается. □

Таким образом, стоимость кредита при выплатах из налогооблагаемой прибыли процентов и основного долга может принимать отрицательные значения. Это означает, что должник не платит, а получает проценты.

3. ***Кредитная операция с равными годовыми выплатами по долгу из налогооблагаемой прибыли.*** В этом случае полная доходность кредитора равна сложной годовой процентной ставке кредита *a*. Срок кредита в годах обозначим через *n*. В конце каждого года из налогооблагаемой прибыли выплачивается сумма $R = A/a_{n;a}$, где $a_{n;a}$ — коэффициент приведения годовой ренты. Это соответствует выплате из чистой прибыли суммы $R(1-g)$, где g — ставка налога на прибыль. Современная стоимость всех платежей из чистой прибыли за кредит по ставке *r*, равной стоимости кредита, должна быть равна сумме кредита *A*. В результате получим

$$A = \sum_{j=1}^{n} \frac{R(1-g)}{(1+r)^j} = R(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = R(1-g)a_{n;r}.$$

Чистая прибыль в этом случае будет больше чистой прибыли при выплатах из нее ежегодных сумм по кредиту на величину

$$\Delta = R \cdot g \cdot a_{n;r}.$$

Подставив в два последних выражения $R = A/a_{n;a}$, найдем

$$\Delta = A \cdot g \cdot \frac{a_{n;r}}{a_{n;a}};$$

$$1 = (1-g)\frac{a_{n;r}}{a_{n;a}}.$$

Последнее соотношение удобно преобразовать к виду

$$\frac{a_{n;a}}{(1-g)} - a_{n;r} = 0.$$

Иначе это уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{1-(1+a)^{-n}}{(1-g)a} - \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 0.$$

Решить это уравнение относительно r можно, например, методом Ньютона—Рафсона. Если срок кредита очень большой, т.е. $n \to \infty$, то полученное уравнение преобразуется в формулу **(6.2)**.

■ **Пример 7.5.** Кредит выдан на четыре года по ставке 10% годовых. Кредит погашается равными долями и выплачивается из налогооблагаемой прибыли. Ставка налога на прибыль равна 20%.

Определить стоимость этого кредита и сравнить его со стоимостью такого же кредита при выплатах из налогооблагаемой прибыли только процентов.

Решение.

Стоимость кредита при выплатах из налогооблагаемой прибыли только процентов рассчитывается по формуле

$$r = a(1-g) = 0{,}1(1-0{,}2) = 0{,}08, \text{ или } 8\%.$$

Стоимость кредита с четырехлетним сроком находят из решения уравнения

$$\frac{1-(1+0{,}1)^{-4}}{(1-0{,}2)\cdot 0{,}1} - \frac{1-(1+r)^{-4}}{r} = 0.$$

Решение этого уравнения равно $r = 0{,}036$.

Принимаем стоимость кредита равной 3,6%.

Полученная стоимость кредита существенно меньше стоимости кредита при выплатах из налогооблагаемой прибыли только процентов. □

В заключение следует сказать, что в условиях обострившейся конкурентной борьбы финансовый менеджер должен наиболее тщательно рассматривать и учитывать все особенности финансовых операций, и в частности особенности кредитования при выборе тех или иных финансовых решений.

Упражнения

ЗАДАЧИ

7.1. Кредит выдан на три года по ставке 24% годовых. При погашении кредита в конце каждого года из налогооблагаемой прибыли выплачиваются проценты. Основной долг выплачивается в конце срока. Ставка налога на прибыль равна 24%. Определить стоимость этого кредита при выплате основного долга из чистой прибыли и из налогооблагаемой прибыли.

7.2. Кредит выдан на четыре года по ставке 15% годовых. При погашении кредита в конце каждого года из налогооблагаемой прибыли выплачиваются проценты. Основной долг выплачивается в конце срока. Ставка налога на прибыль равна 24%, рыночная процентная ставка — 15% годовых, срок амортизации − 20 лет. Определить стоимость этого кредита без учета и с учетом амортизационных выплат.

7.3. Кредит выдан на три года (восемь лет) по ставке 10% годовых. При погашении кредита в конце срока из налогооблагаемой прибыли выплачиваются проценты. Основной долг выплачивается в конце срока из чистой прибыли. Ставка налога на прибыль равна 24%. Определить стоимость этого кредита.

7.4. Кредит выдан на три года (восемь лет) по ставке 12% годовых. При погашении кредита из налогооблагаемой прибыли выплачиваются проценты и основной долг. Ставка налога на прибыль равна 24%. Определить стоимость этого кредита.

7.5. Кредит выдан на четыре года по ставке 10% годовых. Кредит погашается равными долями и выплачивается из налогооблагаемой прибыли. Ставка налога на прибыль равна 34%. Определить стоимость этого кредита и сравнить его со стоимостью кредита, у которого из налогооблагаемой прибыли выплачиваются только проценты.

Глава 8 ЛИЗИНГ

8.1. Размеры лизинговых платежей

Размеры платежей по лизингу определяются принятой схемой погашений задолженности и издержками лизингодателя.

Схема погашения задолженности по лизинговому контракту выбирается лизингодателем и лизингополучателем из условия наиболее удобных для них сроков и размеров платежей. Основными выплатами по лизинговому контракту являются авансовый платеж, периодические платежи и выкупная сумма. *Периодические платежи* подразделяются на переменные и постоянные, по периоду между выплатами, по моменту выплат (пренумерандо и постнумерандо).

В отдельных случаях в качестве выплат по лизинговой задолженности могут использоваться и *нерегулярные платежи*. В этих случаях платежи производятся по графику, содержащему сроки и суммы выплат.

Лизинговые платежи относятся на себестоимость продукции лизингополучателя.

В лизинговые платежи включаются:

- амортизация имущества за срок договора лизинга;
- плата за оказание лизингополучателю со стороны лизингодателя предусмотренных договором услуг (обучение персонала лизингополучателя работе, оплата таможенных сборов, тарифов и пошлин);
- плата за пользование привлеченными средствами;
- налог на добавленную стоимость;
- страховые взносы, если страхование осуществляется лизингодателем;
- налог на имущество, если предмет лизинга учтен на балансе лизингодателя;
- доход лизингодателя, включая премию за риск.

Определение размера платежей по лизингу основано на методе современной величины денежных потоков. Сумма современных стоимостей всех выплат, входящих в лизинговые платежи, является стоимостью предмета лизинга. Если указанная сумма будет превышать эту стоимость, то лизингополучателю выгоднее купить оборудование. Будем считать, что в стоимость оборудования входят все выплаты, перечисленные выше, кроме дохода лизингодателя. Действительно, лизингополучателю так или иначе придется провести все операции, обеспеченные этими выплатами.

Пусть выплатами является p-срочная рента, современная величина которой вычисляется по формуле

$$A = Ra_{n;i}^{(p)} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]},$$

где A — стоимость предмета лизинга за вычетом остаточной стоимости предмета лизинга; R — годовая выплата; i — лизинговая годовая процентная ставка; n — срок лизинга в годах; p — количество выплат в году.

Выплата за один период равна $M = R/p$. Используя соотношение для современной стоимости ренты, формулу для величины выплаты за один период можно записать в виде

$$M = \frac{R}{p} = \frac{A}{pa_{n;i}^{(p)}}.$$

Современная величина ренты является долгом лизингополучателя, определяемым как разность между ценой имущества P и его остаточной стоимостью $\frac{S}{(1+i)^n}$. Это позволяет записать

$$M = \frac{P - S(1+i)^{-n}}{pa_{n;i}^{(p)}}.$$

■ **Пример 8.1.** Оборудование стоимостью 100 тыс. руб. предоставлено в аренду на пять лет. Остаточная стоимость оборудования на момент окончания аренды оценивается в 20 тыс. руб. Лизинговая годовая процентная ставка выбрана равной 18%.

Определить величину выплат раз в году и поквартально.

Решение.

Для случая ежегодных выплат

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-1{,}18^{-5}}{0{,}18} = 3{,}1271711;$$

$$P - S(1+i)^{-n} = 100\ 000 - 20\ 000 \cdot 1{,}18^{-5} = 91\ 257{,}82 \text{ руб.};$$

$$R = \frac{P - S(1+i)^{-n}}{a_{n;i}} = \frac{91\ 257{,}82}{3{,}1271711} = 29\ 182{,}23 \text{ руб.}$$

Для случая ежеквартальных выплат

$$a_{n;i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]} = \frac{1-1{,}18^{-5}}{4\left(1{,}18^{1/4}-1\right)} = 3{,}3309828;$$

$$M = \frac{P-S(1+i)^{-n}}{pa_{n;i}^{(p)}} = \frac{91\,257{,}82}{4\cdot 3{,}3309828} = 6849{,}17 \text{ руб.}$$

При увеличении количеств выплат в году коэффициент приведения увеличивается. □

8.2. Доходность лизинга

Доходность лизинговых операций определяется годовой ставкой сложных процентов. Доходность определяют при известных годовых выплатах по лизингу, сроку лизинга, стоимости оборудования и его остаточной стоимости. В этом случае современную величину ренты, являющейся долгом лизингополучателя и определяемом как разность между ценой имущества P и его остаточной стоимостью S, дисконтированной на начало процесса по лизинговой годовой процентной ставке i, можно записать в виде $A = P - \frac{S}{(1+i)^n}$. Раскрыв современную стоимость ренты, получим

$$R\frac{1-(1+q)^{-n}}{p\left[(1+q)^{1/p}-1\right]} = P - \frac{S}{(1+i)^n}.$$

Решив это уравнение относительно q, определим доходность лизинга. При этом можно использовать, например, метод Ньютона—Рафсона. Приведем это уравнение к виду, удобному для дальнейших расчетов. Введя замену $x = 1+q$, получим

$$f(x) = \frac{P-S(1+i)^{-n}}{R}px^{n+\frac{1}{p}} - \left(1+\frac{P-S(1+i)^{-n}}{R}p\right)x^n + 1.$$

Заметим, что $x = 1$ не является решением исходного уравнения. Производная этой функции вычисляется по формуле

$$f'(x) = \left(n+\frac{1}{p}\right)\frac{P-S(1+i)^{-n}}{R}px^{n+\frac{1}{p}-1} - n\left(1+\frac{P-S(1+i)^{-n}}{R}p\right)x^{n-1}.$$

■ **Пример 8.2.** Оборудование стоимостью 100 тыс. руб. предоставлено в аренду на пять лет. Остаточная стоимость оборудования на момент окончания аренды оценивается в 20 тыс. руб. Лизинговая годовая процентная ставка выбрана равной 18%. Взносы выплачиваются в конце каждого квартала по 6900 руб.

Определить доходность лизинговой операции.

Решение.

Для решения используется метод Ньютона—Рафсона. Предварительно определим

$$\frac{P-S(1+i)^{-n}}{R}p=\frac{91\,257,82}{6900}=13,225771.$$

Положим $x_1=1,2$.

▶ Первая итерация:

$$f(x_1)=13,225771\cdot 1,2^{5,25}-14,225771\cdot 1,2^{5}+1=0,046438;$$

$$f'(x_1)=5,25\cdot 13,225771\cdot 1,2^{4,25}-5\cdot 14,225771\cdot 1,2^{4}=3,20281;$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1,2-\frac{0,046438}{3,20281}=1,1855009.$$

▶ Вторая итерация:

$$f(x_2)=\frac{A}{R}px_2^{n+\frac{1}{p}}-\left(1+\frac{A}{R}p\right)x_2^{n}+1=0,004315;$$

$$f'(x_2)=\left(n+\frac{1}{p}\right)\frac{A}{R}px_2^{n+\frac{1}{p}-1}-n\left(1+\frac{A}{R}p\right)x_2^{n-1}=2,61522;$$

$$x_3=1,1838509.$$

▶ Третья итерация:

$$f(x_3)=\frac{A}{R}px_3^{n+\frac{1}{p}}-\left(1+\frac{A}{R}p\right)x_3^{n}+1=0,000052;$$

$$f'(x_3)=\left(n+\frac{1}{p}\right)\frac{A}{R}px_3^{n+\frac{1}{p}-1}-n\left(1+\frac{A}{R}p\right)x_3^{n-1}=2,55115;$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=1,1838305.$$

Принимаем $q=x-1=0,1838305$, или 18,38305%. Проведем проверку, используя формулу

$$\frac{1-(1+q)^{-n}}{p\left[(1+q)^{1/p}-1\right]}=\frac{1-1,1838305^{-5}}{4\left(1,1838305^{1/4}-1\right)}=3,3064422.$$

С другой стороны,

$$\frac{P - S(1+i)^{-n}}{R} = 3{,}3064427.$$

Поскольку результаты практически совпали, то принимаем доходность лизингодателя равной 18,38% годовых. □

8.3. Стоимость лизинга

Стоимость лизинга, как и стоимость кредита, уменьшается благодаря налоговой защите. Однако стоимость лизинга во многом будет зависеть от платежей, выплачиваемых лизингополучателем лизингодателю. Величина этих платежей будет определяться договором между лизингополучателем и лизингодателем. Поэтому в каждом отдельном случае стоимость лизинга следует рассчитывать отдельно.

Пусть так же, как и в § 8.2, долг лизингополучателя определяется разностью между ценой имущества P и его остаточной стоимостью S, дисконтированной на начало процесса по лизинговой процентной ставке i, т.е. равен $P - \frac{S}{(1+i)^n}$. Эта величина равна современной стоимости всех платежей ренты с годовой выплатой R (годовой размер платежа по лизингу), дисконтированных по доходности лизингодателя q:

$$R \frac{1-(1+q)^{-n}}{p\left[(1+q)^{1/p} - 1\right]} = P - \frac{S}{(1+i)^n}.$$

Лизингополучатель выплачивает платежи из налогооблагаемой прибыли. Поэтому эквиваленты выплат из чистой прибыли будут равны $R(1-g)$, где g — ставка налога на прибыль. Современная стоимость всех платежей из чистой прибыли по ставке r, равной стоимости лизинга, также должна быть равна долгу лизингополучателя, т.е.

$$R(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+r)^{1/p} - 1\right]} = P - \frac{S}{(1+i)^n}.$$

Приравнивая левые части двух последних выражений, получим

$$\frac{1-(1+q)^{-n}}{(1-g)\left[(1+q)^{1/p} - 1\right]} - \frac{1-(1+r)^{-n}}{(1+r)^{1/p} - 1} = 0.$$

Таким образом, для определения стоимости лизинга по рассматриваемой модели необходимо знать доходность лизингодателя, срок лизинга, количество выплат в году, ставку налога на прибыль.

Если выплаты производятся один раз в году, то

$$\frac{1-(1+q)^{-n}}{(1-g)\cdot q}-\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}=0.$$

Эти уравнения относительно стоимости лизинга r можно решить, например, методом Ньютона—Рафсона.

Для срока лизинга, равного одному году, при одноразовых выплатах в году имеем

$$r=q-g(1+q).$$

Если срок лизинга очень большой, т.е. $n\to\infty$, то при выплатах один раз в году имеем

$$r=q\cdot(1-g).$$

■ **Пример 8.3.** Пусть доходность лизингодателя $q=20\%$. Взносы выплачиваются раз в году. Налог на прибыль составляет 20%.

Определить стоимость лизинга для следующих сроков: $n=1$, $n=5$, $n\to\infty$.

Решение.

Для $n=1$ имеем

$$r=0,2-0,2(1+0,2)=-0,088, \text{ или } -4\%.$$

Для решения задачи при $n=5$ может быть использован, например, метод Ньютона—Рафсона. Исходное уравнение приобретает вид

$$\frac{1-(1+r)^{-5}}{r}-\frac{1-1,2^{-5}}{0,8\cdot 0,2}=0.$$

Решение этого уравнения: $r=10,55\%$.

Для $n\to\infty$ имеем $r=20\cdot(1-0,2)=16\%$. □

Как следует из приведенного примера, стоимость лизинга будет возрастать при увеличении его срока. Более того, при незначительных сроках эта стоимость становится отрицательной. Это означает, что лизингополучатель будет получать проценты по ссуде, а не платить их. Этот эффект связан с налоговой защитой. Графическая зависимость стоимости лизинга от его срока представлена на рис. 8.1.

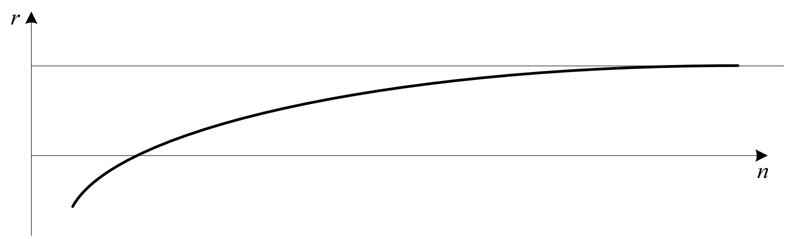


Рис. 8.1. Зависимость стоимости лизинга от его срока

8.4. Сравнение эффективности лизинга и кредита

Естественно, что перед предприятием, которому необходимо определенное оборудование, возникает вопрос: «Воспользоваться лизингом или купить оборудование?» Качественно преимущества лизинга мы рассмотрели выше. Однако существуют методы, позволяющие ответить на поставленный вопрос путем оценки современной стоимости лизинга и покупки оборудования. Для этого сравнивают современные стоимости всех платежей, определяемых лизингом и покупкой, и, при прочих равных условиях, выбирают тот путь, современная стоимость которого меньше. Применяемая для дисконтирования процентная ставка обычно принимается равной рыночной стоимости кредита. При дисконтировании остаточной стоимости оборудования используется долгосрочная ставка.

Рассмотрим метод сравнения современных стоимостей при различных условиях выплат по лизингу и по кредиту.

В общем случае современная стоимость чистых платежей по лизингу определяется соотношением

$$A_л = \sum_{t=1}^{n} \frac{K_t}{(1+i)^t},$$

где K_t — чистые платежи по лизингу в периоде $t = 1, 2, ..., n$; n — количество выплат по лизингу; i — рыночная ставка кредита за рассматриваемый период.

Если платежами по лизингу является p-срочная рента, то современная стоимость потока платежей рассчитывается по формуле

$$A_л = Ka_{n;i}^{(p_л)},$$

где K — чистые годовые платежи по лизингу; $p_л$ — количество выплат в году; n — срок лизинга в годах.

Чистые годовые платежи по лизингу с учетом налоговой защиты вычисляются по формуле

$$K = M(1-g),$$

где g — ставка налога на прибыль; M — выплаты из налогооблагаемой прибыли за один период.

Альтернативой лизингу является покупка оборудования. Пусть цена приобретаемого оборудования равна P. Покупатель может внести за него аванс B, а оставшуюся часть покрыть за счет кредита. По договору кредита проценты выплачиваются раз в году, срок кредита в годах равен J, годовая процентная ставка за кредит равна r и сумма кредита выплачивается в конце срока. Тогда с учетом налоговой защиты величина разовых процентов за кредит из чистой прибыли будет вычисляться по формуле

$$I=(P-B)\cdot r\cdot(1-g).$$

При покупке оборудования на современную стоимость всех затрат существенное влияние может оказать увеличение чистой прибыли за счет амортизационных отчислений, связанных с амортизацией приобретенного оборудования. Необходимость учета чистой прибыли за счет амортизационных затрат вызвана тем, что причиной этой амортизации является операция по покупке амортизируемого оборудования. Современная стоимость всех добавок к чистой прибыли составит

$$D=\sum_{t=1}^{N}\frac{Pg}{N}\cdot\frac{1}{(1+i)^t}=\frac{Pg}{N}\cdot\frac{1-(1+i)^{-N}}{i},$$

где i — среднегодовая рыночная процентная ставка; N — срок амортизации.

Современная стоимость потока платежей за кредит $A_{\text{К}}$ при заданных условиях и при рыночной годовой процентной ставке кредита i определяется выражением

$$A_{\text{К}}=Ia_{J;i}+\frac{P-B}{(1+i)^J}-D=$$

$$=(P-B)\left(r(1-g)\frac{1-(1+i)^{-J}}{i}+\frac{1}{(1+i)^J}\right)-\frac{Pg}{N}\cdot\frac{1-(1+i)^{-N}}{i};$$

$$A_{\text{К}}=\frac{P-B}{(1+i)^J}\cdot\left(\frac{r}{i}(1-g)\left((1+i)^J-1\right)+1\right)-\frac{Pg}{N}\cdot\frac{1-(1+i)^{-N}}{i}.$$

Схемы выплат по лизингу и по кредиту могут быть самыми разнообразными. Поэтому каждый раз при оценке современной стоимости лизинга и кредита нужно с учетом данных договора составить свою математическую модель и провести расчет и анализ полученной информации. С учетом данных этого анализа выбирается тот или иной метод приобретения оборудования.

■ **Пример 8.4.** Оборудование может быть предоставлено в аренду на пять лет. Процентная рыночная кредитная ставка равна $i = 12\%$. Взносы выплачиваются в конце каждого месяца по 2,5 тыс. руб. Стоимость оборудования – 100 тыс. руб. Срок амортизации равен 30 годам. С другой стороны, при покупке этого оборудования можно выплатить аванс в 20 тыс. руб., а на оставшуюся сумму взять кредит на четыре года. Годовая ставка кредита $r = 8\%$ годовых, проценты выплачиваются в конце каждого года, сумма кредита выплачивается в конце срока. Ставку налога на прибыль принять $g = 24\%$.

Выбрать наиболее выгодный для покупателя метод приобретения оборудования. При анализе рассмотреть два варианта: без учета амортизации и с учетом амортизации.

Решение.

Поскольку платежи по лизингу выплачиваются из налогооблагаемой прибыли, то это соответствует выплатам из чистой прибыли, равным

$$K = 2500 \cdot (1 - 0{,}24) = 1900 \text{ руб.}$$

Коэффициент наращения ренты выплат по лизингу

$$a_{n;i}^{(p_л)} = \frac{1-(1+i)^{-T}}{p_л\left[(1+i)^{1/p_л} - 1\right]} = \frac{1-1{,}12^{-5}}{12\left(1{,}12^{1/12} - 1\right)} = 3{,}7989796.$$

Современная стоимость выплат по лизингу

$$A_л = K a_{n;i}^{(p_л)} = 1900 \cdot 12 \cdot 3{,}7989796 = 86\ 616{,}73 \text{ руб.}$$

Для определения современной стоимости платежей за кредит без учета амортизационных выплат воспользуемся формулой

$$A_К = \frac{100\ 000 - 20\ 000}{(1+0{,}12)^4} \cdot \left(\frac{0{,}08}{0{,}12}(1-0{,}24)\left((1+0{,}12)^4 - 1\right) + 1\right) = 65\ 615{,}11 \text{ руб.}$$

Таким образом, современная стоимость покупки оборудования $A_П$ равна

$$A_П = 65\ 615{,}11 + 20\ 000 = 85\ 615{,}11 \text{ руб.}$$

Расчеты показывают, что лизинг без учета амортизации обойдется дороже.

Современная стоимость всех добавок к чистой прибыли составит

$$D = \frac{100\ 000 \cdot 0{,}24}{30} \cdot \frac{1-(1+0{,}12)^{-30}}{0{,}12} = 6444{,}15 \text{ руб.}$$

С учетом амортизационных отчислений современная стоимость покупки оборудования будет равна

$$A_П = 85\ 615{,}11 - 6444{,}15 = 79\ 170{,}96 \text{ руб.}$$

С учетом амортизационных отчислений современная стоимость покупки оборудования будет еще дешевле. □

Упражнения

ЗАДАЧИ

8.1. Оборудование стоимостью 100 тыс. руб. предоставлено в аренду на пять лет. Остаточная стоимость оборудования на момент окончания аренды оценивается в 20 тыс. руб. Лизинговая годовая процентная ставка выбрана равной 18%. Определить величину суммы, выплачиваемой раз в месяц.

8.2. Оборудование стоимостью 120 тыс. руб. предоставлено в аренду на пять лет. Остаточная стоимость оборудования на момент окончания аренды равна нулю. Взносы выплачиваются в конце каждого месяца по 4000 руб. Определить доходность лизинговой операции.

8.3. Пусть доходность лизингодателя равна 15% годовых. Взносы выплачиваются раз в году. Налог на прибыль составляет 24%. Построить график зависимости стоимости лизинга от срока лизинга.

8.4. Оборудование может быть предоставлено в аренду на шесть лет. Процентная рыночная кредитная ставка $i = 14\%$. Взносы выплачиваются в конце каждого года. Годовые выплаты представлены в таблице:

Год	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й
Выплата, тыс. руб.	32	36	40	44	46	52

Стоимость оборудования — 180 тыс. руб. Срок амортизации равен 10 годам. С другой стороны, при покупке этого оборудования можно выплатить аванс в 40 тыс. руб., а на оставшуюся сумму взять кредит на шесть лет. Годовая ставка кредита r = 9% (r = 2%) годовых, проценты выплачиваются в конце каждого года, сумма кредита выплачивается в конце срока. Ставку налога на прибыль принять равной g = 24%. Выбрать наиболее выгодный для покупателя метод приобретения оборудования.

Глава 9 УПРАВЛЕНИЕ КАПИТАЛОМ

9.1. Управление собственным капиталом

Основной целью управления капиталом является его увеличение. В § 4.2 показано, что методы комплектования собственного капитала предприятия во многом определяются формой собственности. Наиболее характерным типом собственного капитала является акционерный капитал.

Собственный капитал предприятия — это сумма уставного капитала, резервного фонда и нераспределенной прибыли, т.е. собственный капитал состоит из суммы средств, вложенных участниками в процессе создания предприятия, и накопленных средств.

Собственный капитал предприятия делится на собственный основной капитал и собственный оборотный капитал.

Собственный основной капитал предприятия заложен в разнообразные виды внеоборотных активов, а именно в основные средства, нематериальные активы, незавершенное строительство, долгосрочные инвестиции и т.д. Сумма собственного основного капитала предприятия равна разности между общей суммой внеоборотных активов предприятия и суммой долгосрочного заемного капитала, используемого для финансирования внеоборотных активов этого предприятия:

$$\begin{matrix}\textit{Сумма собственного} \\ \textit{основного капитала} \\ \textit{предприятия}\end{matrix} = \begin{matrix}\textit{Общая сумма} \\ \textit{внеоборотных} \\ \textit{активов предприятия}\end{matrix} - \begin{matrix}\textit{Часть суммы} \\ \textit{долгосрочного} \\ \textit{заемного капитала}\end{matrix}.$$

Собственный оборотный капитал предприятия заложен в разнообразные виды оборотных активов, а именно: в запасы сырья, материалов и полуфабрикатов, объем незавершенного производства, запасы готовой продукции, текущую дебиторскую задолженность, денежные активы и т.д. Сумма собственного оборотного капитала предприятия равна общей сумме оборотных активов предприятия за вычетом суммы долгосрочного заемного капитала, используемого для финансирования оборотных активов этого предприятия, и суммы краткосрочного заемного капитала:

$$\begin{matrix}\textit{Сумма собственного}\\\textit{оборотного капитала}\\\textit{предприятия}\end{matrix} = \begin{matrix}\textit{Общая сумма}\\\textit{оборотных}\\\textit{активов}\\\textit{предприятия}\end{matrix} - \begin{matrix}\textit{Часть суммы}\\\textit{долгосрочного}\\\textit{заемного}\\\textit{капитала}\end{matrix} - \begin{matrix}\textit{Сумма}\\\textit{кратко-}\\\textit{срочного}\\\textit{заемного}\\\textit{капитала}\end{matrix}.$$

При управлении собственным капиталом, так же как и при управлении инвестиционным проектом, рассматриваются *четыре функции управления*:

- планирование;
- контроль;
- контроллинг;
- принятие решения.

Особую роль здесь играет ф у н к ц и я п л а н и р о в а н и я.

Первый этап планирования посвящается формированию целей. В качестве основной цели может быть поставлено увеличение собственного капитала на заданную величину.

Вторым этапом составления плана управления капиталом является анализ. При этом прежде всего оцениваются собственные средства, которые можно получить на начало планового периода за счет внутренних источников. К внутренним источникам относятся чистая прибыль и амортизационные отчисления, т.е. величина внутренних источников B за период равна сумме чистой прибыли П и амортизационным отчислениям A за тот же период:

$$B = \Pi + A.$$

При этом надо иметь в виду, что увеличение амортизационных отчислений уменьшает чистую прибыль, так как эти отчисления уменьшают налогооблагаемую базу. Однако за счет налоговой защиты общее значение собственного капитала B увеличивается при увеличении амортизационных отчислений. Рассмотрим этот эффект на примере.

■ **Пример 9.1.** Налогооблагаемая база предприятия без учета амортизационных отчислений составляет 3,6 млн руб. Планируется, что вся чистая прибыль будет направлена на повышение собственного капитала предприятия. Имеются две альтернативы по списанию амортизации: обычная амортизация — 800 тыс. руб.; ускоренная амортизация — 1600 тыс. руб.

Ставка налога на прибыль равна 24%.

Найти прирост собственного капитала для двух вариантов.

Решение.

Налогооблагаемая база для первого и второго вариантов составит:

1) $C_1 = 3600 - 800 = 2800$ тыс. руб.;

2) $C_2 = 3600 - 1600 = 2000$ тыс. руб.

Чистая прибыль после выплаты налога на прибыль:

1) $П_1 = C_1(1-g) = 2800(1-0,24) = 2128$ тыс. руб.;

2) $П_2 = C_2(1-g) = 2000(1-0,24) = 1520$ тыс. руб.,

где g — ставка налога на прибыль.

Прирост собственного капитала составил:

1) $B_1 = П_1 + A_1 = 2128 + 800 = 2928$ тыс. руб.;

2) $B_2 = П_2 + A_2 = 1520 + 1600 = 3120$ тыс. руб.

Таким образом, во втором случае при ускоренной амортизации прирост собственного капитала выше. □

Если этих средств для выполнения поставленных целей не хватает, то рассматривается возможность привлечения внешних собственных средств. К внешним собственным средствам относят привлеченный дополнительный паевой капитал владельцев предприятия, привлеченные средства за счет дополнительной эмиссии акций и т.д.

На *третьем этапе* предпринимаются поиск и анализ альтернатив. Например, в качестве альтернатив рассматриваются несколько инвестиционных проектов. Из имеющегося числа предложений выбирают те проекты, которые наилучшим образом удовлетворяют поставленным целям. При выборе проектов могут быть использованы, например, интегральные показатели.

И наконец, на *четвертом этапе* строят прогнозы, представляющие собой предсказания о будущем положении дел. Прогнозы составляются на основе практического опыта и теоретических знаний.

После завершения всех этапов разрабатывается плановая документация.

Контроль предусматривает систематическую проверку соответствия плановых и реальных показателей, полученных в результате завершения тех или иных этапов реализации плана.

Информация о ходе выполнения содержится в месячных и квартальных финансовых отчетах. Проверка реального хода работ должна проводиться не реже одного раза в месяц. По результатам контроля принимается решение о продолжении работ или об изменении плана работ и его корректировке.

Основной функцией контроллинга является координация по обеспечению целенаправленного управления собственным капиталом. Задачей контроллинга, в частности, является наилучшее распределение средств между отдельными альтернативами.

На этапе принятия решения руководитель определяет дальнейшие действия для достижения поставленной цели. Для принятия решения используется информация, получаемая в результате планирования, контроля и контроллинга. На основе этой информации создается модель принятия решения. Анализ модели позволяет руководителю принять правильные решения.

9.2. Дивидендная политика

Формирование доли акционеров в распределении чистой прибыли организации называется ***дивидендной политикой***.

Важным вопросом при формировании дивидендной политики предприятия является проблема влияния этой политики на величину стоимости предприятия. Дивидендная политика влияет также на величину заемного капитала. Например, если фирма выплачивает низкие дивиденды, то на реализацию инвестиционных проектов может быть использована чистая прибыль предприятия. Другая фирма финансирует проекты за счет заемного капитала. Это позволяет выплачивать повышенные дивиденды. Еще одной формой инвестиций является выпуск дополнительных акций.

Существует т р и ш к о л ы дивидендной политики: *консервативная*, *центристская* и *радикальная*.

Консерваторы считают, что увеличение дивидендов ведет к увеличению стоимости предприятия. Радикалы полагают, что увеличение дивидендов снижает стоимость фирмы. Центристы утверждают, что дивидендная политика никак не влияет на стоимость предприятия.

Позиция консерваторов состоит в утверждении необходимости выплаты акционерам высоких дивидендов. Среди них бытует мнение о полном распределении прибыли на дивиденды. Утверждается, что это в короткое время утроит рыночную стоимость акционерного капитала. Одним из доводов консерваторов в пользу своих позиций является увеличение риска при капитализации чистой прибыли. Дивиденды, утверждают они, являются наличными деньгами, а прирост капитала предприятия «в лучшем случае журавль в небе». Действительно, дивиденды можно сделать высокими и повысить надежность, но контролировать с той же уверенностью надежность акций не представляется возможным. Однако напомним, что акционеры обладают правом выбора. Они могут продать свои акции на фондовом рынке и получить свою долю в капитале предприятия в виде денег. Другим доводом консерваторов является несовершенство рынка. Модильяни и Миллер построили свои выводы на предположении о существовании совершенного эффективного рынка капиталов. Однако реальный рынок далеко не совершенен. Обычно инвесторы на несовершенном рынке не получают полной информации о прибылях фирмы. В таких условиях определить фирмы с высокими доходами невозможно. Тогда важнейшим критерием оценки фирмы выступают дивиденды. Если фирма способна выплачивать высокие дивиденды, значит, она имеет высокие доходы, в противном случае через короткий промежуток времени эта фирма разорилась бы. Эта одна из причин, по которой инвесторы предпочитают покупать акции с высокими дивидендами. Другой причиной, побуждающей инвесторов к приобретению акций с высокими дивидендами, является возможность использования этих дивидендов на повседневную жизнь. Конечно, акционер мог бы получать эти деньги, продавая время от времени часть своих акций, однако для него удобнее и дешевле вариант с получением дивидендов.

Левые радикалы утверждают, что если дивиденды облагаются более высокими налогами, чем прирост капитала, то фирма должна выплачивать самые низкие дивиденды. Имеющиеся деньги должны реинвестироваться или направляться на выкуп акций. Ясно, что такая дивидендная политика может быть принята только при превышении налога по дивидендам над налогом на прирост капитала. Например, в Соединенных Штатах Америки по современному законодательству эти налоги равны. Поэтому позиции левых радикалов в США после принятия соответствующего закона существенно ослабли.

Основателями центристского направления в дивидендной политике являются Модильяни и Миллер. В своей работе, опубликованной в 1961 г., они показали, что без учета налогов, операционных издержек и других несовершенств рынка дивидендная политика не влияет на стоимость предприятия. Тем не менее до сих пор ведутся споры по поводу влияния дивидендной политики на стоимость предприятия.

Рассмотрим *основные положения теории Модильяни и Миллера.*

Основой операции является выпуск новых акций, их продажа и выплата дивидендов старым акционерам. Пусть стоимость фирмы равна A руб. Старые акционеры в виде дивидендов получают сумму $k \cdot A$ руб., где k — доля стоимости предприятия, выплаченная в виде дивидендов. На эту же сумму проданы новые акции. Поэтому общая стоимость предприятия не изменилась.

Положим, что количество акций предприятия у старых акционеров равно $N_{\text{СТ}}$, тогда старая стоимость одной акции равна

$$M_{\text{СТ}} = \frac{A}{N_{\text{СТ}}}.$$

Новая стоимость акции будет равна оставшейся доле стоимости предприятия, деленной на количество акций у старых акционеров, т.е.

$$M_{\text{НОВ}} = \frac{A - kA}{N_{\text{СТ}}} = \frac{A(1-k)}{N_{\text{СТ}}} = M_{\text{СТ}}(1-k).$$

Для определения количества вновь выпущенных акций надо сумму, полученную от их продажи, разделить на новую стоимость каждой акции:

$$N_{\text{НОВ}} = \frac{kA}{(1-k)A} N_{\text{СТ}} = \frac{k}{1-k} N_{\text{СТ}}.$$

Общее количество акций предприятия после выпуска новых акций равно

$$N = N_{\text{СТ}} + N_{\text{НОВ}} = N_{\text{СТ}} + \frac{k}{1-k} N_{\text{СТ}} = \frac{N_{\text{СТ}}}{1-k}.$$

Из сказанного следует, что стоимость акций понизилась в $(1-k)$ раз.

Таким образом, новые акционеры купили акции, цена которых равна их стоимости. Что же изменилось для старых акционеров? Они потеряли капитал за счет снижения цены акций, но получили на ту же сумму дивиденды. Возможно, старые акционеры что-то потеряли бы, если это был бы единственный способ получения денег. Однако существует фондовый рынок, где акционеры могут получить свои деньги, продав акции. Отсюда следует, что акционер располагает свободой выбора и может выбрать ту операцию, которую считает для себя более выгодной. Возможность такого поведения инвесторов приводит к тому, что фирмам нет нужды заботиться о своей дивидендной политике. Таким образом, дивиденды становятся побочным продуктом инвестиционной политики.

■ **Пример 9.2.** Стоимость предприятия составляет 100 млн руб. Количество акций равно 1 млн шт. Предприятию для инвестиций в новый проект необходимо 10 млн руб., которые оно имеет в виде денежных средств. С другой стороны, предприятию необходимо выплатить такую же сумму в виде дивидендов. Было принято решение: недостающую сумму покрыть за счет выпуска новых акций.

Определить стоимость одной акции до и после проведения операции, а также общее количество акций до и после проведения операции.

Решение.

Стоимость одной акции до проведения операции равна

$$M_{\text{СТ}} = \frac{100}{1} = 100 \text{ руб.}$$

Так как $k = \frac{10}{100} = 0{,}1$, то новая цена акции будет равна

$$M_{\text{НОВ}} = 100 \cdot (1 - 0{,}1) = 90 \text{ руб.}$$

Общее количество акций предприятия после выпуска новых акций равно

$$N = \frac{1\,000\,000}{1 - 0{,}1} = 1\,111\,111 \text{ акций.} \quad \square$$

9.3. Леверидж

Структура капитала фирмы зависит от доли заемного капитала в ее общем капитале. Главной задачей менеджера является выбор такой структуры капитала, при которой стоимость фирмы становится максимальной. Однако возможны условия, при которых стоимость фирмы не изменяется при изменении структуры, например, отсутствие налогов, одинаковые условия для всех при предоставлении кредитов и т.д. *Первое правило Модильяни и Миллера* гласит, что стоимость фирмы определяется ее реальными активами и не зависит от структуры капитала.

Подтверждается первое правило Модильяни и Миллера следующим простым примером. Пусть стоимость всех акций фирмы равна A руб. Старый долг фирмы составляет $K_{\text{СТ}}$ руб. Совокупная стоимость всех ценных рыночных бумаг фирмы составляет

$$U = A + K_{\text{СТ}}.$$

Предположим, что фирма берет дополнительный долг $K_{\text{ДОП}}$. Это дополнительный долг выплачивается акционерам в виде дивидендов. Тогда стоимость собственного капитала уменьшилась на величину $K_{\text{ДОП}}$ и составила $A - K_{\text{ДОП}}$. Новая совокупная стоимость всех ценных бумаг фирмы будет равна

$$A - K_{\text{ДОП}} + K_{\text{СТ}} + K_{\text{ДОП}} = U.$$

Таким образом, совокупная стоимость всех ценных рыночных бумаг фирмы не изменилась. Этого и следовало ожидать, так как стоимость реальных активов не изменилась.

Акции фирмы, капитал которой состоит из собственного и заемного капиталов, называются ***левериджированным собственным капиталом***.

Основное условие, при котором верно первое правило Модильяни и Миллера, — это наличие совершенного рынка капитала. Однако однозначного определения совершенного рынка капитала не существует. Поэтому некоторые экономисты определяют его как рынок, на котором справедливо первое правило Модильяни и Миллера.

Второе правило Модильяни и Миллера гласит, что норма доходности обыкновенных акций левериджированной фирмы увеличивается пропорционально отношению заемного капитала к собственному. Действительно, пусть капитал предприятия формируется из собственного и заемного капиталов. Отношение заемного капитала к собственному равно $\frac{K}{C}$. Доходность всего капитала предприятия обозначим a, а стоимость кредита — r. Тогда норма прибыли на собственный капитал i будет определяться соотношением

$$i = \frac{\Pi}{C} = \frac{\Pi_{\text{С}} + \Pi_{\text{К}}}{C} = \frac{aC + (a - r)K}{C} = a + \frac{K}{C}(a - r),$$

где $\Pi = \Pi_C + \Pi_K$ — суммарная прибыль за год, состоящая из прибыли от собственного капитала Π_C и из прибыли от заемного капитала Π_K; $a - r$ — доходность по заемному капиталу.

Необходимым условием увеличения нормы доходности собственного капитала является превышение нормы доходности всего капитала предприятия стоимости кредита, т.е. должно выполняться неравенство

$$a > r.$$

Второе правило Модильяни и Миллера не учитывает рисков при увеличении займов. Ясно, что при увеличении займов возрастает риск их невозврата и фирме придется платить премию за риск. А это, в свою очередь, приведет к уменьшению роста нормы доходности собственного капитала. Зависимость нормы доходности собственного капитала от отношения заемного капитала к собственному будет отличаться от линейной, указанной во втором правиле Модильяни и Миллера. В общем случае это может привести к уменьшению нормы доходности собственного капитала при больших отношениях заемного капитала к собственному. Таким образом, возникает возможность оптимизации доли собственного капитала.

9.4. Оптимальная структура капитала

В тех случаях, когда стоимость кредита увеличивается при увеличении объемов заемного капитала, возможна оптимизация этих объемов. При этом можно указать такую долю заемного капитала по отношению к собственному, при котором норма прибыли на собственный капитал будет оптимальной (максимальной).

Пусть капитал предприятия формируется из собственного и заемного капиталов. Доля кредита равна γ, а $(1-\gamma)$ — доля собственного капитала. Доходность всего капитала предприятия обозначим a, $r(\gamma)$ — стоимость кредита, которая в общем случае является функцией его доли γ, причем

$$a > r(\gamma), \quad 0 \le \gamma < 1. \tag{9.1}$$

Тогда норма прибыли на собственный капитал i будет определяться соотношением

$$i = \frac{\Pi}{C} = \frac{\Pi_C + \Pi_K}{C} = \frac{aC + \left(a - r(\gamma)\right)K}{C} = a + \frac{K}{C}\left(a - r(\gamma)\right),$$

где C — собственный капитал; K — заемный капитал; $\Pi = \Pi_C + \Pi_K$ — суммарная прибыль за год, состоящая из прибыли от собственного капитала Π_C и прибыли от заемного капитала Π_K; $a - r(\gamma)$ — доходность по заемному капиталу.

Если весь капитал обозначить k, то $K = \gamma \cdot k$, а $C = (1-\gamma)k$. Тогда формула для нормы прибыли на собственный капитал приобретает вид

$$i = a + \frac{\gamma}{1-\gamma}\big(a - r(\gamma)\big). \qquad \textbf{(9.2)}$$

Взяв от нормы прибыли на собственный капитал **(9.2)** производную по γ и приравняв ее нулю, получим

$$\frac{di}{d\gamma} = \frac{d\frac{\gamma}{1-\gamma}\big(a - r(\gamma)\big)}{d\gamma} = \frac{a - r(\gamma)}{(1-\gamma)^2} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \cdot \frac{dr(\gamma)}{d\gamma}; \qquad \textbf{(9.3)}$$

$$r'(\gamma) \cdot \gamma^2 - r'(\gamma) \cdot \gamma + a - r(\gamma) = 0. \qquad \textbf{(9.4)}$$

Решив это уравнение относительно γ, получим ординату экстремальной точки.

Рассмотрим частный случай линейной зависимости стоимости кредита $r(\gamma)$ от доли кредита γ, имеющий вид

$$r(\gamma) = r_0 + b \cdot \gamma. \qquad \textbf{(9.5)}$$

Подставив **(9.5)** в **(9.4)**, получим

$$b \cdot \gamma^2 - b \cdot \gamma + a - r_0 - b\gamma = 0.$$

Введем обозначение:

$$a - r_0 = \delta, \qquad \textbf{(9.6)}$$

тогда

$$\gamma^2 - 2\gamma + \frac{\delta}{b} = 0; \qquad \textbf{(9.7)}$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\frac{\delta}{b}}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\delta}{b}}.$$

Первый корень не имеет финансового смысла, так как он лежит вне интервала $0 \le \gamma < 1$. Поэтому оставляем решение

$$\gamma_2 = 1 - \sqrt{1 - \frac{\delta}{b}}. \qquad \textbf{(9.8)}$$

Поскольку значение под корнем должно быть положительным, то оптимальное решение будет иметь место только в случае

$$1 - \frac{\delta}{b} > 0; \qquad b > \delta. \qquad \textbf{(9.9)}$$

Норма прибыли на собственный капитал **(9.2)** в экстремальной точке рассчитывается по формуле

$$i_0 = a + \frac{1-\sqrt{1-\frac{\delta}{b}}}{1-\left(1-\sqrt{1-\frac{\delta}{b}}\right)}\left(a - r_0 - b\left(1-\sqrt{1-\frac{\delta}{b}}\right)\right);$$

$$i_0 = a + b\frac{1-\sqrt{1-\frac{\delta}{b}}}{\sqrt{1-\frac{\delta}{b}}}\left(\frac{\delta}{b} - 1 + \sqrt{1-\frac{\delta}{b}}\right);$$

$$i_0 = a + b\left(1-\sqrt{1-\frac{\delta}{b}}\right)\left(1-\sqrt{1-\frac{\delta}{b}}\right) = a + b\left(1-\sqrt{1-\frac{\delta}{b}}\right)^2. \quad \textbf{(9.10)}$$

Функция нормы прибыли на собственный капитал для линейной стоимости кредита **(3.25)** приобретает вид

$$i = a + \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(a - r_0 - b\cdot\gamma\right) = a + \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(a - r_0\right) - \gamma\frac{\gamma}{1-\gamma}b. \quad \textbf{(9.11)}$$

Графики функций $\frac{\gamma}{1-\gamma}\left(a-r_0\right)$ и $\gamma\frac{\gamma}{1-\gamma}b$ при указанных ограничениях **(9.11)** и **(9.9)** и их разность представлены на рис. 9.1.

Координаты точки пересечения могут быть найдены из уравнения:

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}\left(a-r_0\right) = \gamma\frac{\gamma}{1-\gamma}b; \quad \gamma_n = \frac{a-r_0}{b} = \frac{\delta}{b}.$$

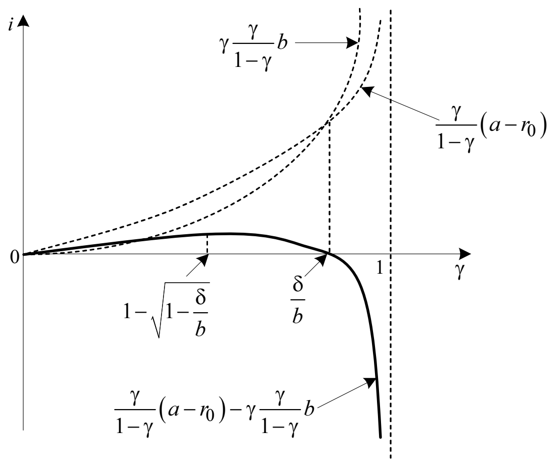


Рис. 9.1

Функция нормы прибыли на собственный капитал i отличается от представленной на рис. 9.1 функции слагаемым a. График функции i от доли кредита γ представлен на рис. 9.2.

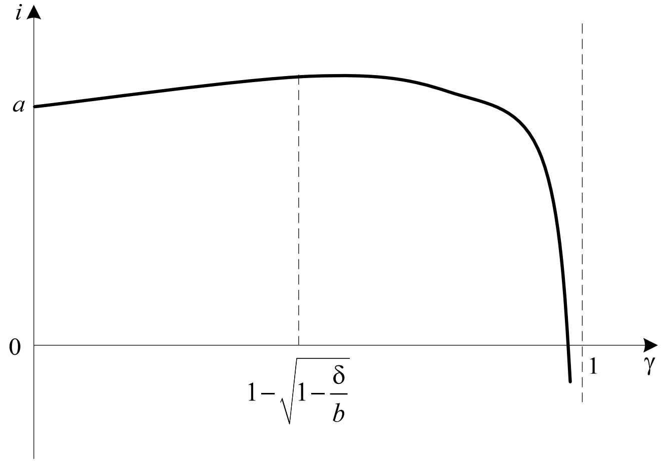


Рис. 9.2

Стоимость заемного капитала в оптимальной точке будет равна

$$r_{\text{opt}} = r_0 + b\left(1-\sqrt{1-\frac{\delta}{b}}\right). \qquad \textbf{(9.12)}$$

■ **Пример 9.3.** Предприятие формирует свой капитал из собственного и заемного капиталов. Доходность по всему капиталу предприятия равна 25%. Собственный капитал предприятия составляет 100 млн руб. Цена заемного капитала изменяется по линейному закону от его доли:

А) $r = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot \gamma$;

Б) $r = 0{,}1 + 0{,}1 \cdot \gamma$.

Определить оптимальную величину заемного капитала и его стоимость, а также оптимальную норму прибыли на собственный капитал.

Решение.

▶ *Вариант А*: $r = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot \gamma$. По формуле **(9.8)** определяем оптимальное значение доли заемного капитала:

$$\gamma_2 = 1-\sqrt{1-\frac{\delta}{b}} = 1-\sqrt{1-\frac{0{,}25-0{,}1}{0{,}2}} = 1-\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \cdot$$

Собственный капитал равен $\Pi_c = (1-\gamma)\cdot k = 0{,}5\cdot k$. Так как Π_c = 100 млн руб., то суммарный капитал k =200 млн руб.

Заемный капитал равен $\Pi_k = \gamma \cdot k = 0{,}5 \cdot 200 = 100$ млн руб.

Стоимость заемного капитала находим по формуле **(9.12)**:

$$r_{\text{opt}} = r_0 + b\left(1-\sqrt{1-\frac{\delta}{b}}\right) = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}2, \text{ или } 20\%.$$

Оптимальная норма прибыли на собственный капитал определяется соотношением **(9.10)**:

$$i_0 = a + b\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\delta}{b}}\right)^2 = 0,25 + 0,2 \cdot 0,25 = 0,3, \text{ или } 30\%.$$

▶ *Вариант Б*: $r = 0,1 + 0,1 \cdot \gamma$. Так как для этого случая $b = 0,1$, а $\delta = a - r_0 =$ $= 0,25 - 0,1 = 0,15$, то соотношение **(9.9)** не выполняется и оптимальное решение отсутствует. □

9.5. Выбор структуры капитала

Как показано выше, в общем случае дать рекомендации по выбору отношения заемного капитала к собственному в виде одной цифры далеко не всегда представляется возможным. В одних случаях бывает выгодно использовать заемный капитал, в других — акционерный. При выборе структуры капитала могут быть использованы четыре критерия, предложенные в книге [6]. К этим критериям относятся:

1) *налоговая защита*, уменьшающая стоимость займа за счет выплат по этому займу из налогооблагаемой прибыли. Займы дают преимущества тем фирмам, которые умеют и имеют возможность использовать налоговую защиту. При этом стоимость краткосрочных займов может быть чрезвычайно низкой величиной за счет отнесения затрат по займам на себестоимость продукции. Необходимо иметь в виду, что помимо выплат по займам налоговой защите подлежат и другие выплаты, например амортизационные отчисления. Поэтому стоимость займов на покупку амортизируемого оборудования понижается также за счет увеличения чистой прибыли от амортизации;

2) *деловой риск предприятия*, при увеличении которого возможно возникновение финансовых трудностей, может привести к банкротству. При высоком риске необходимо платить премию за риск, т.е. плата за кредит в этом случае обычно увеличивается. Поэтому фирмы с высоким деловым риском выпускают меньше долговых обязательств;

3) *ликвидность активов предприятия*, показывающая, насколько быстро и без потерь можно продать эти активы. Например, нематериальные активы при возникновении финансовых трудностей быстро теряют свою стоимость, поэтому предприятия с высокой долей нематериальных активов делают меньше займов, чем предприятия, имеющие ликвидные активы и большой объем налогооблагаемой прибыли. Если у предприятия много ликвидных активов, то займов можно делать больше, так как при возникновении финансовых сложностей их можно решить за счет быстрой продажи ликвидных активов;

4) *финансовый заслон, обеспечивающий легкий доступ к финансам.* Обычно финансовый заслон имеют предприятия с высоким рейтингом надежности. Эти предприятия обладают хорошими инве-

стиционными, технологическими и производственными решениями. Эффективность инвестиций этих предприятий высокая.

Приведенные критерии дают основания для принятия разумных решений об отношениях заемного и акционерного капиталов. При этом менеджер может выбрать хорошую для данного предприятия долю заемного капитала в общем капитале.

9.6. Средневзвешенная и предельная стоимости капитала

Стоимость смешанного капитала измеряется его средневзвешенной стоимостью.

Средневзвешенная стоимость капитала — средневзвешенная величина из стоимостей капитала по различным источникам средств, взвешенная по доле каждого из источников в общей сумме инвестиций:

$$\bar{r} = \sum_{j=1}^{m} x_j r_j,$$

где x_j — доля капитала, полученного из источника j; r_j — стоимость капитала из источника j; m — общее количество источников.

■ **Пример 9.5.** Капитал акционерного общества в сумме 200 млн руб. формируется из акционерного и заемного капиталов; 80 млн руб. получено за счет заемного капитала, стоимость которого равна 12% годовых; 120 млн руб. получено за счет эмиссии акций, рыночная цена которых составляет 42 руб. за акцию. Величина дивиденда на момент расчета составила 6 руб. Ожидается рост размера дивиденда, равный 5% в год.

Определить средневзвешенную стоимость капитала.

Решение.

Стоимость капитала, полученного за счет эмиссии акций, равна

$$r_{OA} = \frac{6(1+0,05)}{42} + 0,05 = 0,2, \text{ или } 20\% \cdot$$

Средневзвешенная стоимость капитала

$$\bar{r} = \frac{120}{200} \cdot 0,2 + \frac{80}{200} \cdot 0,12 = 0,168, \text{ или } 16,8\% \cdot$$

Таким образом, средневзвешенная стоимость капитала заключена между стоимостью акционерного и заемного капиталов. □

Предельная цена капитала — цена, равная норме доходности этого капитала. При превышении средневзвешенной цены капитала предельной цены капитала предприятие будет получать убытки. Поэтому важно, чтобы при изменении структуры капитала его стоимость не превысила предельной цены. Такая ситуация может сложиться, например, при эмиссии новых акций.

Рассмотрим возможность повышения средневзвешенной цены капитала на примере.

■ **Пример 9.6.** Акционерное общество, представленное в примере 9.2, собирается осуществить новую эмиссию акций на 100 млн руб. Финансовая компания, организующая размещение новой эмиссии, намерена продать акции по 42 руб. и расплатиться с АО по 37,8 руб. за акцию.

Определить стоимость вновь привлекаемого капитала и средневзвешенную стоимость.

Решение.

Затраты на осуществление эмиссии для АО составят (см. § 5.2)

$$g = \frac{42 - 37,8}{42} = 0,1.$$

Стоимость вновь привлекаемого капитала для АО равна

$$r_{\text{нк}} = \frac{0,2 - 0,05 \cdot 0,1}{1 - 0,1} = 0,2167, \text{ или } 21,67\%.$$

Средневзвешенная стоимость капитала будет равна

$$\overline{r} = \frac{120}{300} \cdot 0,2 + \frac{100}{300} \cdot 0,2167 + \frac{80}{300} \cdot 0,12 = 0,1842, \text{ или } 18,42\% \cdot$$

Следует обратить внимание на то, что стоимости капитала для предприятия, полученные от акций одного типа, отличаются друг от друга. Это связано с тем, что за вновь эмитированные акции предприятие заплатило дополнительную сумму за их размещение.

Поскольку средневзвешенная стоимость капитала предприятия увеличилась, следует провести анализ на норму доходности нового капитала. Если получившаяся норма доходности удовлетворяет предпринимателя, то новую структуру капитала следует принять. □

Упражнения

ЗАДАЧИ

9.1. Выбрать метод амортизации с точки зрения наибольшего увеличения капитала предприятия, если при налогооблагаемой базе без учета амортизационных отчислений, равной 12 млн руб., и стоимости амортизируемого оборудования, равной 8 млн руб., при обычной амортизации амортизационные отчисления составят 5% в год от стоимости оборудования, а при ускоренной амортизации — 10% в год. Планируется, что вся чистая прибыль будет направлена на повышение собственного капитала предприятия.

9.2. Стоимость одной акции предприятия равна 250 руб. Общее количество акций равно 100 тыс. шт. Для выплаты дивидендов в размере 5 млн руб. предприятие выпускает новые акции. Определить стоимость одной акции, а также общее количество акций после проведения операции.

9.3. Предприятие формирует свой капитал из собственного и заемного капиталов. Доходность с учетом инфляции по всему капиталу предприятия равна 25%. Собственный капитал предприятия составляет 100 млн руб. Цена заемного капитала изменяется по линейному закону от его доли $r = 0{,}1 + 0{,}26 \cdot \gamma$, темп инфляции равен 30% в год. Определить оптимальную величину заемного капитала и его стоимость, а также оптимальную норму прибыли на собственный капитал при:

а) наличии налоговой защиты и налоге на прибыль 24%;

б) отсутствии налоговой защиты.

9.4. Акционерное общество намерено осуществить новую эмиссию акций на 25 млн руб. Финансовая компания, организующая размещение новой эмиссии, намерена продать акции по 120 руб. и расплатиться с АО по 108 руб. за акцию. Капитал общества до эмиссии составляет 150 млн руб., причем заемный капитал равен 50 млн руб. Стоимость заемного капитала — 14,5% годовых. Рыночная цена акций до эмиссии равна 120 руб. Величина дивиденда на момент расчета составила 18 руб. на акцию. Ожидается рост размера дивиденда, равный 8% в год. Определить стоимость вновь привлекаемого капитала и его средневзвешенную стоимость.

Глава 10 КАПИТАЛЬНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ

10.1. Объекты и субъекты капитальных вложений, их права, обязанности и ответственность

Закон об инвестиционной деятельности в Российской Федерации, осуществляемый в форме капитальных вложений (в ред. Федерального закона от 2 января 2000 г. № 22-ФЗ), гласит: «Капитальные вложения — инвестиции в основной капитал (основные средства), в том числе затраты на новое строительство, расширение, реконструкцию и техническое перевооружение действующих предприятий, приобретение машин, оборудования, инструмента, инвентаря, проектно-изыскательские работы и другие затраты».

Объектами капитальных вложений в Российской Федерации являются находящиеся в частной, государственной, муниципальной и иных формах собственности различные виды имущества. При этом может создаваться новое имущество или модернизироваться существующее.

Субъектами капитальных вложений являются инвесторы, заказчики, подрядчики, пользователи объектов капитального вложения и другие лица. Инвесторы осуществляют капитальные вложения на территории Российской Федерации с использованием собственных и привлеченных средств. Инвесторами могут быть физические и юридические лица, государственные органы, органы местного самоуправления и иностранцы.

Заказчики уполномочиваются инвесторами. Это могут быть физические и юридические лица, которые осуществляют реализацию инвестиционных проектов. При этом они не вмешиваются в предпринимательскую или иную деятельность других субъектов инвестиционной деятельности, если иное не предусмотрено договором между ними. Заказчиками могут быть инвесторы. Заказчик, не являющийся инвестором, наделяется правами владения, пользования и распоряжения капитальными вложениями на период и в пределах полномочий, которые установлены договором или государственным контрактом.

Подрядчики — это физические и юридические лица, которые выполняют работы по договору подряда или государственному контракту, заключенным с заказчиком. Подрядчики обязаны иметь лицензию на осуществление ими тех видов деятельности, которые подлежат лицензированию в соответствии с федеральным законом.

Пользователи объектов капитальных вложений — это физические и юридические лица, в том числе иностранные, а также государственные органы, органы местного самоуправления, иностранные государства, международные объединения и организации, для которых создаются указанные объекты. Пользователями объектов капитальных вложений могут быть инвесторы.

Субъект инвестиционной деятельности вправе совмещать функции двух и более субъектов, если иное не установлено договором или государственным контрактом.

Все инвесторы имеют равные права на осуществление инвестиционной деятельности. Инвестор самостоятельно определяет объем, направление и размеры инвестиций.

Субъекты инвестиционной деятельности обязаны соблюдать нормы и стандарты, установленные законами Российской Федерации. Недопустимо нарушение пунктов, установленных договором. В случаях нарушения законов, предусмотренных Уголовным кодексом РФ, инвестор несет уголовную ответственность.

10.2. Формы и методы государственного регулирования инвестиционной деятельности

Государственное регулирование инвестиционной деятельности, осуществляемой в форме капитальных вложений, проводится органами государственной власти Российской Федерации и органами государственной власти субъектов Российской Федерации.

Создание благоприятных условий для развития инвестиционной деятельности в форме капитальных вложений достигается посредством:

- установления субъектам инвестиционной деятельности специальных налоговых режимов, не имеющих индивидуального характера;
- защиты интересов инвесторов;
- предоставления субъектам инвестиционной деятельности льготных условий пользования землей и другими природными ресурсами, не противоречащих законодательству Российской Федерации;

- расширения использования средств населения и иных внебюджетных источников финансирования жилищного строительства и строительства объектов социально-культурного назначения;
- создания и развития сети информационно-аналитических центров, осуществляющих регулярное проведение рейтингов и публикацию рейтинговых оценок субъектов инвестиционной деятельности;
- принятия антимонопольных мер;
- расширения возможностей использования залогов при осуществлении кредитования;
- развития финансового лизинга в Российской Федерации;
- проведения переоценки основных фондов в соответствии с темпами инфляции;
- создания возможностей формирования субъектами инвестиционной деятельности собственных инвестиционных фондов.

Прямое участие государства в инвестиционной деятельности, осуществляемой в форме капитальных вложений, достигается:

- разработкой, утверждением и финансированием инвестиционных проектов, осуществляемых Российской Федерацией совместно с иностранными государствами, а также инвестиционных проектов, финансируемых за счет средств федерального бюджета и средств бюджетов субъектов Российской Федерации;
- формированием перечня строек и объектов технического перевооружения для федеральных государственных нужд и финансированием их за счет средств федерального бюджета (порядок формирования указанного перечня определяется Правительством Российской Федерации);
- предоставлением на конкурсной основе государственных гарантий по инвестиционным проектам за счет средств федерального бюджета, а также за счет средств бюджетов субъектов Российской Федерации;
- размещением на конкурсной основе средств федерального бюджета, а также средств бюджетов субъектов Российской Федерации для финансирования инвестиционных проектов на возвратной и платной основах за пользование ими либо на условиях закрепления в государственной собственности части акций создаваемого акционерного общества;
- проведением экспертизы инвестиционных проектов в соответствии с законодательством Российской Федерации;
- защитой российских организаций от поставок морально устаревших и материалоемких, энергоемких и ненаукоемких технологий, оборудования, конструкций и материалов;
- разработкой и утверждением стандартов, норм и правил, а также осуществлением контроля за их соблюдением;
- посредством выпуска облигационных и гарантированных целевых займов;

• вовлечением в инвестиционный процесс временно приостановленных и законсервированных строек и объектов, находящихся в государственной собственности;

• предоставлением концессий российским и иностранным инвесторам по итогом торгов в соответствии с законодательством Российской Федерации.

Все инвестиционные проекты независимо от источников финансирования и форм собственности объектов капитальных вложений до их утверждения подлежат экспертизе. Экспертиза проводится в целях предотвращения создания объектов, использование которых нарушает права физических и юридических лиц и интересы государства. Банк проводит экспертизу инвестиционного проекта в целях оценки его эффективности и на предмет его финансирования. Все инвестиционные проекты подлежат экологической экспертизе.

10.3. Государственные гарантии и защита капитальных вложений

Государство гарантирует всем инвесторам независимо от форм собственности:

• обеспечение равных прав при осуществлении инвестиционной деятельности;

• гласность в обсуждении инвестиционных проектов;

• право обжаловать в суде решения, действия и бездействие органов государственной власти, органов местного самоуправления и их должностных лиц.

Новые законы, изменяющие размеры ввозимых таможенных пошлин, федеральных налогов и взносов в государственные внебюджетные фонды, приводящие к увеличению совокупной налоговой нагрузки на деятельность инвестора, при вступлении их в силу не применяются в течение срока окупаемости проекта, но не более семи лет с момента начала финансирования инвестиционного проекта. Это положение распространяется на многие инвестиционные проекты.

Правительство Российской Федерации:

• устанавливает критерии оценки изменения в неблагоприятном для инвестора отношении условий взимания ввозимых таможенных пошлин, федеральных налогов и взносов в государственные внебюджетные фонды, режима запретов и ограничений в отношении осуществления капитальных вложений;

• утверждает порядок, определяющий день начала финансирования инвестиционного проекта, в том числе с участием иностранных инвесторов;

• утверждает порядок регистрации приоритетных инвестиционных проектов;

• осуществляет контроль над исполнением инвестором взятых им обязательств по реализации приоритетного инвестиционного проекта в период окупаемости.

Капитальные вложения защищены законом. В отдельных случаях они могут быть национализированы только при условии предварительного и равноценного возмещения государством убытков. Капитальные вложения могут быть реквизированы по решению государственных органов только на условиях, определенных Гражданским кодексом Российской Федерации.

В случае нарушения требований законодательства Российской Федерации, условий договора или государственного контракта субъекты инвестиционной деятельности несут ответственность в соответствии с законом.

10.4. Источники финансирования капитальных вложений

Финансирование капитальных вложений осуществляется инвестором за счет собственных и заемных средств.

Собственный капитал предприятия формируется за счет уставного капитала, резервного фонда и чистой нераспределенной прибыли. Чистая прибыль используется для погашения долговых обязательств, выплат дивидендов по привилегированным и обыкновенным акциям. Оставшуюся часть чистой прибыли совместно с амортизационными выплатами используют для инвестиций. К собственным средствам относят также денежные сбережения и накопления граждан и юридических лиц, а также средства, выплачиваемые органами страхования в виде возмещения потерь от аварий и стихийных бедствий.

К *привлеченным финансовым средствам инвестора* относятся средства, получаемые от продажи акций, паевые и иные взносы членов трудовых коллективов, граждан, юридических лиц. По большому счету привлеченные финансовые средства относятся к собственному капиталу предприятия.

Заемные финансовые средства инвестора включают в себя банковские и бюджетные кредиты, облигационные займы.

Составление капитального бюджета — это поиск новых альтернативных более прибыльных инвестиционных проектов, проведение маркетинговых исследований, анализ технических и экономических характеристик проекта и определение будущего дохода и потенциальной доходности каждого проекта и всех выбранных для реализации проектов.

Тактическими инвестициями называются относительно небольшие вложения. Примером таких инвестиций является покупка станка или автомобиля. Тактические инвестиционные решения не означают отказа компаний от ее современной деятельности в будущем.

Стратегическими инвестициями называются крупные вложения. Стратегические инвестиционные решения могут привести к отказу от деятельности, которой компания занималась до их принятия. Принятие таких решений ведет к значительному риску. Часто такие решения базируются на интуитивных подходах.

Роль стратегии в принятии инвестиционных решений может быть существенной. Выбранные инвестиционные проекты должны соответствовать выбранной стратегии. Если такого соответствия не наблюдается, то надо пересмотреть как проекты, так и стратегию.

10.5. Иностранные инвестиции

В подавляющем большинстве стран мира сложилось благожелательное отношение к иностранным инвестициям. Тем не менее почти всюду существуют определенные ограничения на деятельность иностранного капитала, а во многих странах процедура создания и регистрации компаний связана с их проверкой.

Иностранными инвесторами являются:

- иностранные юридические лица;
- иностранные граждане;
- международные организации;
- иностранные государства.

Использование иностранных инвестиций является объективной необходимостью, обусловленной участием экономики страны в международном разделении труда и переливом капитала в свободные отрасли предпринимательства. Иностранный капитал следует привлекать, создавая благоприятный инвестиционный климат. Потенциальные возможности по привлечению иностранного капитала велики, так как мировой финансовый капитал составляет 3 трлн долл.

Интересы иностранных инвесторов:

- получение доступа к минеральным и сырьевым ресурсам;
- проникновение на потенциально емкий рынок;
- использование сравнительно квалифицированной рабочей силы при относительно низких затратах;
- внедрение результатов научных исследований и технических разработок для создания новых видов товаров.

Интересы отечественных инвесторов:

- получение доступа к зарубежной передовой технологии;
- пополнение внутренних источников накопления;
- использование иностранного опыта управления для повышения эффективности производства;
- уменьшение неоправданного импорта и сокращение расходов в свободно конвертируемой валюте;
- расширение экспорта готовой промышленной продукции.

Все более возрастающую долю составляют портфельные иностранные инвестиции. В России обосновалось более 20 крупных инвестиционных иностранных компаний, занимающихся покупкой российских акций. *Наибольший интерес для западных портфельных инвестиций* представляют следующие сферы экономики России:

- предприятия топливно-энергетического комплекса;
- алюминиевые заводы;
- предприятия связи и коммуникации;
- порты и пароходства;
- предприятия по производству цемента;
- предприятия по производству минеральных удобрений;
- крупные горнодобывающие предприятия;
- предприятия пищевой промышленности.

В то же время участие иностранного капитала в развитии российской экономики вызвало *ряд отрицательных последствий*:

- приоритетное внимание западных фирм к добыче и экспорту энергоносителей способствовало ускоренной исчерпаемости невозобновляемых ресурсов и продемонстрировало слабость государственного регулирования процесса привлечения иностранного капитала, отсутствие жесткого экологического контроля над действием ряда предприятий с иностранными инвестициями;
- участие западного капитала в приватизации государственной собственности на крайне заниженном курсе рубля позволило ему за бесценок скупить ряд важных объектов;
- иностранные капиталовложения нередко используются как способ отмывания «грязных» денег из стран Запада.

Непродуманная политика в привлечении иностранных инвестиций не сможет обеспечить экономические интересы принимающей стороны. Например, Япония строго контролирует и ограничивает привлечение иностранного капитала.

Государство должно уделять серьезное внимание управлению инвестиционным процессом. Так, в целях усиления взаимодействия с зарубежными предпринимателями создан Консультативный совет по иностранным инвестициям при Правительстве РФ с участием иностранных компаний и фирм. Для постоянной работы между заседаниями Совета созданы рабочие группы.

Необходимо помнить, что *контроль в стратегических областях должен оставаться за российской стороной*. К таким отраслям относятся газовая, нефтяная, электроэнергетическая и железнодорожный транспорт.

Главным источником инвестиций в российскую экономику должен стать отечественный частный капитал, как находящийся внутри страны, так и эмигрировавший в последние годы за рубеж. Например, российские инвестиции в Германии в 5 раз превышают немецкие инвестиции в России. Как только в России улучшится инвестиционный климат, сразу же развернется в крупных масштабах реэкспорт капитала. В настоящее время реэкспорт капитала проводится под «крышей» солидных западных фирм. До половины иностранных портфельных инвестиций на российском фондовом рынке составляет реэкспорт капитала.

Предлагается амнистировать владельцев незаконно вывезенного капитала за границу в целях его возврата в Россию. С другой стороны, предлагается привести российское законодательство, определяющее вывоз капитала как незаконный, в соответствие с международным правом.

Вся работа по привлечению иностранных инвестиций осуществляется Минэкономразвития РФ. На это министерство возложены разработка и управление государственной политикой по привлечению иностранных инвестиций, организация и проведение международных тендеров, подготовка договоров и соглашений о разделе продукции, организация работ по международному кредитованию и инвестиционному проектированию.

При Минэкономразвития РФ созданы следующие организационные структуры:

- Государственная регистрационная палата для регистрации предприятий с иностранным капиталом, ведением государственного реестра и аккредитаций иностранных фирм и компаний;
- Российский федеративный центр проектного финансирования и консультационно-технического содействия, осуществляющий экспертизу заявок и предложений в области международного инвестиционного сотрудничества по использованию кредитов, разрабатывающий схемы финансирования и осуществляющий экспертно-консультативное сопровождение инвестиционных проектов;
- Бюро по использованию консультативно-технического содействия Европейского Союза.

Сотрудничество российского и иностранного капиталов пока не имеет больших масштабов. В созданных финансовых группах российские банки воспринимаются не как равноправные партнеры, а как «проводники» на российский рынок. Российские банки и финансовые компании часто играют роль посредников при инвестировании в Россию. Такое посредничество можно разделить на следующие виды:

- покупка ценных российских бумаг для иностранного заказчика;
- трастовое (доверенное) управление ценными российскими бумагами;
- оперирование на российском фондовом рынке с использованием ресурсов иностранного инвестора;
- размещение ценных российских бумаг на иностранных фондовых биржах;
- поиск инвестиционных проектов для иностранных инвесторов;
- предоставление информации и консультирование со стороны российского партнера.

10.6. Режим функционирования иностранного капитала в России

Одной из популярных форм привлечения реальных иностранных инвестиций является создание предприятий с иностранными инвестициями. Такие предприятия существуют в форме совместных с российскими учредителями, но могут полностью принадлежать иностранным собственникам. На базе совместных предприятий производятся товары на основе объединенной собственности при совместном управлении производством. Риск и прибыль такого предприятия делятся между партнерами. При создании совместных предприятий учитываются интересы иностранных и отечественных инвесторов.

Иностранный инвестор обязан соблюдать антимонопольное законодательство Российской Федерации и не допускать недобросовестной конкуренции и деловой ограничительной практики. Например, запрещается создание на территории Российской Федерации коммерческой организации с иностранными инвестициями или филиала иностранного юридического лица для производства какого-либо пользующегося повышенным спросом товара, а затем самоликвидация в целях продвижения на рынок аналогичного товара иностранного происхождения. Запрещаются также соглашения о ценах, о распределении рынков сбыта, об участии в торгах, конкурсах, аукционах.

Иностранному инвестору на территории Российской Федерации предоставляется полная и безусловная защита прав и интересов. Иностранный инвестор имеет право на возмещение убытков, причиненных ему в результате незаконных действий государственных органов, органов местного самоуправления или должностных лиц этих органов.

Иностранный инвестор имеет право осуществлять инвестиции на территории Российской Федерации в любых формах, не запрещенных законом. Оценка вложения капитала в уставный капитал коммерческой организации производится в соответствии с законом и осуществляется в валюте Российской Федерации.

Иностранный инвестор пользуется рядом гарантий, определенных законом.

Иностранный инвестор в силу договора вправе передать свои права и обязанности другому лицу. Если иностранное государство или уполномоченный им государственный орган производят платеж в пользу иностранного инвестора по гарантии, предоставленной иностранному инвестору в отношении инвестиций, осуществляемых им на территории Российской Федерации, и к этому иностранному государству или уполномоченному им государственному органу переходят права иностранного инвестора на указанные инвестиции, то в Российской Федерации такой переход прав считается правомерным.

Имущество иностранного инвестора не подлежит принудительному изъятию, в том числе реквизиции и национализации. При реквизиции и национализации иностранному инвестору выплачивается стоимость имущества.

Спор иностранного инвестора, возникающий в связи с осуществлением инвестиций на территории Российской Федерации, разрешается в соответствии с международными договорами и федеральными законами в суде, в арбитражном суде, в международном арбитраже.

Иностранный инвестор после уплаты предусмотренных законодательством Российской Федерации налогов и сборов имеет право на свободное использование доходов и прибылей на территории Российской Федерации для инвестирования или иных, не противоречащих закону целей. Он имеет также право на беспрепятственный перевод за пределы Российской Федерации доходов, прибыли и других, правомерно полученных денежных сумм в иностранной валюте, в том числе:

- доходов от инвестиций, полученных в виде прибыли, дивидендов и процентов;
- денежных сумм в исполнении обязательств коммерческими организациями с иностранными инвестициями по договорам и другим сделкам;
- денежных сумм, полученных иностранным инвестором в связи с ликвидацией коммерческой организации с иностранными инвестициями;
- компенсаций в связи с реквизицией и национализацией.

Иностранный инвестор, который первоначально ввез на территорию Российской Федерации имущество и информацию в качестве иностранной инвестиции, имеет право на беспрепятственный вывоз указанного имущества и информации за пределы Российской Федерации.

Упражнения

ТЕСТ 10.1

Укажите высказывания, относящиеся к субъектам капитальных вложений.

1. Корпорация.
2. Заказчики.
3. Нефтеперерабатывающий завод.
4. Инвесторы.
5. Подрядчики.
6. Муниципалитет.
7. Пользователи объектов капитального вложения.

ТЕСТ 10.2

Укажите высказывания, относящиеся к интересам иностранных инвесторов в России.

1. Развитие экономики России.
2. Помощь русским коллегам.
3. Использование сравнительно квалифицированной рабочей силы при относительно низких затратах.
4. Проникновение на потенциально емкий рынок.
5. Получение доступа к минеральным и сырьевым ресурсам.

ТЕСТ 10.3

Укажите правильный ответ.

1. Имущество иностранного инвестора в России подлежит национализации без выплаты стоимости этого имущества.
2. Имущество иностранного инвестора в России подлежит национализации при выплате стоимости этого имущества.

Глава 11

ПРЕДПОЧТЕНИЯ ИНВЕСТОРА

11.1. Альтернативы решения

Инвестор планирует свои действия на год. При этом он должен принять решение. Это решение состоит в выборе части благ, которые он потребит сегодня, а также той части благ, которые он инвестирует. Эти инвестиции через год принесут определенный доход. Этот доход инвестор потребит через год.

Для принятия решения инвестор должен провести *анализ существующей ситуации.* Для этого ему понадобятся следующие характеристики:

x_0 — количество потребительских благ, которыми инвестор владеет в начале периода;

x — количество потребляемых благ в начале периода;

$\delta x = x_0 - x$ — остаток потребительских благ после потребления в начале периода (эта величина положительная, если $x_0 > x$, и отрицательная, если $x_0 < x$);

y_1 — количество потребительских благ, которые инвестор получит без влияния рассматриваемой операции в конце периода;

y — количество потребляемых благ в конце периода;

M_0 — количество денежных средств, которыми инвестор владеет в начале периода;

M — количество денежных средств, которыми инвестор будет владеть в начале периода после продажи или покупки остатка потребительских благ;

ψ — цена единицы потребительских благ.

Пусть количество денежных средств M, которыми инвестор будет владеть в начале периода после продажи или покупки остатка потребительских благ, инвестируется под годовую процентную ставку r. При этом инвестор, принимающий решение, должен соблюдать следующие естественные бюджетные ограничения:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \cdot x_0 + M_0 = \psi \cdot x + M;$$

$$t = 1 \quad \Rightarrow \quad \psi \cdot y_1 + M \cdot (1 + r) = \psi \cdot y.$$

Перепишем два этих уравнения в виде

$$y = y_1 + \frac{M}{\psi} \cdot (1 + r); \qquad \frac{M}{\psi} = -x + x_0 + \frac{M_0}{\psi}.$$

Подставив вторую формулу в первую, получим функцию y (количества потребляемых благ в конце периода) от x (количества потребляемых благ в начале периода):

$$y = y_1 + \left(-x + x_0 + \frac{M_0}{\psi} \right) \cdot (1 + r) = y_1 + \left(x_0 + \frac{M_0}{\psi} \right) \cdot (1 + r) - x(1 + r).$$

График этой функции является прямой линией, он представлен на рис 11.1. Называется этот график бюджетной линией. Угловой коэффициент этой прямой равен $-(1 + r)$, т.е.

$$\operatorname{tg} \alpha = -(1 + r).$$

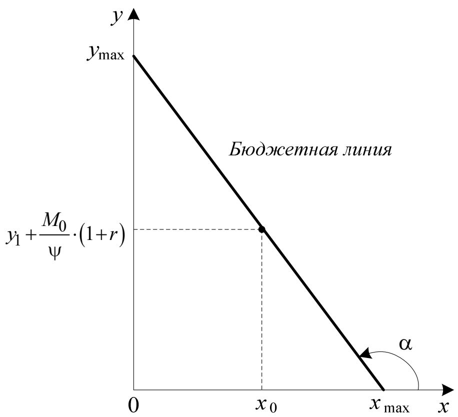


Рис. 11.1. Бюджетная линия

На рис. 11.1 введены следующие обозначения:

x_{max} — максимальное количество потребляемых благ в начале периода при отказе от потребления в конце периода;

y_{max} — максимальное количество потребляемых благ в конце периода при отказе от потребления в начале периода;

$$x_{max} = x_0 + \frac{M_0}{\psi} + \frac{y_1}{1 + r}; \; y_{max} = y_1 + \left(x_0 + \frac{M_0}{\psi} \right) \cdot (1 + r).$$

На графике (см. рис. 11.1) выделена точка, для которой в начале периода потребляется количество потребительских благ x_0, которыми инвестор владеет в начале периода. В конце периода в этом случае потребляются блага, являющиеся суммой двух слагаемых $y_1 + \frac{M_0}{\psi} \cdot (1+r)$. Первое слагаемое — величина потребительских благ, которые инвестор получит без влияния рассматриваемой операции. Второе слагаемое — блага, полученные за счет наращенных к концу периода денежных средств, которыми инвестор владел в начале периода после продажи или покупки остатка потребительских благ.

11.2. Функция полезности

При исследовании принятия инвестиционного решения важнейшим понятием является функция полезности. Изучение поведения инвестора сводится к определению объемов количества потребляемых благ в начале и в конце периода.

При принятии решения инвестор располагает некоторой суммой средств, количеством потребительских благ, которыми инвестор владеет в начале периода, количеством потребительских благ, которые инвестор получит без влияния рассматриваемой операции в конце периода, т.е. инвестор знает свою бюджетную линию, пример которой приведен на рис. 11.1. Математическая модель поведения такого инвестора называется *моделью потребительского выбора.*

В нашем случае потребительский набор состоит из количества потребляемых благ в начале периода *x* и количества потребляемых благ в конце периода *y*. Потребительский набор − это точка в системе прямоугольных координат $x0y$ с координатами (x, y).

Рассматривая два набора $A = (x_1, y_1)$ и $B = (x_2, y_2)$, инвестор может не видеть между ними разницы, а может отдавать предпочтение какому-то из них. Это отношение инвестора к различным наборам потребления называется *выбором инвестора.*

Как же оценить отношение инвестора к различным наборам (x, y)? Для этих целей аналитик присваивает каждому набору (x, y) соответствующую потребительскую оценку этого набора в виде некоторого числа *u*. В этом случае получаем функцию полезности инвестора $u(x, y)$. Функция полезности является основным инструментом при исследовании потребительского выбора.

Пусть набор $A = (x_1, y_1)$ предпочтительнее набора $B = (x_2, y_2)$. Тогда оценка инвестора набора $A = (x_1, y_1)$ предпочтительнее оценки набора $B = (x_2, y_2)$, т.е. $u(A) > u(B)$, следовательно, функция полезности в точке *A* больше, чем в точке *B*. Каждый инвестор имеет свою функцию полезности.

Функция полезности обладает рядом свойств, присущих именно этим функциям.

Возрастание потребления в начале периода при постоянном потреблении в конце периода приводит к росту функции полезности, т.е.

при $x_1 > x$ имеем $u(x_1, y) > u(x, y)$;

при $y_1 > y$ имеем $u(x, y_1) > u(x, y)$.

Из сказанного следует, что первые частные производные из функции полезности по количеству каждой из переменных x и y являются величиной положительной, т.е.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} > 0; \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} > 0. \qquad \textbf{(11.1)}$$

Это свойство функции полезности будем называть *первым свойством.*

Первые частные производные от функции полезности инвестора называются предельными полезностями соответствующих количеств потребляемых благ:

$\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ — предельная полезность количества потребляемых благ в начале периода;

$\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ — предельная полезность количества потребляемых благ в конце периода.

Слово «предельная» означает в данном случае тот факт, что определяют производную как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю приращения аргумента.

Функция полезности должна быть, по крайней мере, дважды дифференцируема.

Вторая частная производная от предельной полезности продукта по той же переменной должна быть отрицательной, т.е. предельная полезность уменьшается при росте этой переменной. Отсюда следует, что вторые частные производные по тому же аргументу должны быть отрицательны, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0. \qquad \textbf{(11.2)}$$

Это свойство функции полезности будем называть *вторым свойством.*

Вторая частная производная от предельной полезности продукта по другой переменной должна быть положительной, т.е. предельная полезность увеличивается при росте другой переменной. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} > 0. \qquad \textbf{(11.3)}$$

Это свойство функции полезности будем называть *третьим свойством.*

Если функция полезности в задаче потребительского выбора не обладает вторым свойством отрицательности второй частной производной по величине одного из количеств потребляемых благ и третьим свойством положительности второй частной производной по величине двух различных количеств потребляемых благ, она тем не менее может описывать реальное поведение инвестора.

11.3. Линии безразличия

Линии уровня функции полезности потребителя называются *линиями безразличия.* Линии уровня получают, положив значение функции равным постоянной величине. В этом случае функция двух переменных становится функцией одной переменной. Эта функция имеет вид

$$u(x, y) = \alpha, \qquad \alpha = \text{const}. \qquad \textbf{(11.4)}$$

График этой функции можно построить в системе координат xOy.

Задаваясь различными значениями постоянной α, можно построить как угодно много линий безразличия. Множество таких линий безразличия называется *картой линий безразличия.*

Линии безразличия, имеющие уровни функции полезности потребителя α_1, α_2 и α_3, изображены на рис. 11.2.

Линии безразличия не касаются и не пересекаются. При увеличении уровня α функции полезности линии безразличия смещаются вправо вверх. Для примера, приведенного на рис. 11.2, справедливо неравенство: $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.

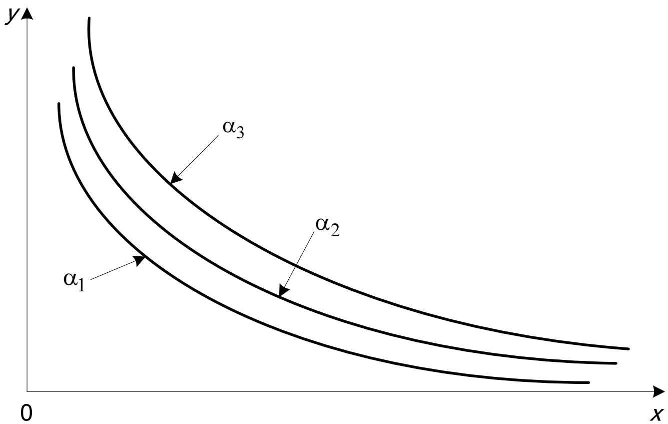


Рис. 11.2. Линии безразличия

Из приведенных выше свойств функции полезности следует, что линия безразличия в системе координат xOy является убывающей и выпуклой вниз функцией. Напомним, что выпуклую вниз функцию называют также *вогнутой функцией.*

Рассмотрим дифференциал функции полезности $u(x, y)$ при движении вдоль линии уровня. При движении вдоль этой линии функция не меняет своих значений, поэтому дифференциал равен нулю. Таким образом,

$$du(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy = 0.$$

Из полученной выше формулы находим значение для полной производной

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \quad \textbf{(11.5)}$$

Так как числитель и знаменатель дроби величины положительные по свойству о положительности первой производной функции полезности, то производная функции безразличия $y = y(x)$ является отрицательной, т.е. эта функция является убывающей.

Общая производная $\left(-\frac{dy}{dx}\right)$ называется предельной нормой замены количества потребляемых благ в начале периода количеством потребляемых благ в конце периода. Так как общая производная величина отрицательная, перед предельной нормой замены стоит знак минус. Норма замены в данной точке (x, y) показывает, с какой скоростью будет изменяться количество потребляемых благ в начале периода количеством потребляемых благ в конце периода. Например, увеличивается количество потребляемых благ в начале периода x. Норма замены показывает скорость уменьшения потребления количества благ в конце периода y.

Если перейти от бесконечно малых приращений dx и dy к конечным приращениям Δx и Δy, то можно записать следующее приближенное равенство:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad \textbf{(11.6)}$$

Сопоставив последнее соотношение с формулой **(11.5)** для полной производной от количества потребляемых благ y в конце периода по количеству потребляемых благ в начале периода x, найдем

$$-\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \quad \textbf{(11.7)}$$

Дробь $\left(-\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ называется нормой замены количества потребляемых благ в начале периода количеством потребляемых благ в конце периода. Норма замены показывает, насколько изменится количество потребляемых благ в конце периода при изменении количества потребляемых благ в начале периода на единицу. Если известна функция полезности $u(x, y)$, то норма замены рассчитывается по формуле **(11.7)**.

■ **Пример 11.1.** Пусть в начале периода потребляется 60 единиц благ, а в конце периода — 90 единиц благ. Функция полезности инвестора задана соотношением

$$u = x \cdot y.$$

Определить величину, на которую инвестор должен увеличить потребление в конце периода при уменьшении потребления в начале периода на шесть единиц.

Решение.

Норма замены первого продукта вторым находят из соотношения **(11.9)**. Так как частная производная от функции полезности по x равна y, а частная производная от той же функции по y равна x, то после подстановки этих данных в формулу **(11.9)** получим

$$-\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{y}{x} = \frac{90}{60} = 1,5.$$

При уменьшении потребления благ x на 6 единиц потребление благ y возрастет на 9 единиц. Действительно,

$$\Delta y = -1,5 \cdot (-6) = 9\,. \ \square$$

11.4. Оптимизация поведения инвестора

Естественно, что инвестор так желает использовать имеющийся у него капитал, чтобы получить максимальную пользу при затрате заданного количества средств, которое мы называли бюджетным ограничением. ***Задачей потребительского выбора*** называется определение такого потребительского набора, который максимизирует функцию полезности потребителя при заданном бюджетном ограничении. Этот набор называют *оптимальным для потребителя*, или *локальным рыночным равновесием потребителя*.

Из сказанного следует, что для рассматриваемого случая сумма средств, потраченных на потребление в начале и в конце периода, не должна превышать бюджетное ограничение. *Бюджет инвестора*, приведенный к началу периода, состоит из суммы трех слагаемых. Первое слагаемое — это количество потребительских благ, которые инвестор получит без влияния рассматриваемой операции в конце периода y_1, дисконтированных на начало периода. Второе слагаемое — это количество потребительских благ x_0, которыми инвестор владеет в начале периода. Третье слагаемое — это количество потребительских благ, которые инвестор может приобрести на деньги M_0, которыми он владеет в начале периода.

Количество потребляемых благ, приведенных к началу периода, состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое x — количество потребляемых благ в начале периода. Второе слагаемое $\frac{y}{1+r}$ — дисконтированное количество потребляемых благ в конце периода.

Таким образом, бюджетное ограничение можно записать в виде

$$x+\frac{y}{1+r}\le\frac{y_1}{1+r}+x_0+\frac{M_0}{\psi}.$$

Таким образом, при помощи математических символов задачу математического выбора можно представить следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y)\to\max \\ \text{при условиях:} \\ x+\dfrac{y}{1+r}\le I, \\ x>0,\quad y>0. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(11.8)}$$

Здесь введено обозначение $I=\frac{y_1}{1+r}+x_0+\frac{M_0}{\psi}$. Условия $x>0,\quad y>0$ называются *общими ограничениями задачи математического программирования*. Они введены, потому что отрицательное потребление лишено смысла.

Множество наборов из двух типов потребления, доступное для инвестора, представляет собой треугольник, ограниченный осями координат и бюджетной прямой $x+\frac{y}{1+r}=I$.

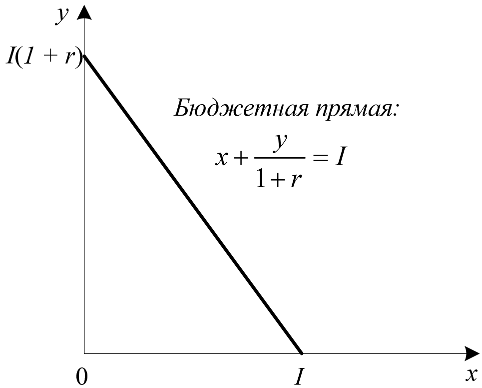


Рис. 11.3. Область допустимых наборов

В процессе анализа потребительского выбора исследователь выбирает ту или иную конкретную функцию полезности. Часто в виде такой функции используют

$$u=x^a\cdot y^b,\ \text{где}\ a+b<1.$$

Рассмотрим два основных свойства задачи потребительского выбора. Первое свойство назовем свойством *A*, а второе — свойством *B*.

Свойство A. Решение задачи $\left(x^0,y^0\right)$ не изменится при любом монотонном преобразовании функции полезности $u = f(x, y)$ и при неизменном бюджетном ограничении.

Монотонным преобразованием функции полезности называется ее умножение на некоторое положительное число, возведение ее в положительную степень, логарифмирование по основанию, большему единице. При монотонном преобразовании функции полезности ее первое свойство, приведенное выше, должно сохраняться, а второе и третье свойства могут теряться или приобретаться. В общем случае если функция полезности в задаче потребительского выбора не обладает вторым и третьим свойствами, она тем не менее может использоваться для анализа поведения потребителя.

Свойство B. Решение задачи потребительского выбора не изменится, если коэффициенты в бюджетном ограничении и доход увеличатся (уменьшатся) в одно и то же число раз. Действительно, коэффициенты в бюджетном ограничении и доход не входят в функцию полезности. Умножение же на положительное число правой и левой частей бюджетного ограничения $x+\frac{y}{1+r}\le I$ делает его эквивалентным самому себе. Таким образом, задача остается той же, что и первоначально.

При решении задачи математического выбора **(11.8)** обычно бюджетное ограничение $x+\frac{y}{1+r}\le I$ заменяют на равенство $x+\frac{y}{1+r}=I.$ Это связано с тем, что значение функции полезности увеличивается при увеличении x и y (первое свойство функции полезности). Отсюда следует, что максимум лежит на бюджетной прямой.

Таким образом, задачу математического программирования можно заменить ее частным случаем, называемым *задачей на условный экстремум*, т.е.

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y)\to\max \\ \text{при условиях:} \\ x+\dfrac{y}{1+r}=I, \\ x>0,\quad y>0, \end{array}\right\} \qquad \textbf{(11.9)}$$

где $u(x,y)$ — целевая функция; $x+\frac{y}{1+r}-I=g(x,y)$ — функция связи.

Решают такие задачи методом Лагранжа. Функция Лагранжа для сформулированной задачи имеет вид

$$L(x,y,\lambda)=u(x,y)+\lambda\cdot\left(x+\frac{y}{1+r}-I\right).$$

Конструкция функции Лагранжа очень проста. Эта функция в данном случае равна сумме целевой функции и функции связи, умноженной на коэффициент Лагранжа λ.

Составляем систему линейных уравнений для расчета оптимальных количеств потребляемых товаров. Для этих целей приравниваем нулю первые частные производные функции Лагранжа.

Так как частная производная от второго слагаемого в функции Лагранжа $\lambda\cdot\left(x+\frac{y}{1+r}-I\right)$ по x равна λ, по y равна $\frac{\lambda}{1+r}$, а по λ равна функции связи, то система линейных уравнений принимает вид

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\lambda=0;$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\frac{\lambda}{1+r}=0;$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}=x+\frac{y}{1+r}-I=0.$$

Для решения этой системы умножим второе уравнение на $1+r$ и вычтем второе из первого. В результате получим

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}(1+r)=0.$$

Перенесем слагаемое, имеющее знак минус, в правую часть и разделим правую и левую части на $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$. В результате систему уравнений для укороченной подозрительной точки функции Лагранжа можно переписать в виде

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\bigg/\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=1+r; \qquad \textbf{(11.10)}$$

$$x+\frac{y}{1+r}=I. \qquad \textbf{(11.11)}$$

Напомним, исходная система из трех уравнений имеет три неизвестных — x, y и λ. Укороченной точкой называют точку с координатами x и y. Поскольку неизвестное λ в данном случае играет второстепенную роль, то его значение находить не обязательно.

Сопоставив формулу **(11.7)** для нормы замены количества потребляемых благ в начале периода количеством потребляемых благ в конце периода с соотношением **(11.10)**, найдем

$$-\frac{\Delta y}{\Delta x}=1+r\,. \qquad \textbf{(11.12)}$$

Получили важный результат, состоящий в том, что норма замены количества потребляемых благ в начале периода количеством потребляемых благ в конце периода равна множителю наращения.

Геометрический смысл условного экстремума, или оптимального решения, функции $u(x,y)$ в точке $\left(x^0,y^0\right)$ состоит в том, что градиенты целевой функции $\text{grad}\left(u(x^0, y^0)\right)$ и функции связи $\text{grad}\left(g(x^0, y^0)\right)$, выходящие из точки $\left(x^0, y^0\right)$, обязательно расположены на одной прямой, перпендикулярны линиям уровней функций $u(x, y)$ и $g(x, y)$. Расположение этих градиентов показано на рис. 11.4.

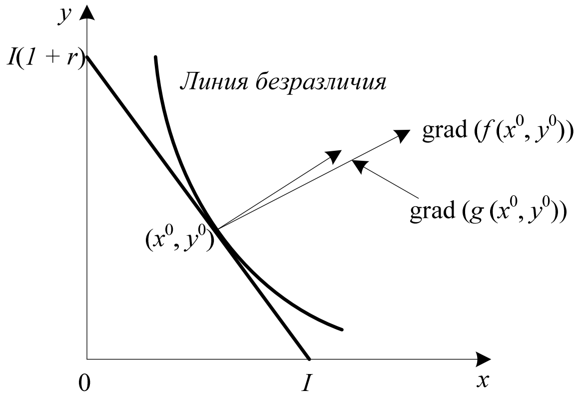


Рис. 11.4. Оптимальное решение

Линией уровня функции полезности является линия безразличия, а линия уровня функции связи совпадает с бюджетной прямой. Линия уровня функции $u(x, y)$ и бюджетная прямая $x + \dfrac{y}{1+r} = I$, содержащая точку $\left(x^0, y^0\right)$, касаются в этой точке.

Найдем формулу для градиента $\text{grad}\left(g\left(x^0, y^0\right)\right)$ функции связи $g(x, y)$ в точке $\left(x^0, y^0\right)$. Известно, что формула для расчета градиента имеет вид

$$\text{grad}\left(g\left(x^0, y^0\right)\right) = \frac{\partial g\left(x^0, y^0\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g\left(x^0, y^0\right)}{\partial y}\vec{j}.$$

Найдем значения частных производных по x и по y. Эти значения равны

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial\left(x + \frac{y}{1+r} - I\right)}{\partial x} = 1; \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial\left(x + \frac{y}{1+r} - I\right)}{\partial y} = \frac{1}{1+r}.$$

Подставляя результаты в формулу для градиента, получим

$$\text{grad}\left(g\left(x^0, y^0\right)\right) = \vec{i} + \frac{1}{1+r}\vec{j}.$$

■ **Пример 11.2.** Функция полезности инвестора имеет вид $u = xy$. Бюджетное ограничение имеет вид $x + \frac{y}{1+r} \le I$.

Определить характеристики оптимального поведения инвестора.

Решение.

Как показано выше, эту задачу математического программирования можно заменить задачей на условный экстремум:

$$xy \to \max$$

при условиях

$$g(x, y) = x + \frac{y}{1+r} - I = 0,$$

$$x > 0, \quad y > 0.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$, то система уравнений **(11.10)** и **(11.11)** для укороченной подозрительной точки функции Лагранжа имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y^0}{x^0} = 1 + r; \\ &x^0 + \frac{y^0}{1+r} = I. \end{aligned}\right\}$$

Из первого условия следует, что $y^0 = x^0(1+r)$. Подставив последнюю формулу во второе уравнение системы, получим $x^0 = \frac{y^0}{1+r} = \frac{I}{2}$, т.е. оптимальное потребление инвестора в конце и в начале периода составляет половину его общего дохода. В первоначальных обозначениях это соотношение можно записать в виде

$$x^0 = \frac{y^0}{1+r} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_1}{1+r} + x_0 + \frac{M_0}{\psi} \right). \quad \square$$

Упражнения

ЗАДАЧИ

11.1. Пусть в начале периода потребляется 120 единиц продукции, а в конце — 180 единиц продукции. Функция полезности инвестора задана соотношением

$$u = x^{0,5} \cdot y^{0,5}.$$

Определить величину, на которую потребитель должен увеличить потребление в конце года при уменьшении потребления в начале года на пять единиц. Найти ставку дисконтирования.

11.2. Функция полезности инвестора имеет вид $u = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$. Бюджетное ограничение имеет вид $x + \frac{y}{1+r} \le I$. Определить характеристики оптимального поведения инвестора.

Часть 4

КРИТЕРИИ И МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Глава 12 ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

12.1. Определение качества инвестиционного проекта

Фирмы развитых капиталистических стран функционируют в условиях отлаженных рыночных отношений, а российская рыночная экономика находится только в начальной стадии существования. Поэтому опыт заграничных корпораций не может быть полностью использован российскими предпринимателями. Р.А. Фатхутдинов в своей книге «Стратегический менеджмент» (М.: Дело, 2002) сравнивает российскую экономику с кораблем, отчалившим от порта (командно-административная система) в гавань (рыночная экономика). В американской и западноевропейской литературе эта гавань хорошо описана, но отсутствует описание пути в нее.

Макрохарактеристики экономики России по сравнению с развитыми странами выглядят крайне плачевно. При природных ресурсах страны, составляющих 30% мировых, и населении, составляющем около 2,4% мирового населения, мы имеем существенное отставание практически по всем основным макропоказателям. Место России по жизненному уровню находится во второй половине сотни, а доля бедных приближается к 50%.

Из сказанного следует, что для оценки качества инвестиционного проекта лучше всего использовать количественные показатели с учетом степени возможных рисков. Для таких оценок следует использовать общеизвестные понятия «эффект» и «эффективность». Эффекты и эффективности позволяют описать качество стратегии в виде цифр и отразить эти цифры в стратегическом финансовом плане. Такое представление качества инвестиционных проектов позволяет сравнительно легко управлять их реализацией путем сравнения планового и реального состояний и принятия решений. В российских условиях все качественные критерии могут быть использованы в виде вспомогательных.

Схема для определения эффектов и эффективностей инвестиционного проекта представлена на рис. 12.1.

Рис. 12.1. Схема инвестиционного проекта

Входы формируются внешней и внутренней средой. К числу входов относятся: тип бизнеса, количество сотрудников и их квалификация, инвестиции, поставщики, банки, законодательная база и т.д.

Выходы являются эффектами. К выходам могут относиться, например, выпускаемый за заданный промежуток времени объем продукции, объем основных и оборотных средств, собственный капитал предприятия, чистая прибыль, стоимость нематериальных активов и пр. Выходы имеют простую размерность, например рубль, тонна, погонный метр и т.д.

Эффективность — это отношение выходов к входам. Эффективностью являются, например, производительность труда, доходность, коэффициенты ликвидности активов предприятия и др. Эффективность имеет сложную размерность или является величиной безразмерной. Рассмотрим несколько примеров эффективности.

Доходность ссудной операции — отношение процентов к величине долга — имеет размерность $\frac{1}{\text{год}}$.

Производительность труда — отношение выхода продукции к затратам на производство. Неполная производительность:

$$\frac{\text{Весь объем выпуска}}{\text{Труд}}; \quad \frac{\text{Выпуск продукции}}{\text{Материалы}};$$

$$\frac{\text{Выпуск продукции}}{\text{Капитал}}; \quad \frac{\text{Выпуск продукции}}{\text{Энергия}}.$$

Совокупная факторная производительность:

$$\frac{\text{Весь объем выпуска (выход)}}{\text{Труд + Капитал + Материалы + Энергия + Остальное}}.$$

На качество инвестиционного проекта влияют как внутренние, так и внешние факторы.

Внешними факторами называются факторы, которые в краткосрочном плане не могут быть объектами контроля или влияния со стороны руководства проекта. Они составляют примерно 15—20% всех факторов.

Внутренние факторы — факторы, которые находятся под контролем руководства предприятия и на которые оно должно оказывать влияние. Это примерно 80—85% всех факторов.

К внешним факторам относятся:

- цикл деловой активности и структурные изменения:
  - перемены в экономике, т.е. структуре капитала, технологиях, масштабах производства, конкурентоспособности;
  - социальные и демографические изменения;
- ресурсы:
  - рабочая сила;
  - земля;
  - сырье и энергоносители;
- правительство и инфраструктура:
  - фискальная и налоговая политика;
  - макроэкономические структурные изменения;
  - цикл деловой активности;
  - изменения в технологии и политике в области НИОКР;
  - общественная инфраструктура (транспорт, средства связи, образование, здравоохранение и т.д.);
  - развитие трудовых ресурсов;
- неправительственные организации и общественные движения (центры по вопросам эффективности, аналитические и консалтинговые центры).

К внутренним факторам относятся:

- факторы, связанные с исходными ресурсами:
  - капиталовложения, производственные здания и оборудование;
  - сырье и энергоносители;
  - технологии и ноу-хау;
  - проектирование продукта;
  - рабочая сила;
- факторы, связанные с процессом производства:
  - мотивация, условия труда, производственные отношения и обучение;
  - проектирование продукта (например, плохой проект удорожает производство);
  - методы работы;
  - обратная связь;
  - организация и стиль управления;
- факторы, связанные с выпуском продукции:
  - объем продукции (услуг);

- качество продукции (услуг);
- цена продукции (услуг);
- обслуживание покупателя продукции (услуг);
- своевременность и надежность поставок;
- техническая прогрессивность конструкции изделия;
- надлежащая упаковка;
- структура ассортимента;
- наличие продукции (услуг) в нужное время в нужном месте;
- система долгосрочных гарантий;
- влияние продукции на долю рынка компании и степень ее проникновения на этот рынок;
- влияние продукции на имидж предприятия;
- экологические характеристики продукции.

Количество основных показателей качества инвестиционного проекта не может быть слишком большим. Оно не должно превышать семи, так как в противном случае инвестору трудно охватить всю картину целиком. К таким показателям относятся, например:

- ставки дисконтирования;
- чистый приведенный (дисконтированный) доход;
- индекс прибыльности (рентабельность);
- внутренняя норма доходности;
- модифицированная норма доходности;
- период окупаемости.

12.2. Экономические показатели качества инвестиционных проектов

Основные экономические показатели качества инвестиционного проекта приведены в конце предыдущего параграфа. Эти показатели позволяют оценить качество проекта с точки зрения инвестора и других участников проекта. Экономические показатели оценивают по потоку платежей, которые генерируются проектом. Элементы финансовых потоков формируются из инвестиций и чистого дохода.

Чистым доходом называется выручка за вычетом всех издержек, связанных с его созданием. Интервал между платежами потока принимается равным году, кварталу или месяцу. К издержкам, связанным с получением чистого дохода, относится себестоимость товара или услуги, налоги. Платеж потока за заданный период получают путем вычитания из объема продаж переменные и постоянные издержки, проценты по кредитам, налоги и прочие выплаты. Получают выплату потока от производственной деятельности. Из этой суммы вычитают выплаты на приобретение активов и складывают с этим элементом поступления от продажи активов. Получают элемент потока наличности от инвестиционной деятельности. После выплат из этой суммы платежей по займам и добавления в нее различного рода компенсаций, а также амортизационных отчислений от объектов проекта получают чистый доход за период. Эту последовательность операций для расчета чистого дохода уточняют в зависимости от изменений внутренней и внешней среды и от детализации методики.

Обычно инвестора при финансировании инновационного проекта интересует доходность вкладываемого в этот проект капитала, а должника – стоимость получаемого капитала. Доходность и стоимость капитала описываются процентной ставкой. Обе стороны, т.е. кредитор и должник, только в том случае решаются на проведение операции, если каждый из них найдет ее приемлемой для своего бизнеса. При принятии решения участники сравнивает результаты операции с общепринятым рыночным эталоном. Для операции примера эталоном является рыночная доходность или стоимость капитала. Ориентиры для рыночной процентной ставки обычно устанавливают финансовые институты, занимающиеся этой проблемой. Ее примером может являться ставка рефинансирования, устанавливаемая Центральным банком.

12.3. Ставка дисконтирования инвестиционного проекта

Экономические показатели качества характеризуют затраты, или инвестиции, и доходы, полученные в результате реализации инвестиционного проекта. Экономические показатели определяются элементами финансового потока проекта. В основу их анализа и расчета положен *метод дисконтирования этих элементов*.

Капитал покупают и продают на рынке капитала. Мерой стоимости капитала является процентная ставка: для инвестора — это доходность; для должника — цена капитала.

■ **Пример 12.1.** Инвестируются 10 000 руб. Через два года инвестор получит 12 100 руб.

Определить доходность инвестора и цену капитала при условии, что долг выплачивается из чистой прибыли.

***Решение*:**

$$a = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{12\,100}{10\,000}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}1, \text{ или } 10\% \text{ годовых.}$$

Здесь введены следующие обозначения: a — сложная процентная ставка; S — наращенная сумма; P — первоначальная сумма долга; n — срок инвестиции.

Таким образом, доходность инвестора и цена капитала для должника равны 10% годовых. □

Кредитор и должник принимают решение о проведении финансовой операции только в том случае, если каждый из них сочтет ее выгодной для себя. Принимая решение, каждый из участников операции сравнивает ее с неким эталоном. Для рассматриваемой операции эталоном является рыночная ставка капитала. Ориентиром этой ставки может быть, например, ставка рефинансирования, устанавливаемая Банком России.

Ставка дисконтирования инвестиционного проекта при финансировании проекта за счет собственного капитала принимается равной рыночной доходности капитала. Делается это на основании следующих соображений. Пусть инвестор намеревается инвестировать K руб. Через год эта инвестиция принесет инвестору доход E руб. На рынке инвестиция подобного рода имеет среднюю доходность q % годовых. Современная стоимость дохода может быть определена по формуле

$$P = \frac{E}{1+q} \cdot$$

Если современная стоимость дохода $P > K$, то инвестор принимает решение об инвестициях.

Одним из показателей качества инвестиционного проекта является чистый приведенный доход (NPV).

Чистый приведенный доход — это разность между расходом и доходом, дисконтированным по ставке сравнения на начало проекта. Считают, что проект можно принять для реализации, если чистый приведенный доход больше или равен нулю. Ниже этот показатель будет рассмотрен более подробно.

■ **Пример 12.2.** Инвестируются 10 000 руб. Через год инвестор получит 12 180 руб. Найти чистый приведенный доход при ставке сравнения 16% годовых.

***Решение*:**

$$NPV = \frac{12\ 180}{1+0{,}16} - 10\ 000 = 500 \text{ руб.}$$

Так как чистый приведенный доход больше нуля, то проект может быть принят. □

Возникает вопрос: почему можно принять проект с чистым приведенным доходом больше или равным нулю? Так как рыночная доходность инвестора равна рыночной стоимости капитала, то при равенстве ставки дисконтирования рыночной стоимости капитала чистый приведенный доход будет равен нулю. Среднестатистический инвестор будет удовлетворен такой доходностью и примет проект. Если же чистый приведенный доход будет больше нуля, то доходность инвестора будет еще больше. Поэтому среднестатистический инвестор тем более примет этот проект.

■ **Пример 12.3.** Найти доходность для предыдущего примера.
***Решение*:**

$$a = \frac{12\,180}{10\,000} - 1 = 0{,}218, \text{ или } 21{,}8\% \text{ годовых.}$$

Таким образом, доходность инвестора больше рыночной стоимости капитала, равной 16% годовых. □

Доходность капитала, в свою очередь, зависит от риска финансовой операции и инфляции. При учете инфляции доходность капитала, или ставка дисконтирования инвестиционного проекта, может быть рассчитана по формуле

$$q = (1+\vartheta)\cdot(1+\overline{H}) - 1 = \vartheta + \overline{H} + \vartheta\cdot\overline{H},$$

где q — ставка дисконтирования с учетом инфляции; ϑ — очищенная от инфляции ставка дисконтирования; $\overline{H}$ — средний темп инфляции за исследуемый период.

При выполнении условий $\vartheta << 1$ и $\overline{H} << 1$ имеем

$$q \approx \vartheta + \overline{H}.$$

Очищенная от инфляции ставка дисконтирования ϑ состоит из двух составляющих и вычисляется по формуле

$$\vartheta = a_б + a_р,$$

где $a_б$ — безрисковая часть ставки дисконтирования без учета инфляции; $a_р$ — рисковая часть ставки дисконтирования (премия за риск) без учета инфляции.

Безрисковая и рисковая части ставки дисконтирования определяются из следующих соображений.

Безрисковую часть этой ставки в России находят исходя из ставки межбанковского кредита без учета инфляции. За рубежом эту ставку определяют как доходность по безрисковым активам также без учета инфляции. В США в качестве безрискового актива принимается ценная государственная краткосрочная бумага — казначейский вексель.

Понятие «безрисковый срочный актив» является идеальным. В экономике таких активов не существует. Но поскольку это понятие плодотворно используется в экономическом анализе, то его введение является вполне обоснованным. Обычно в качестве безрисковых активов используются ценные бумаги, по которым никогда не было отказов в выплатах. Тем не менее в любом случае риск потерь доходности существует из-за инфляции. Однако точность прогнозирования доходности из-за небольшого срока актива, с одной стороны, и из-за малых годовых темпов инфляции — с другой, может быть довольно высокой. Поэтому, пренебрегая незначительными потерями из-за неточности прогнозов, такие активы считают безрисковыми.

За счет риска ставка дисконтирования увеличивается на величину, называемую премией за риск. Выбор премии за риск является весьма неопределенной задачей и зависит от степени риска. Например, стоимость кредита, используемого в качестве капитала инвестиционного проекта, будет зависеть от риска этого проекта. Поэтому рисковая часть ставки дисконтирования будет определяться премией за риск этого кредита. Обычно премия за риск определяется экспериментально. В табл. 12.4 приведены характеристики (в процентах) различных финансовых инструментов [6], использовавшихся в США в 1926—1988 гг.

Таблица 12.1

Тип финансового инструмента	*Среднегодовая брутто-доходность*	*Среднегодовая реальная доходность*	*Средняя премия за риск*	*Среднее квадратичное отклонение доходности*
Казначейские векселя	3,6	0,5	0	3,3
Долгосрочные правительственные облигации	4,7	1,7	1,1	8,5
Корпоративные облигации	5,3	2,4	1,7	8,4
Обыкновенные акции	12,1	8,8	8,4	20,9

Средние арифметические значения были получены за 63 года. Реальная доходность отличается от брутто-доходности тем, что в первой отсутствует инфляция. Таким образом, наиболее безопасные инвестиции в рассматриваемый период — это инвестиции в казначейские векселя, а наиболее рискованные — в обыкновенные акции.

Известно, что в качестве меры риска финансовых инструментов часто используется среднее квадратичное отклонение доходности. Из данных табл. 12.1 видно, что доходность и премия за риск финансового инструмента существенным образом зависят от степени риска. Если казначейский вексель принять за безрисковый актив, то премия за риск обыкновенной акции составляет 8,4%.

Существуют и другие таблицы, позволяющие определять премию за риск. Например, в табл. 12.2 приведены возможные ставки сравнения для различных типов инвестиций при существующей в США инфляции [6].

Таблица 12.2

Вид инвестиций	*Ставка сравнения, %*
Снижение затрат, известная технология	10
Расширение осуществляемого бизнеса	15 (затраты компании на капитал)
Новая продукция	20
Венчурные предприятия	30

Из табл. 12.2 видно, что при увеличении риска ставка сравнения существенно возрастает.

При учете инфляции темп прироста инфляции может быть взят из прогнозов, представленных в бюджете, и из других официальных документов. Многие разработчики технико-экономических обоснований проектов проводят прогноз инфляции самостоятельно.

12.4. Типы инвестиционных потоков платежей

Показатели инновационного проекта во многом зависят от типа инвестиционного потока платежей. Наиболее часто рассматривают три таких типа.

Первый тип потока состоит из одного платежа, сделанного в самом начале развития проекта. Доходы по этому проекту приурочены к концу каждого периода, например года, следующего после инвестиции. Некоторые из этих доходов могут быть равны нулю. Обычно доходы получают в течение всего периода, но для удобства их пересчитывают к его концу. Иногда их пересчитывают также либо к началу периода, либо к его середине. Этот тип будем называть проектом с одноразовой инвестицией.

Второй тип потока состоит из нескольких инвестиций, также сделанных в начальные периоды проекта. В этом случае поток состоит из ряда инвестиций и ряда чистых доходов, приуроченных к концу периода. Чистые доходы следуют после прекращения инвестиций. Такой тип будем называть проектом с классическим потоком платежей.

Третий тип потока предусматривает возможность как инвестиций, так и чистых доходов, произведенных в конце любого периода. Например, это могут быть инвестиции, затем доходы, затем опять инвестиции и т.д. Такой тип будем называть проектом с общим потоком платежей.

Начнем изучение показателей проекта с одноразовой инвестицией. В этом случае поток платежей включает в себя одну инвестицию K_0, сделанную в начале проекта, и чистые доходы E_j, следующие друг за другом. Здесь j — номер года. Схема рассматриваемого потока показана на рис. 12.2.

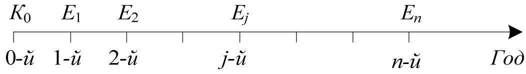


Рис. 12.2. Схема потока инвестиционного проекта при одноразовой инвестиции

Инвестиционная выплата производится в нулевой момент времени. Чистый доход выплачивается в конце года. Эти платежи являются платежами постнумерандо. В рассматриваемой схеме количество чистых доходов равно сроку проекта, который обозначен буквой n.

Как уже было сказано, качество проекта, которое позволяет сравнить его с другим проектом, определяется системой показателей, рассчитанных методом дисконтирования платежей. Рассмотрим основные показатели. Значения определяемых показателей в значительной мере будут зависеть от ставки дисконтирования проекта, о выборе которой говорилось выше. Будем рассматривать случай использования средневзвешенной ставки дисконтирования. Приведенные результаты легко распространить на случай использования различных ставок для разных стадий. Те же показатели, которые определяются в виде процентных ставок, будут даваться в виде средних характеристик.

12.5. Основные показатели инвестиционного проекта с одноразовой инвестицией

Схема проекта с одноразовой инвестиций представлена на рис. 12.2.

Выплата инвестиции производится в начале проекта, т.е. в момент времени, равный нулю. Выплаты дохода производятся в конце каждого года. Такие платежи называются платежами постнумерандо. В данном случае количество доходов, приносимых инвестиционным проектом, равно сроку этого проекта. Срок проекта обозначен буквой n.

Оценка качества инвестиционных проектов заключается в расчете системы показателей. При этом используют дисконтирование платежей потока. Ясно, что результат расчета, т.е. величина показателей, существенным образом будет зависеть от величины ставок, используемых при дисконтировании.

12.5.1. ЧИСТЫЙ ПРИВЕДЕННЫЙ ДОХОД

Чистый приведенный, или ***дисконтированный, доход*** (*Net Present Value*, NPV) — это разность доходов, дисконтированных на начало инвестиционного процесса, и инвестиции. Формула для расчета чистого приведенного дохода имеет вид

$$\mathrm{NPV}=\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j}{(1+q)^j}-K_0, \qquad \textbf{(12.1)}$$

где E_j — инвестиционные доходы в периоде $j=1, 2, ..., n$; n — продолжительность инвестиционного проекта; q — ставка сравнения.

Рассмотрим случай, когда в качестве ставки дисконтирования принята рыночная доходность капитала. Проект может быть принят для дальнейшего рассмотрения, если чистый приведенный доход больше нуля. Если чистая приведенная стоимость меньше нуля, то проект отвергается. Положительная величина чистого приведенного дохода говорит о том, что доходы окупили расходы на капитал. Однако из этого не следует, что превышения доходов над расходами будет достаточно для принятия проекта. В этом случае судить о качестве инвестиционного проекта только по чистому приведенному доходу невозможно. Например, чистый приведенный доход равен 500 тыс. руб. (не ясно, хорошо это или плохо). Для принятия решения о реализации проекта необходима дополнительная информация.

Если в качестве ставки дисконтирования принята желаемая инвестором доходность, которая больше стоимости капитала, то в эту ставку могут быть заложены все желаемые доходы. Тогда проект может быть принят для реализации даже в том случае, если чистый приведенный доход равен нулю. При этом должна быть разработана методика, позволяющая связать все доходы с величиной ставки дисконтирования.

■ **Пример 12.4.** Имеются два варианта инвестиционного проекта, в которых платежи распределены по годам так, как представлено в табл. 12.3.

Таблица 12.3

Вариант	*Инвестиции*	*Доходы*		
		1-й год	*2-й год*	*3-й год*
Проект 1	5	4	4	5
Проект 2	6	4	5	6

Сравнить проекты по чистому приведенному доходу при ставке дисконтирования $q=10\%$.

***Решение*:**

$$\mathrm{NPV}_1=\frac{4}{1,1}+\frac{4}{1,1^2}+\frac{5}{1,1^3}-5=5,7;$$

$$\mathrm{NPV}_2=\frac{4}{1,1}+\frac{5}{1,1^2}+\frac{6}{1,1^3}-6=6,3.$$

Так как $\mathrm{NPV}_2>\mathrm{NPV}_1$, то проект *2* предпочтительнее проекта *1.* □

Ставка дисконтирования q является в определенном смысле величиной условной. Поэтому чистый приведенный доход определяется для некоторого диапазона этих ставок. Возможная зависимость чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования приведена на рис. 12.3.

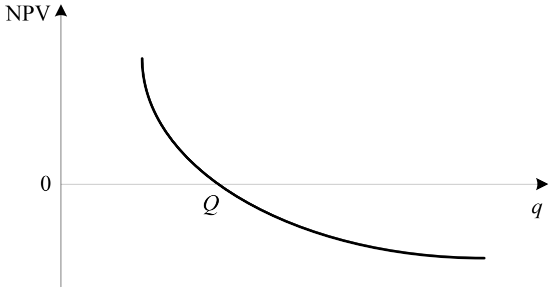


Рис. 12.3. Зависимость чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования

Чистый приведенный доход может быть как положительной, так и отрицательной величиной (см. рис. 12.3). В рассматриваемом случае график зависимости чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования обязательно пересекается с осью абсцисс. Точку пересечения обозначим Q.

12.5.2. ИНДЕКС ПРИБЫЛЬНОСТИ (РЕНТАБЕЛЬНОСТЬ)

Индексом прибыльности (*Profitability Index*, PI) называется отношение дисконтированных доходов к инвестиции:

$$\mathrm{PI} = \sum_{j=1}^{n} E_j \Big/ (1+q)^j \Big/ K_0 . \qquad \textbf{(12.2)}$$

Обозначения здесь те же, что и раньше.

■ **Пример 12.5.** Имеются два варианта инвестиционного проекта, в которых платежи распределены по годам так, как представлено в табл. 12.3.

Сравнить проекты по индексу прибыльности при ставке дисконтирования $q = 10\%$.

Решение.

Проект 1: $\mathrm{PI} = \left(\frac{4}{1,1} + \frac{4}{1,1^2} + \frac{5}{1,1^3} \right) \Big/ 5 = 2,14;$

Проект 2: $\mathrm{PI} = \left(\frac{4}{1,1} + \frac{5}{1,1^2} + \frac{6}{1,1^3} \right) \Big/ 6 = 2,05.$

Так как $\mathrm{PI}_2 < \mathrm{PI}_1$, то проект *1* предпочтительнее проекта *2.* □

Сравнив результаты решения второго и третьего примеров, видим, что они противоречат друг другу. Во втором примере предпочтительнее оказался проект *2*, а в третьем примере — проект *1*. Как же поступить?

Существует несколько подходов при выборе проекта. Отдельные авторы рекомендуют использовать в качестве основного показателя чистую приведенную стоимость. Если использовать эту рекомендацию, то надо выбрать второй проект. Нам кажется, что для выбора проекта лучше привлечь и проанализировать дополнительную информацию. Например, для проекта с одноразовой инвестицией удобно привлечь доходность инвестиций.

12.5.3. ВНУТРЕННЯЯ НОРМА ДОХОДНОСТИ

Внутренняя норма доходности (*Internal Rate of Return*, IRR) — это расчетная процентная ставка, при которой чистая приведенная стоимость равна нулю, т.е. приведенные доходы равны инвестиции. Внутренняя норма доходности находится посредством решения приведенного ниже уравнения относительно Q:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j}{\left(1+Q\right)^j}-K_0=0. \qquad \textbf{(12.3)}$$

Это уравнение с одним неизвестным Q. Геометрический метод решения такого уравнения представлен на рис. 12.3. Его решением является координата Q — точки пересечения кривой с осью абсцисс.

Если внутренняя норма доходности больше ставки дисконтирования, то чистая приведенная стоимость является положительной. При их равенстве проект имеет нулевую чистую приведенную стоимость.

■ **Пример 12.6.** Имеются два варианта инвестиционного проекта, в которых платежи распределены по годам так, как представлено в табл. 12.3.

Сравнить проекты по внутренней норме доходности.

Решение.

П р о е к т 1. Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{4}{1+Q}+\frac{4}{\left(1+Q\right)^2}+\frac{5}{\left(1+Q\right)^3}-5=0.$$

Для решения этого уравнения воспользуемся методом Ньютона—Рафсона. В качестве искомой функции принимаем

$$f\left(Q\right)=\frac{4}{1+Q}+\frac{4}{\left(1+Q\right)^2}+\frac{5}{\left(1+Q\right)^3}-5.$$

Производная этой функции

$$f'(Q) = -\frac{4}{(1+Q)^2} - \frac{8}{(1+Q)^3} - \frac{15}{(1+Q)^4}.$$

Положим $Q_1 = 0,5.$

▶ Итерация 1:

$$f(0,5) = \frac{4}{1+0,5} + \frac{4}{(1+0,5)^2} + \frac{5}{(1+0,5)^3} - 5 = 0,9259259;$$

$$f'(0,5) = -\frac{4}{(1+0,5)^2} - \frac{8}{(1+0,5)^3} - \frac{15}{(1+0,5)^4} = -7,11111111;$$

$$Q_2 = Q_1 - \frac{f(Q_1)}{f'(Q_1)} = 0,630208.$$

▶ Итерация 2:

$$f(Q_2) = 0,11289595; \qquad f'(Q_2) = -5,475503;$$

$$Q_3 = Q_2 - \frac{f(Q_2)}{f'(Q_2)} = 0,650829.$$

▶ Итерация 3:

$$f(Q_3) = 0,002182673; \qquad f'(Q_3) = -5,2656796;$$

$$Q_4 = 0,65124.$$

Внутренняя норма доходности для первого проекта $Q_1 = 65,124\%$.

Проект 2. Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{4}{1+Q} + \frac{5}{(1+Q)^2} + \frac{6}{(1+Q)^3} - 6 = 0.$$

В качестве искомой функции принимаем

$$f(Q) = \frac{4}{1+Q} + \frac{5}{(1+Q)^2} + \frac{6}{(1+Q)^3} - 6.$$

Производная этой функции

$$f'(Q) = -\frac{4}{(1+Q)^2} - \frac{10}{(1+Q)^3} - \frac{18}{(1+Q)^4}.$$

Положим $Q_1 = 0,5$.

▶ Итерация 1:

$$f(0,5)=\frac{4}{1+0,5}+\frac{5}{(1+0,5)^2}+\frac{6}{(1+0,5)^3}-6=0,666667;$$

$$f'(0,5)=-\frac{4}{(1+0,5)^2}-\frac{10}{(1+0,5)^3}-\frac{18}{(1+0,5)^4}=-8,296293;$$

$$Q_2=Q_1-\frac{f(Q_1)}{f'(Q_1)}=0,580357.$$

▶ Итерация 2:

$$f(Q_2)=0,053199;\quad f'(Q_2)=-7,020863;\quad Q_4=0,587934.$$

▶ Итерация 3:

$$f(Q_3)=0,000403;\quad f'(Q_3)=-6,914832;\quad Q_4=0,587993.$$

Внутренняя норма доходности для проекта *2* равна $Q_2=58,8\%$. □

Анализ противоречивых результатов трех последних примеров позволяет остановиться на проекте *1*, несмотря на то что чистая приведенная стоимость этого проекта меньше, чем у проекта *2*. При отсутствии других альтернатив, кроме двух рассмотренных примеров, инвестор мог бы выбрать проект *2*, несмотря на то что инвестировать в него надо больше на одну денежную единицу. Однако в развитой рыночной экономике существует достаточно много проектов, которые инвестор может использовать для инвестирования. Поэтому, выбрав проект *1*, инвестор сможет инвестировать одну оставшуюся денежную единицу в проект *3*, проект *4* и другие проекты.

Выбор же проекта *1* обоснован тем, что $Q_1>Q_2$, т.е. внутренняя норма доходности проекта *1* больше, чем внутренняя норма доходности проекта *2*.

Почему же в данном случае мы приняли внутреннюю норму доходности за основной критерий отбора? Все дело в том, что в рассматриваемом случае одноразовой инвестиции внутреннюю норму доходности можно рассматривать как доходность финансовой операции. Понятие доходности финансовой операции широко используется, например, при кредитовании. Одноразовую инвестицию можно рассматривать как кредит со сроком действия, равным сроку действия проекта, а доходы по проекту — как выплаты по кредиту. Доходность кредита определяется как ставка дисконтирования, при которой современная стоимость всех выплат равна величине кредита. Таким образом, доходность финансовой операции определяется по тому же уравнению, что и внутренняя норма доходности **(12.3)**.

■ **Пример 12.7.** Одноразовая инвестиция в начале проекта составляет 1 000 000 руб. Доходы являются рентой постнумерандо относительно начала проекта с годовыми выплатами 329 234,44 руб. Срок ренты равен четырем годам.

Определить доходность инвестиций и провести анализ результатов.

Решение.

Исходное уравнение для внутренней нормы доходности имеет вид

$$329\ 234,44 \cdot \frac{1-(1+Q)^{-4}}{Q} - 1\ 000\ 000 = 0.$$

Решить это уравнение можно, например, методом Ньютона—Рафсона. В качестве исходной функции выбираем

$$f(Q) = \frac{1-(1+Q)^{-4}}{Q} - \frac{1\ 000\ 000}{329\ 234,44}.$$

Производная этой функции

$$f'(Q) = \frac{4Q(1+Q)^{-5} + (1+Q)^{-4} - 1}{Q^2}.$$

Положим $Q_1 = 0,12$.

Итерация 1:

$$f(0,12) = \frac{1-(1+0,12)^{-4}}{0,12} - \frac{1\ 000\ 000}{329\ 234,44} = 3,4 \cdot 18^{-8};$$

$$f'(0,12) = \frac{4 \cdot 0,12(1+0,12)^{-5} + (1+0,12)^{-4} - 1}{0,12^2} = -6,397016;$$

$$Q_2 = Q_1 - \frac{f(Q_1)}{f'(Q_1)} = 0,12.$$

Так как Q_1 и Q_2 совпали, то прекращаем вычисления и принимаем $Q = 12\%$.

Рассмотрим одноразовую инвестицию как кредит, погашаемый равными суммами в конце каждого года. В этом случае рассматриваемый пример можно сформулировать следующим образом: «Кредит 1 000 000 руб. погашается равными суммами по 329 234,44 руб. в течение четырех лет. Доходность кредитора равна 12% годовых. Провести анализ годовых выплат, состоящих из части годовой выплаты, засчитанной в качестве долга, и из процентов».

Проценты, которые инвестор получит в конце первого года, равны

$$I_1 = K_0 Q = 329\ 234,44 \cdot 0,12 = 120\ 000 \text{ руб.}$$

В качестве основного долга в конце года инвестор получит

$$R_1 = E_1 - I_1 = 329\ 234{,}44 - 120\ 000 = 209\ 234{,}44 \text{ руб.}$$

Остаток долга на конец первого года составит

$$k_1 = K_0 - R_1 = 1\ 000\ 000 - 209\ 234{,}44 = 790\ 765{,}56 \text{ руб.}$$

Проценты, которые инвестор получит в конце второго года, составят

$$I_2 = k_1 Q = 790\ 765{,}56 \cdot 0{,}12 = 94\ 891{,}87 \text{ руб.}$$

В качестве основного долга в конце второго года инвестор получит

$$R_2 = E_2 - I_2 = 329\ 234{,}44 - 94\ 891{,}87 = 234\ 342{,}57 \text{ руб.}$$

Остаток долга на конец второго года равен

$$k_2 = k_1 - R_2 = 790\ 765{,}56 - 234\ 342{,}57 = 556\ 422{,}99 \text{ руб.}$$

Платежи по остальным годам вычисляются аналогично. Результаты расчета представлены в табл. 12.4.

Таблица 12.4

Год	*Годовой доход, руб.*	*Часть годового дохода, засчитанного в качестве долга, руб.*	*Часть годового дохода, засчитанного в качестве процентов, руб.*	*Остаток долга на конец года, руб.*
1-й	329 234,44	209 234,44	12 000	790 765,56
2-й	329 234,44	234 342,57	94 891,87	556 422,99
3-й	329 234,44	262 463,67	66 770,77	293 959,32
4-й	329 234,44	293 959,32	35 275,12	0

Из данных табл. 12.7 следует, что проценты год от года уменьшаются, значит, растут выплаты по основному долгу. Остаток долга на конец каждого года также уменьшается, а в конце процесса остаток долга равен нулю, т.е. долг полностью погашен. □

Таким образом, внутренняя норма доходности инвестиционного проекта с одноразовой инвестицией определяет доходность этой инвестиции.

12.5.4. ПЕРИОД ОКУПАЕМОСТИ

Период, или ***срок, окупаемости*** (*Payback Period*, PBP) — это временной интервал, в течение которого сумма чистых доходов, дисконтированных на начало проекта, равна инвестиции.

При определении периода окупаемости, используя соотношение

$$A_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{E_j}{(1+q)^j},$$

определяют значение m, для которого удовлетворяется неравенство

$$A_{m-1} \le K_0 \le A_m.$$

Период окупаемости лежит между концом периода под номером $m-1$ и концом периода под номером m, отсчитываемых после окончания инвестиций. Метод определения недостающей части периода поясняется рис. 12.4 (принимается, что поступления изменяются по линейному закону).

Из подобия треугольников находим

$$b = \frac{K_0 - A_{m-1}}{A_m - A_{m-1}}.$$

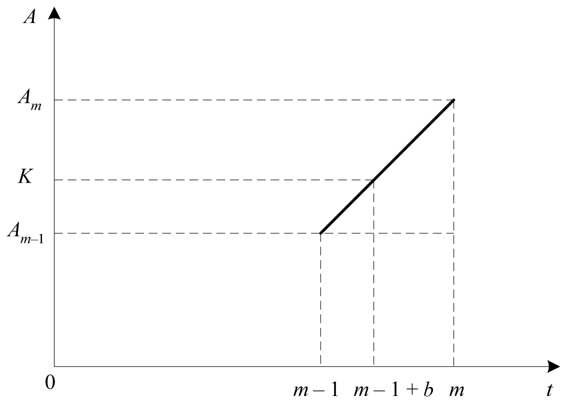


Рис. 12.4. Определение недостающей части периода окупаемости

■ **Пример 12.8.** Имеются два варианта инвестиционного проекта, в которых платежи распределены по годам так, как представлено в табл. 12.3.

Сравнить проекты по сроку окупаемости при ставке дисконтирования $q = 10\%$.

Решение.

Проект 1. Определим номер года, для которого дисконтированные доходы превысят инвестиции:

$$A_1 = \frac{4}{1{,}1} = 3{,}64.$$

Так как $A_1 < K_0$, то делаем следующий шаг:

$$A_2 = \frac{4}{1,1} + \frac{4}{1,1^2} = 6,94.$$

Так как $K_0 < A_2$, то вычисления прекращаем и находим недостающую часть года:

$$b = \frac{5 - 3,64}{6,94 - 3,64} = 0,412 \text{ года, или } 150 \text{ дней.}$$

Для проекта *1* срок окупаемости равен 1 год 150 дней.

Проект 2:

$$A_1 = \frac{4}{1,1} = 3,64;$$

$$A_2 = \frac{4}{1,1} + \frac{5}{1,1^2} = 7,77;$$

$$b = \frac{6 - 3,64}{7,77 - 3,64} = 0,54 \text{ года, или } 197 \text{ дней.}$$

Для проекта *2* срок окупаемости равен 1 году 197 дням.

Таким образом, проект *1* окупится быстрее проекта *2.* □

12.6. Эффекты и эффективность инвестиционного проекта

Таким образом, *качество инвестиционного проекта* чаще всего характеризуется следующими показателями:

- ставкой дисконтирования;
- чистым приведенным доходом;
- индексом прибыльности;
- внутренней нормой доходности;
- периодом окупаемости.

Ставка дисконтирования является относительной безразмерной величиной. Поэтому эта характеристика является эффективностью.

Чистый приведенный доход является разностью между приведенными инвестициями и чистыми доходами, измеряется в денежных единицах и является эффектом.

Индекс прибыльности — это отношение приведенных доходов к приведенным инвестициям, величина безразмерная, является эффективностью.

Внутренняя норма доходности — это ставка дисконтирования, при которой приведенные доходы равны приведенным инвестициям, величина безразмерная и является эффективностью.

Периодом окупаемости является период, в течение которого приведенные к окончанию инвестиций доходы окупят инвестиции, приведенные к тому же моменту времени. Измеряется период окупаемости в единицах времени, поэтому является эффектом.

Упражнения

ТЕСТ 12.1

Какие из перечисленных ниже высказываний относятся к эффективности?

1. Чистый доход.
2. Валовая прибыль
3. Индекс прибыльности.
4. Внутренняя норма доходности.
5. Производительность труда.
6. Срок окупаемости.
7. Чистый приведенный доход.
8. Выручка.
9. Рентабельность.

ЗАДАЧА 12.1

Имеется два инвестиционных проекта, в которых платежи распределены по годам так, как показано в таблице.

Вариант проекта	*Инвестиции*	*Доходы*			
		1-й год	*2-й год*	*3-й год*	*4-й год*
Проект 1	118	40	40	40	40
Проект 2	118	60	50	40	15

Сравнить проекты при ставке дисконтирования $q = 15\%$.

Глава 13

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ ПОТОКОВ ПЛАТЕЖЕЙ

13.1. Схема классического потока платежей

Схема классического потока платежей представлена на рис. 13.1.

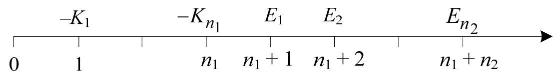


Рис. 13.1. Схема классического потока инвестиционного проекта

Будем считать, что в проект вкладываются средства (инвестиции) в течение n_1 лет, а доход этот проект приносит n_2 года. Общий срок проекта равен $n = n_1 + n_2$ лет. Ясно, что расходы и доходы инвестиционного проекта осуществляются в течение всего года. Однако для удобства анализа все внутригодовые выплаты пересчитаны к концу года. Инвестициям присвоен знак минус: $-K_1, \ldots,$ $-K_{n_1}$. Доходам присвоен знак плюс: $E_1,\ \ldots,\ E_{n_2}$.

Если в качестве ставки дисконтирования принять стоимость капитала, используемого в качестве этих инвестиций, то все затраты можно привести к началу проекта. Эти затраты вычисляются по формуле

$$K_0 = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{K_j}{(1+q)^j}, \qquad \textbf{(13.1)}$$

где K_j — инвестиционные расходы в году под номером j; q — ставка дисконтирования, приравненная к стоимости капитала.

13.2. Чистый приведенный доход

13.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСТОГО ПРИВЕДЕННОГО ДОХОДА

Чистый приведенный, или ***дисконтированный***, ***доход*** — это разность между суммой доходов и суммой расходов, дисконтированных на начало инвестиционного проекта. Если финансовый поток представлен в виде платежей постнумерандо (рис. 13.1), то формула для расчета чистого приведенного дохода имеет вид

$$\mathrm{NPV} = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j}{(1+q)^j}, \qquad \textbf{(13.2)}$$

где P_j — инвестиционные расходы (со знаком минус) или доходы (со знаком плюс) в периоде $j = 1, 2, ..., n$; n — продолжительность инвестиционного проекта; q — ставка дисконтирования.

Проект может быть принят для дальнейшего рассмотрения, если чистый приведенный доход больше нуля. Если чистая приведенная стоимость меньше нуля, то проект отвергается. Положительная величина чистого приведенного дохода говорит о том, что доходы окупили расходы на капитал.

■ **Пример 13.1.** Имеются два варианта инвестиционного проекта, в которых платежи постнумерандо распределены по годам следующим образом:

Проект 1	−2	−4	4	4	5
Проект 2	−3	−3	4	5	6

Сравнить проекты по чистому приведенному доходу при ставке дисконтирования $q = 10\%$.

Решение:

$$\mathrm{NPV}_1 = -\frac{2}{1,1} - \frac{4}{1,1^2} + \frac{4}{1,1^3} + \frac{4}{1,1^4} + \frac{5}{1,1^5} = 3,718;$$

$$\mathrm{NPV}_2 = -\frac{3}{1,1} - \frac{3}{1,1^2} + \frac{4}{1,1^3} + \frac{5}{1,1^4} + \frac{6}{1,1^5} = 4,939.$$

Так как $\mathrm{NPV}_2 > \mathrm{NPV}_1$, то второй проект предпочтительнее первого. □

13.2.2. ЧИСТЫЙ ПРИВЕДЕННЫЙ ДОХОД ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ПОТОКОВ

Если установлены закономерности поведения финансовых потоков во времени, то появляется возможность развернутого анализа различных факторов и их влияния на эффективность проектов. Например, для платежей и поступлений в виде p-срочной ренты и при начислении процентов один раз в году формула для расчета чистого приведенного дохода приобретает вид

$$\mathrm{NPV} = \frac{E_1 a_{n_2;q}^{(p_2)}}{(1+q)^{n_1}} - K_1 a_{n_1;q}^{(p_1)}, \tag{13.3}$$

где $a_{n;q}^{(p)} = \dfrac{1-(1+q)^{-n}}{p\left[(1+q)^{1/p}-1\right]}$ — коэффициент приведения ренты; E_1, K_1 — ежегодные поступления и затраты соответственно; p_1, p_2 — количество выплат в году инвестиций и количество поступлений в году доходов соответственно; n_1 — длительность инвестиций в годах; n_2 — длительность поступлений доходов в годах, т.е. продолжительность поступления доходов сразу после завершения инвестиций.

Таким образом, справедливо соотношение

$$n_1 + n_2 = n. \tag{13.4}$$

В формуле **(13.3)** из современной величины отсроченной ренты (доход) вычитается современная величина немедленной ренты (инвестиции).

Чистый приведенный доход непрерывных потоков платежей с непрерывной ставкой наращения (силой роста) может быть представлен следующим образом. Пусть инвестиции в периоде от 0 до n_1 лет имеют интенсивность $K(t)$, а интенсивность поступлений в периоде от n_1 до n_2 лет определяется функцией $E(t)$. Сила роста во все время жизни проекта описывается функцией $\delta(t)$. Тогда, используя соотношение **(2.77)**, можно записать

$$\mathrm{NPV} = \int_{n_1}^{n_2} E(t)\, \mathrm{e}^{-\int_0^t \delta(t)\,dt}\, dt - \int_0^{n_1} K(t)\, \mathrm{e}^{-\int_0^t \delta(t)\,dt}\, dt. \tag{13.5}$$

■ **Пример 13.2.** Интенсивность инвестиций равна 10 млн руб./год. Длительность инвестиций равна двум годам. Сразу после окончания инвестиций интенсивность дохода составила 12 млн руб./год. Длительность поступлений дохода равна трем годам. Сила роста принята 15% годовых.

Определить чистый приведенный доход.

Решение.

Чистый приведенный доход определяется по формуле

$$\text{NPV} = \int_2^5 12\cdot10^6\cdot \mathrm{e}^{-\int_0^t 0{,}15dt}\,dt - \int_0^2 10^7\cdot \mathrm{e}^{-\int_0^t 0{,}15dt}\,dt =$$

$$= 12\cdot10^6\cdot\int_2^5 \mathrm{e}^{-0{,}15\cdot t} - 10^7\cdot\int_0^2 \mathrm{e}^{-0{,}15\cdot t} = 1{,}2\cdot10^7\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^{-0{,}15\cdot t}}{-0{,}15}\right|_2^5 - 10^7\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^{-0{,}15\cdot t}}{-0{,}15}\right|_0^2 =$$

$$= \frac{10^7}{0{,}15}\left(1{,}2\left(\mathrm{e}^{-0{,}3}-\mathrm{e}^{-0{,}75}\right)-\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}3}\right)\right) = 4\ 197\ 348{,}15\ \text{руб.}\quad\square$$

13.2.3. АНАЛИЗ ЧИСТОГО ПРИВЕДЕННОГО ДОХОДА

При высоком уровне ставки дисконтирования отдаленные платежи оказывают малое влияние на чистый приведенный доход. Поэтому различные по продолжительности варианты могут оказаться практически равноценными. С другой стороны, считают, что проект с более длительным поступлением доходов при прочих равных условиях предпочтительнее. Это вызывает попытки пересмотра рассмотренной выше методики расчета чистого приведенного дохода. Например, те поступления, которые охватываются сроком окупаемости, дисконтируются и рассматриваются как покрытие инвестиций. На остальные поступления дисконтирование не распространяется. Такие подходы иногда используются, несмотря на трудности их экономического обоснования.

13.3. Индекс прибыльности (рентабельность)

13.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДЕКСА ПРИБЫЛЬНОСТИ

Индексом прибыльности называется отношение суммы приведенных доходов к сумме приведенных на ту же дату инвестиционным расходов. Обычно расходы и доходы приводятся на начало проекта:

$$PI = \sum_{j=n_1+1}^{n} E_j/\left(1+q\right)^j \Bigg/ \sum_{j=1}^{n_1} K_j/\left(1+q\right)^j, \qquad \textbf{(13.6)}$$

где E_j — доходы в году под номером *j*; K_j — инвестиционные расходы в году под номером *j*.

Заметим, что в отдельные годы доходы и инвестиционные расходы равны нулю.

■ **Пример 13.3.** Имеются два варианта инвестиционного проекта, в которых платежи постнумерандо распределены по годам следующим образом:

Проект 1	−2	−4	4	4	5
Проект 2	−3	−3	4	5	6

Сравнить проекты по индексу прибыльности при ставке дисконтирования 10%.

Решение.

Проект 1:

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{K_j}{(1+q)^j}=\frac{2}{1{,}1}+\frac{4}{1{,}1^2}=5{,}124;$$

$$\sum_{j=3}^{5}\frac{E_j}{(1+q)^j}=\frac{4}{1{,}1^3}+\frac{4}{1{,}1^4}+\frac{5}{1{,}1^5}=8{,}842;\quad \mathrm{PI}_1=\frac{8{,}842}{5{,}124}=1{,}7256.$$

Проект 2:

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{K_j}{(1+q)^j}=\frac{3}{1{,}1}+\frac{3}{1{,}1^2}=5{,}2066;$$

$$\sum_{j=3}^{5}\frac{E_j}{(1+q)^j}=\frac{4}{1{,}1^3}+\frac{5}{1{,}1^4}+\frac{6}{1{,}1^5}=10{,}146;\quad \mathrm{PI}_2=\frac{10{,}146}{5{,}2066}=1{,}949.$$

Так как $\mathrm{PI}_2>\mathrm{PI}_1$, то проект *2* предпочтительнее проекта *1*. □

13.3.2. ИНДЕКС ПРИБЫЛЬНОСТИ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ПОТОКОВ

Как и в предыдущем случае, при установленных закономерностях поведения финансовых потоков во времени появляется возможность развернутого анализа различных факторов и их влияния на эффективность. Для платежей и поступлений в виде p-срочной ренты и при начислении процентов один раз в году формула для расчета рентабельности приобретает вид

$$U=\frac{E_1a_{n_2;q}^{(p_2)}\Big/(1+q)^{n_1}}{K_1a_{n_1q}^{(p_1)}}\,, \qquad \textbf{(13.7)}$$

где n_1 — продолжительность периода инвестиций; n_2 — продолжительность периода получения доходов, $a_{n;q}^{(p)}=\dfrac{1-(1+q)^{-n}}{p\left[(1+q)^{1/p}-1\right]}$.

Здесь современная величина отсроченной ренты (доход) делится на современную величину немедленной ренты (инвестиции).

Для непрерывных потоков платежей с непрерывной ставкой дисконтирования индекс прибыльности определяется по формуле

$$\mathrm{PI} = \int\limits_{n_1}^{n_1+n_2} E(t)\mathrm{e}^{-\int\limits_0^t \delta(t)dt} dt \Bigg/ \int\limits_0^{n_1} K(t)\mathrm{e}^{-\int\limits_0^t \delta(t)dt} dt. \qquad \textbf{(13.8)}$$

■ **Пример 13.4.** Для условий примера 13.2 найти индекс прибыльности.
Решение.
Индекс прибыльности определяется по формуле

$$\mathrm{PI} = \int\limits_2^5 1,2\cdot 10^7 \cdot \mathrm{e}^{-\int\limits_0^t 0,15dt} dt \Bigg/ \int\limits_0^2 10^7 \cdot \mathrm{e}^{-\int\limits_0^t 0,15dt} dt = 1,2\cdot \int\limits_2^5 \mathrm{e}^{-0,15\cdot t} \Bigg/ \int\limits_0^2 \mathrm{e}^{-0,15\cdot t} =$$

$$= 1,2\cdot \left.\frac{\mathrm{e}^{-0,15\cdot t}}{-0,15}\right|_2^5 \Bigg/ \left.\frac{\mathrm{e}^{-0,15\cdot t}}{-0,15}\right|_0^2 = 1,2\cdot\left(\mathrm{e}^{-0,3}-\mathrm{e}^{-0,75}\right)\Big/\left(1-\mathrm{e}^{-0,3}\right) = 1,243. \square$$

13.3.3. АНАЛИЗ ИНДЕКСА ПРИБЫЛЬНОСТИ

Было установлено, что чистый приведенный доход должен быть больше нуля. Поэтому индекс прибыльности должен быть больше единицы. В этом случае проект может быть принят для дальнейшего рассмотрения. Совместно с чистым приведенным доходом индекс прибыльности может служить хорошим индикатором для принятия решения при выборе проекта. Действительно, индекс прибыльности определяет общую рентабельность инвестиций, т.е. показывает, во сколько раз приведенные доходы превысили приведенные расходы. И тогда, например, при равной рентабельности двух проектов, одинаковых ставках сравнения и прочих равных условиях, кроме величины инвестиций, следует выбрать тот проект, у которого больше чистая приведенная стоимость. При этом необходимо определить, хватит ли инвестиций для финансирования проекта с большим чистым приведенным доходом.

Следует обратить внимание на то, что чистый приведенный доход имеет размерность денежной единицы, а индекс прибыльности величина безразмерная. Иногда этот показатель называют рентабельностью.

13.4. Внутренняя норма доходности

13.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ НОРМЫ ДОХОДНОСТИ

Внутренняя норма доходности — это расчетная процентная ставка, при которой чистая приведенная стоимость равна нулю, т.е. приведенные доходы равны приведенным расходам. В общем случае внутренняя норма доходности находится решением приведенного ниже уравнения относительно Q:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{P_j}{(1+Q)^j} = 0\,, \qquad \textbf{(13.9)}$$

где P_j — инвестиционные расходы (со знаком минус) или доходы (со знаком плюс) в периоде $j = 1, 2, ..., n$; n — продолжительность инвестиционного проекта.

Это уравнение с одним неизвестным Q.

Если внутренняя норма доходности больше ставки дисконтирования, то чистая приведенная стоимость является положительной. При их равенстве проект имеет чистую нулевую приведенную стоимость.

■ **Пример 13.5.** Платежи постнумерандо инвестиционного проекта распределены по годам следующим образом: −2; −4; 4; 4; 5.

Определить внутреннюю норму доходности.

Решение.

Исходное уравнение имеет вид

$$-\frac{2}{1+Q} - \frac{4}{(1+Q)^2} + \frac{4}{(1+Q)^3} + \frac{4}{(1+Q)^4} + \frac{5}{(1+Q)^5} = 0.$$

Для решения этого уравнения воспользуемся методом Ньютона—Рафсона. Введя обозначение $x = 1+Q$ и умножив левую и правую части на x^5, перепишем это уравнение в виде

$$-2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x + 5 = 0.$$

В качестве искомой функции принимаем

$$f(x) = -2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x + 5.$$

Производная этой функции

$$f'(x) = -8x^3 - 12x^2 + 8x + 4.$$

Положим $x_1 = 1,5$.

▶ Итерация 1:

$$f(1,5) = -2\cdot 1,5^4 - 4\cdot 1,5^3 + 4\cdot 1,5^2 + 4\cdot 1,5 + 5 = -3,625;$$

$$f'(1,5) = -8\cdot 1,5^3 - 12\cdot 1,5^2 + 8\cdot 1,5 + 4 = -38;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,5 - \frac{-3,625}{-3,8} = 1,4046053\cdot$$

▶ Итерация 2:

$$f(x_2) = -0,359383; \quad f'(x_2) = -30,6075; \quad x_3 = x_2 - \frac{-0,359383}{-30,6075} = 1,3928636.$$

Прежде чем переходить к следующей итерации, проведем проверку, подставив полученный результат в исходное уравнение:

$$-\frac{2}{x_3}-\frac{4}{x_3^2}+\frac{4}{x_3^3}+\frac{4}{x_3^4}+\frac{5}{x_3^5}=-0,001\cdot$$

В идеале этот результат должен быть равен нулю. Так как результат невелик, то можно прекратить вычисления и принять $Q=39,29\%$. □

13.4.2. ВНУТРЕННЯЯ НОРМА ДОХОДНОСТИ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ПОТОКОВ

Для регулярных потоков инвестиций и доходов при составлении уравнения для внутренней нормы доходности приравниваются современные стоимости инвестиций и доходов. Например, для платежей и поступлений в виде p-срочной ренты и при начислении процентов один раз в году формула для расчета внутренней нормы доходности приобретает вид

$$\frac{E_1 a_{n_2;q}^{(p_2)}}{(1+q)^{n_1}}=K_1 a_{n_1;q}^{(p_1)}, \qquad \textbf{(13.10)}$$

где $a_{n;q}^{(p)}=\dfrac{1-(1+q)^{-n}}{p\left[(1+q)^{1/p}-1\right]}$ — коэффициент приведения ренты;

E_1, K_1 — ежегодные поступления и затраты соответственно; p_1, p_2 — количество выплат в году инвестиций и количество поступлений в году доходов соответственно; n_1 — длительность инвестиций в годах; n_2 — длительность поступлений доходов в годах.

Для непрерывных потоков платежей с непрерывной ставкой наращения внутреннюю норму доходности находят путем решения уравнения, у которого чистый приведенный доход приравнивается нулю, относительно силы роста. Поскольку сила роста в общем случае является функцией времени, то эту функцию удобно представить в виде

$$\delta(t)=\delta_0+\varepsilon(t)\text{, причем }\int_0^n \varepsilon(t)\,dt=0. \qquad \textbf{(13.11)}$$

Таким образом, сила роста состоит из постоянной составляющей δ_0 и переменной составляющей $\varepsilon(t)$, среднее значение которой на временно́м интервале от начала проекта до его завершения равно нулю. Пусть функция $\varepsilon(t)$ известна априори. Будем считать в этом случае, что внутренней нормой доходности проекта является такая величина δ_0, при которой уравнение **(14.12)** превращается в тождество:

$$\int_{n_1}^{n_1+n_2} E(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t(\delta_0+\varepsilon(t))dt}dt-\int_0^{n_1} K(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t(\delta_0+\varepsilon(t))dt}dt=0. \qquad \mathbf{(13.12)}$$

Иначе можно записать

$$\int_{n_1}^{n_1+n_2} E(t)\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot t-\int_0^t\varepsilon(t)\,dt}dt-\int_0^{n_1} K(t)\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot t-\int_0^t\varepsilon(t)\,dt}dt=0. \qquad \mathbf{(13.13)}$$

Пусть $\varepsilon(t)=0$, а плотности инвестиций и доходов будут величинами постоянными. Тогда уравнение для определения внутренней нормы доходности можно представить в виде

$$E\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot t}}{\delta_0}\right|_{n_1}^{n_1+n_2}=K\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot t}}{\delta_0}\right|_{0}^{n_1}$$

или
$$\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot(n_1+n_2)}-\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot n_1}=\frac{K}{E}\cdot\left(\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot n_1}-1\right),$$

$$\left(1+\frac{K}{E}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot n_1}-\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot(n_1+n_2)}=\frac{K}{E}. \qquad \mathbf{(13.14)}$$

Графический метод решения этого уравнения поясняется рис. 13.2. Функции, приведенные на графике, обозначены следующими номерами:

$$1\Rightarrow\left(1+\frac{K}{E}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot n_1};$$

$$2\Rightarrow\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot(n_1+n_2)};$$

$$3\Rightarrow\left(1+\frac{K}{E}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot n_1}-\mathrm{e}^{-\delta_0\cdot(n_1+n_2)};$$

$$4\Rightarrow\frac{K}{E}.$$

Решением уравнения **(13.14)** является точка пересечения кривых *3* и *4*. Внутренняя норма доходности на рис. 13.2 обозначена знаком Δ_0.

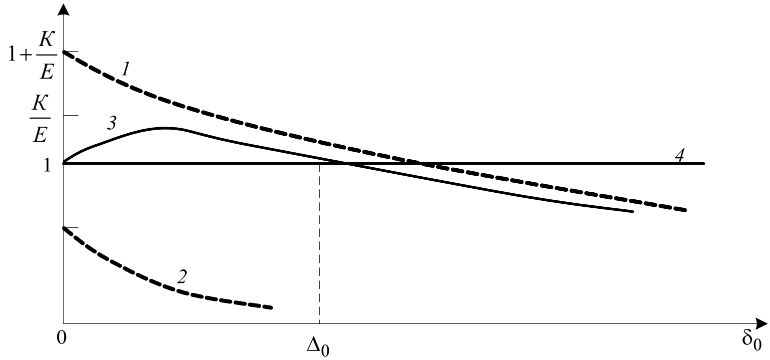


Рис. 13.2. Графический метод решения уравнения

В общем случае решить нелинейное уравнение графическим методом можно в Excel, построив таблицу для значений функции при различных значениях аргументов. При этом, чем меньше будет выбран шаг, тем точнее будет результат.

■ **Пример 13.6.** Плотность инвестиций по модулю равна плотности доходов. Срок инвестиций равен 1,5 года, а общий срок инвестиционного проекта равен 11,5 лет.

Найти внутреннюю норму доходности.

Решение.

Уравнение для определения внутренней нормы доходности имеет вид

$$2\cdot e^{-\delta_0\cdot 1,5}-e^{-\delta_0\cdot 11,5}=1.$$

Решить это уравнение можно методом Ньютона—Рафсона.

В качестве искомой функции принимаем

$$f(\delta_0)=2\cdot e^{-\delta_0\cdot 1,5}-e^{-\delta_0\cdot 11,5}-1.$$

Производная этой функции

$$f'(\delta_0)=-3\cdot e^{-\delta_0\cdot 1,5}+11,5\cdot e^{-\delta_0\cdot 11,5}.$$

Положим $\delta_{01}=0,4$.

▶ Итерация 1:

$$f(0,4)=2\cdot e^{-0,4\cdot 1,5}-e^{-0,4\cdot 11,5}-1=0,087511;$$

$$f'(0,4)=-3\cdot e^{-0,4\cdot 1,5}+11,5\cdot e^{-0,4\cdot 11,5}=-1,53084;$$

$$\delta_{02}=\delta_{01}-\frac{f(\delta_{01})}{f'(\delta_{01})}=0,4-\frac{0,087511}{-1,53084}=0,457205.$$

▶ Итерация 2:

$$f(\delta_{02})=0,00216;\quad f'(\delta_{02})=-1,45118;\quad \delta_{03}=0,458694\,.$$

▶ Итерация 3:

$$f(\delta_{03}) = 0{,}00000175;\quad f'(\delta_{02}) = -1{,}44882;\quad \delta_{03} = 0{,}458695.$$

Поскольку результаты второй и третьей итераций практически совпали, то вычисления можно прекратить и принять внутреннюю норму доходности равной

$$\Delta_0 = 0{,}458695, \quad \text{или} \quad 45{,}8695\% \approx 45{,}87\%. \quad \square$$

13.4.3. АНАЛИЗ ВНУТРЕННЕЙ НОРМЫ ДОХОДНОСТИ

Внутренняя норма доходности является внутренней характеристикой проекта. ***Внутренняя норма доходности*** — это наибольшая стоимость инвестиций, при которой проект еще остается безубыточным.

Понятно, чем больше внутренняя норма доходности при рассматриваемой схеме инвестиций, тем больший доход приносит проект. Однако эта характеристика не является доходностью инвестиций в том смысле, в котором используется понятие доходности, например, при анализе кредита. С другой стороны внутреннюю норму доходности нельзя использовать для оценки проектов, у которых график чистого приведенного дохода несколько раз пересекается с осью ставки дисконтирования.

13.5. Доходность инвестиций к погашению

Под доходностью инвестиций к погашению будем понимать доходность будущих доходов по проекту относительно одной выплаты, являющейся суммой всех дисконтированных инвестиций. Сумма всех дисконтированных инвестиций вычисляется по формуле **(13.1)**. Доходность инвестиций к погашению определяется уравнением **(12.3)**.

■ **Пример 13.7.** Платежи постнумерандо инвестиционного проекта распределены по годам следующим образом: −2; −4; 4; 4; 5.

Определить доходность инвестиций при стоимости капитала, равной 10% годовых.

Решение.

Сумма дисконтированных к началу проекта инвестиций равна

$$K_0 = \frac{2}{1+0{,}1} + \frac{4}{(1+0{,}1)^2} = 5{,}124.$$

Исходное уравнение для доходности имеет вид

$$\frac{4}{(1+r)^3} + \frac{4}{(1+r)^4} + \frac{5}{(1+r)^5} - 5{,}124 = 0.$$

Для решения уравнения воспользуемся методом Ньютона—Рафсона:

$$f(r)=\frac{4}{(1+r)^3}+\frac{4}{(1+r)^4}+\frac{5}{(1+r)^5}-5{,}124;$$

$$f'(r)=-\frac{12}{(1+r)^4}-\frac{16}{(1+r)^5}-\frac{25}{(1+r)^6}.$$

Принимаем $r_1=0{,}2$.

▶ Итерация 1:

$$f(0{,}2)=\frac{4}{(1+0{,}2)^3}+\frac{4}{(1+0{,}2)^4}+\frac{5}{(1+0{,}2)^5}-5{,}124=1{,}129215;$$

$$f'(0{,}2)=-\frac{12}{(1+0{,}2)^4}-\frac{16}{(1+0{,}2)^5}-\frac{25}{(1+0{,}2)^6}=-20{,}589528;$$

$$r_2=0{,}2-\frac{1{,}129215}{-20{,}589528}=0{,}254844.$$

▶ Итерация 2:

$$f(r_2)=0{,}1206395;\quad f'(r_2)=-16{,}3854642;\quad r_3=0{,}262207.$$

▶ Итерация 3:

$$f(r_3)=0{,}00178162;\quad f'(r_3)=-15{,}9044193;\quad r_4=0{,}262319.$$

Таким образом, доходность инвестиций к погашению $r\approx 26{,}23\%$. □

13.6. Период окупаемости

13.6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДА ОКУПАЕМОСТИ

Период* (*срок*) *окупаемости — это временной интервал, в течение которого сумма чистых доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, равна сумме инвестиций, приведенных к тому же моменту времени.

При определении периода окупаемости находят сумму инвестиций K, приведенных к моменту их завершения, по формуле

$$K=\sum_{t=1}^{n_1}K_t(1+q)^{n_1-t}. \qquad \textbf{(13.15)}$$

Затем, используя соотношение $A_m=\sum_{j=1}^{m}\frac{E_j}{(1+q)^j}$, определяют значение m, для которого удовлетворяется неравенство

$$A_{m-1}\le K\le A_m.$$

Период окупаемости лежит между концом периода под номером $m-1$ и концом периода под номером m, отсчитываемых после окончания инвестиций. Метод определения недостающей части периода поясняется рис. 12.4 (принимается, что поступления изменяются по линейному закону).

Период окупаемости равен сумме $m-1$ и недостающей части года b, вычисляемой по формуле

$$b = \frac{K - A_{m-1}}{A_m - A_{m-1}}. \qquad \textbf{(13.16)}$$

Таким образом, период окупаемости находят по формуле

$$\text{PBP} = m - 1 + b. \qquad \textbf{(13.17)}$$

13.6.2. ПЕРИОД ОКУПАЕМОСТИ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ПОТОКОВ

При регулярных потоках проекта формула для определения срока окупаемости упрощается. Например, для p-срочной ренты при начислении процентов один раз в году срок окупаемости рассчитывается по формуле

$$\text{PBP} = -\frac{\ln\left\{1 - \frac{K}{E_1} p\left[(1+q)^{1/p} - 1\right]\right\}}{\ln(1+q)},$$

где K — затраты, приведенные к окончанию инвестиций; E_1 — отдача от инвестиций за год; p — количество поступлений дохода в течение года.

■ **Пример 13.8.** Инвестиции производятся по полугодиям по 50 млн руб. за полгода в течение трех лет. Ожидаемая поквартальная отдача — 20 млн руб. в квартал. Ставка сравнения 10%.

Определить срок окупаемости.

Решение.

Затраты, приведенные к окончанию инвестиций, вычисляются по формуле

$$K = K_0 \frac{(1+q)^{n_1} - 1}{p_1\left[(1+q)^{1/p_1} - 1\right]} = 100 \cdot \frac{1{,}1^3 - 1}{2\left(1{,}1^{0{,}5} - 1\right)} = 339{,}078,$$

где $K_0 = 50 \cdot 2 = 100$ млн руб.; $p_1 = 2$; $n_1 = 3$.

Подставив значение K, $E_1 = 20 \cdot 4 = 80$ млн руб. и $p = 4$ в формулу для периода окупаемости, получим

$$\text{PBP} = -\frac{\ln\left[1 - \frac{339{,}078 \cdot 4}{80}\left(1{,}1^{0{,}25} - 1\right)\right]}{\ln 1{,}1} = 5{,}52 \text{ года.} \ \square$$

Для непрерывных потоков платежей с непрерывной ставкой наращения (силой роста) сумма инвестиций K, приведенных к моменту их завершения, определяется по формуле

$$K = \int_{0}^{n_1} K(t) e^{\int_0^t \delta(t)\,dt}\, dt.$$

Величина дохода для произвольного момента времени n, приведенная к окончанию инвестиций, вычисляется по формуле

$$E_n = \int_{n_1}^{n} E(t) e^{-\int_0^t \delta(t)\,dt}\, dt.$$

По определению, n будет равняться периоду окупаемости, если приведенная к концу инвестиций величина дохода будет равна инвестициям, приведенным к тому же моменту времени. Таким образом, уравнение для периода окупаемости имеет вид

$$\int_{n_1}^{\mathrm{PBP}} E(t) e^{-\int_0^t \delta(t)\,dt}\, dt = \int_{0}^{n_1} K(t) e^{\int_0^t \delta(t)\,dt}\, dt.$$

13.6.3. АНАЛИЗ ПЕРИОДА ОКУПАЕМОСТИ

Период окупаемости не учитывает всего срока функционирования проекта. На него не влияет отдача, лежащая за пределами этого срока. Это является основным недостатком рассматриваемого показателя. Наиболее сильно этот недостаток проявляется при неравномерных денежных потоках. Поэтому срок окупаемости не служит критерием выбора проекта, а используется лишь в виде ограничения при принятии решения.

13.7. Общий случай потока платежей

Убывающая функция чистого приведенного дохода от ставки сравнения (см. рис. 12.3) не всегда имеет место. Если, например, ранние платежи положительны, а поздние отрицательны, то функция чистого приведенного дохода может возрастать при увеличении ставки дисконтирования. В общем случае функция чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования может несколько раз пересекаться с осью q. В таких случаях использование внутренней нормы доходности для оценки проектов становится весьма проблематичным. Рассмотрим пример.

■ **Пример 13.9.** Пусть выплаты постнумерандо распределены по годам следующим образом: −210; 500; −295.

Построить зависимость чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования.

Решение.

Для условий примера выражение для чистого приведенного дохода можно представить в виде

$$\text{NPV} = -\frac{210}{1+q} + \frac{500}{(1+q)^2} - \frac{295}{(1+q)^3}.$$

Точки пересечения этой функции с осью $0q$ находят из уравнения

$$-\frac{210}{1+q} + \frac{500}{(1+q)^2} - \frac{295}{(1+q)^3} = 0,$$

или

$$210 \cdot (1+q)^2 - 500 \cdot (1+q) + 295 = 0.$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$q_1 = 0,079 \quad \text{и} \quad q_2 = 0,3.$$

Экстремальные точки находят из уравнения

$$\frac{210}{(1+q)^2} - \frac{1000}{(1+q)^3} + \frac{885}{(1+q)^4} = 0,$$

или

$$210 \cdot (1+q)^2 - 1000 \cdot (1+q) + 885 = 0.$$

Экстремальные точки имеют следующие абсциссы:

$$q_{1Э} = 0,175 \quad \text{и} \quad q_{2Э} = 2,6.$$

Значения функции в экстремальных точках равны

$$\text{NPV}_{1Э} = -\frac{210}{1,175} + \frac{500}{1,175^2} - \frac{295}{1,175^3} = 1,6;$$

$$\text{NPV}_{2Э} = -\frac{210}{3,6} + \frac{500}{3,6^2} - \frac{295}{3,6^3} = -26,1.$$

Таким образом, график функции чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования имеет вид, представленный на рис. 13.3.

Функция чистой приведенной стоимости от ставки дисконтирования пересекает ось абсцисс в двух точках (см. рис. 13.3). □

Рассмотрим характеристики такого проекта на следующем примере.

■ **Пример 13.10.** Для условий примера 13.9 определить характеристики проекта для ставки сравнения 10% годовых.

Решение.

Найдем чистый приведенный доход:

$$\text{NPV} = -\frac{210}{1,1} + \frac{500}{1,1^2} - \frac{295}{1,1^3} = 0,68.$$

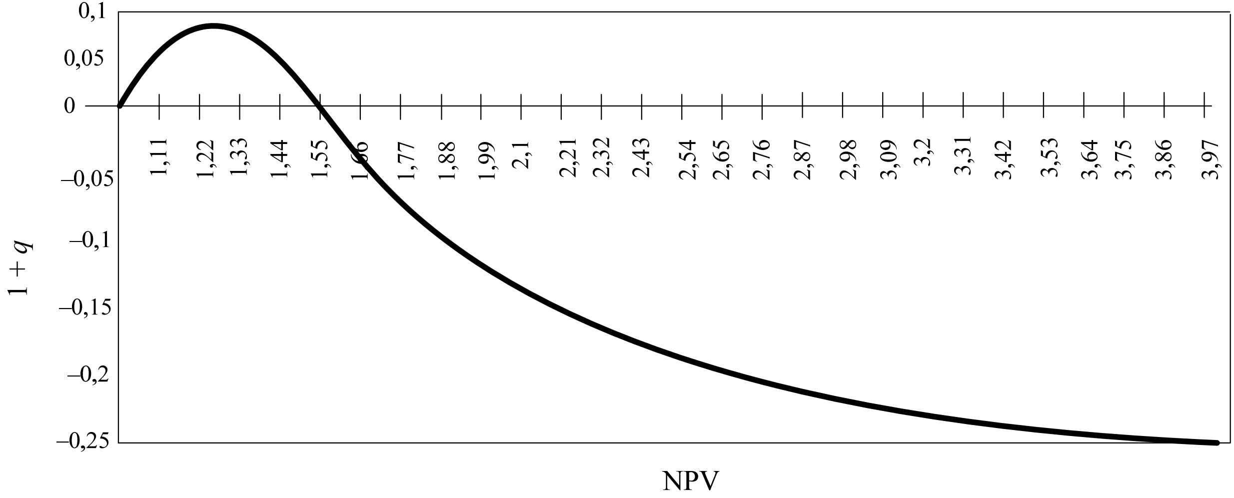


Рис. 13.3. NPV-ставка дисконтирования

Индекс прибыльности

$$\mathrm{PI} = \frac{500}{1{,}1^2} \Bigg/ \left(\frac{295}{1{,}1^3} + \frac{210}{1{,}1} \right) = 1{,}0016.$$

При определении доходности инвестиций найдем вначале сумму всех дисконтированных инвестиций:

$$K_0 = \frac{210}{1{,}1} + \frac{295}{1{,}1^3} = 412{,}5.$$

Уравнение для доходности инвестиций к погашению имеет вид

$$\frac{500}{(1+r)^2} = 412{,}5.$$

Отсюда находим

$$r = \left(\frac{500}{412{,}5} \right)^{0{,}5} - 1 = 0{,}101, \text{ или } 10{,}1\%. \quad \square$$

13.8. Сравнение показателей качества инвестиционного проекта

В общем случае применение различных показателей к одним и тем же объектам может дать противоречивые результаты, которые могут существенным образом зависеть от ставки сравнения.

Существует мнение, что все рассмотренные показатели, кроме чистого приведенного дохода, обладают существенными недостатками, некоторые из которых отмечены выше. Поэтому единственным показателем, который следует применять при оценке проектов, является чистый приведенный доход.

Тем не менее для полной оценки проекта необходимо использовать несколько показателей, например показатели, приведенные выше.

■ **Пример 13.11.** Имеются два варианта инвестиционного проекта, в которых платежи постнумерандо распределены по годам следующим образом:

Проект 1	−5	−20	3	10	10	20	20
Проект 2	−20	−5	5	10	10	20	20

Определить показатели качества этих проектов при ставках сравнения 10% и 20%.

Решение.

Результаты расчетов представлены в таблице.

Показатель	$q_1 = 10\%$		$q_2 = 20\%$	
	Проект 1	*Проект 2*	*Проект 1*	*Проект 2*
NPV	15,77	16,03	4,8	3,88
PI	1,748	1,719	1,266	1,192
PBP	3,51	3,49	4,14	4,306
IRR, %	28,12	25,27	28,12	25,27
r, %	21,82	22,75	25,37	24,07

При дисконтной ставке 20% первый проект имеет преимущества перед вторым по всем показателям. При ставке 10% первый проект имеет преимущества по индексу прибыльности, внутренней норме доходности и модифицированной норме доходности, а по чистому приведенному доходу, сроку окупаемости и доходности инвестиций преимущества имеет второй проект. □

Из приведенного примера следует, что при выборе проекта необходимо проанализировать все показатели. Тем не менее при возникновении затруднений при выборе проекта следует ориентироваться на доходность к погашению. Доходность к погашению в этом случае принимается в виде основного показателя.

13.9. Бюджетная эффективность и социальные результаты реализации инвестиционных проектов

Бюджетные показатели инвестиционных проектов определяют доходы и расходы федерального, регионального или местного бюджетов. В качестве основных бюджетных показателей используются рассмотренные выше экономические показатели инвестиционного проекта. К таким показателям относится чистый приведенный доход, индекс прибыльности, внутренняя норма доходности, доходность к погашению инвестиций, период окупаемости. Для расчета бюджетных показателей в приведенных выше формулах буквой K обозначаются расходы бюджета на создание исследуемого инвестиционного проекта, а буквой E — доходы бюджета за счет поступлений от исследуемого инвестиционного проекта. Индекс при букве означает номер года.

Народно-хозяйственные показатели характеризуют инвестиционный проект с точки зрения интересов всего народного хозяйства в целом, а также интересов регионов и отраслей.

Сравнение различных проектов, предусматривающих участие государства, выбор лучшего из них и обоснование размеров и форм государственной поддержки проекта производятся на основе анализа показателей этих проектов.

Расходами бюджета являются все средства, выделяемые из бюджета для финансирования проекта.

К доходам бюджета относятся все поступления в бюджет за счет рассматриваемого проекта.

Показатели народно-хозяйственной экономической эффективности показывают эффективность проекта с точки зрения интересов всего народного хозяйства в целом, а также интересов регионов, отраслей и организаций.

Социальные, политические и другие результаты, которые трудно оценить в денежном выражении, рассматриваются как дополнительные показатели народно-хозяйственной эффективности. Эти показатели учитываются при принятии решения о реализации и о государственной поддержке проекта.

■ **Пример 13.12.** Система электроснабжения города обладает мощностью 20 млн кВт·ч/год. Спрос на электроэнергию постоянно увеличивается. Прогноз потребления электроэнергии на предстоящие 18 лет представлен в табл. 13.1.

Таблица 13.1

Номер года	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8—18*
Ежегодное потребление, млн кВт·ч/год	10	15	20	25	30	35	38	40

Власти города приняли решение о реконструкции системы электроснабжения в целях увеличения ее мощности до 40 млн кВт·ч/год. Инвестиционные затраты на реконструкцию составят за 1-й год 850 тыс. руб., за 2-й — 4350 тыс. руб., за 3-й год — 2650 тыс. руб. После реконструкции, начиная с 4-го года, дополнительные затраты на эксплуатацию составят 700 тыс. руб./год. Выгоды для бюджета за счет платы за электроэнергию и дополнительных налоговых сборов в 4-м году увеличатся на 850 тыс. руб., в 5-м — на 1700 тыс. руб., в 6-м — на 2550 тыс. руб., в 7-м — на 3000 тыс. руб. и с 8-го года по 18-й — на 3400 тыс. руб. Считаем, что все притоки и оттоки средств приходятся на конец года. В приведенных ценах не учтена инфляция. Ставка дисконтирования принимается равной 10%. Стоимость капитала равна 8% годовых. Определить интегральные бюджетные показатели проекта.

Решение. Исходные данные скомпонованы в табл. 13.2.

Таблица 13.2

Номер года	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*7—15*
Ежегодное потребление, млн кВт·ч/год	10	15	20	25	30	35	38	40
Инвестиционные затраты, тыс. руб.	850	4350	2650					
Ежегодные дополнительные эксплуатационные затраты, тыс. руб.	0	0	0	700	700	700	700	700
Выгоды от проекта для бюджета, тыс. руб.	0	0	0	850	1700	2550	3000	3400

Поток платежей бюджета, генерируемый проектом, сведен в табл. 13.3.

Таблица 13.3

Номер года	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8—18*
Платеж, тыс. руб.	−850	−4350	−2650	150	1000	1850	2300	2700

Чистый приведенный доход бюджета проекта

$$NPV = 5588 \text{ тыс. руб.}$$

Так как $NPV > 0$, то проект принимается для дальнейшего рассмотрения.

Индекс прибыльности равен

$$PI = 1{,}88.$$

Внутреннюю норму доходности равна $IRR = 19\%$ годовых.

Доходность инвестиций к погашению составит 16,5% годовых.

Срок окупаемости $BPB = 7$ лет и 336 дней. □

Упражнения

ЗАДАЧИ

13.1. Инвестиции производятся по полугодиям по 100 млн руб. в год в течение трех лет. Ожидаемая поквартальная отдача — 20 млн руб. в квартал в течение 12 лет. Ставка дисконтирования равна 10%. Определить чистый приведенный доход.

13.2. Инвестиции производятся по полугодиям по 50 млн руб. за полгода в течение трех лет. Ожидаемая отдача — 80 млн руб. в год в течение 12 лет при поквартальных выплатах. Ставка дисконтирования равна 10%. Определить рентабельность.

13.3. Платежи постнумерандо инвестиционного проекта распределены по годам следующим образом: −3; −3; 4; 5; 6. Определить внутреннюю норму доходности.

13.4. Предполагается, что плотность инвестиций проекта будет уменьшаться по линейному закону на 10% в год, а плотность дохода будет увеличиваться на 5% в год. Значение инвестиций и дохода на начало проекта равно 1 000 000 руб./год. Инвестиции вкладывают в течение двух лет, доходы получают в течение восьми лет. Определить внутреннюю норму доходности.

13.5. Одноразовые инвестиции в начале проекта составляют 1 000 000 руб. Доходы являются рентой постнумерандо относительно начала проекта с годовыми выплатами 200 000 руб. Срок ренты равен восьми годам. Определить доходность инвестиций.

13.6. Имеются два варианта инвестиционного проекта, в которых платежи постнумерандо распределены по годам следующим образом:

Проект 1	−2	−4	4	4	5
Проект 2	−3	−3	4	5	6

Сравнить проекты по периоду окупаемости при ставке дисконтирования $q = 10\%$.

13.7. Пусть плотность инвестиций и плотность дохода равна 10 ден. ед./год. Срок инвестиций — четыре года. Сила роста — величина постоянная и равна 12% годовых. Определить срок окупаемости инвестиций.

13.8. Пусть выплаты постнумерандо распределены по годам следующим образом: −2; 5; −3. Построить зависимость чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования.

Глава 14 ОЦЕНКА СТОИМОСТИ БИЗНЕСА

14.1. Организационные и правовые основы оценки стоимости бизнеса

Оценка стоимости любого объекта представляет собой упорядоченный, целенаправленный процесс определения в денежном выражении стоимости объекта с учетом потенциального и реального доходов, приносимых им в определенный момент времени в условиях конкретного рынка [16].

Любой участник рыночных отношений обязан располагать достоверной информацией о реальной стоимости бизнеса.

Профессиональная оценка необходима:

- при покупке или продаже бизнеса;
- при выдаче и получении кредитов под залог имущества;
- для принятия обоснованного решения о партнерстве;
- при преобразовании и ликвидации предприятий;
- для принятия инвестиционных решений;
- для принятия решений о санации или банкротстве предприятия;
- при страховании имущества и т.д.

Основным законодательным актом, регулирующим деятельность по оценке бизнеса в России, является Закон «Об оценочной деятельности в Российской Федерации» от 29 июля 1998 г. № 135-ФЗ. Этот вид деятельности регулируется также постановлениями правительства и стандартами.

Начало подготовки профессиональных оценщиков в нашей стране было положено Институтом экономического развития Всемирного банка реконструкции и развития. В развитии оценки бизнеса в России значительную роль играют такие организации, как Российское объединение оценщиков, Федеральный фонд оценки и Национальная коллегия оценщиков.

В международной сфере оценочная деятельность курируется Международным комитетом по стандартам оценки имущества, основными задачами которого являются разработка и публикация стандартов и рекомендаций по проведению разных видов оценки.

Для точного и достоверного определения стоимости необходимо соблюсти ряд условий: определить четкие цели и функции оценки, разработать план оценки, выбрать наиболее эффективный способ оценки объекта, собрать необходимую информацию.

Во всех странах существуют общественные организации оценщиков. В России — это Российское общество оценщиков, Московское общество оценщиков, Московское областное общество оценщиков, Санкт-Петербургское общество оценщиков и др. Главные задачи этих обществ состоят в контроле над деятельностью своих членов и лоббировании своих интересов в законодательных и исполнительных органах власти. Помимо названного закона существуют другие законы и нормативные правовые акты РФ и ее субъектов.

Основанием для проведения оценки является договор между оценщиком и заказчиком. Договор заключается в письменной форме и не требует нотариального удостоверения. Законом установлен *ряд требований к оценщику*.

1. Наличие у оценщика лицензии на осуществление оценочной деятельности.

2. Неразглашение конфиденциальной информации, полученной от заказчика.

3. Независимость оценщика, т.е. отсутствие у оценщика в отношении объекта оценки прав и обязательств помимо договора об оценке.

14.2. Подходы при оценке стоимости бизнеса

При оценке стоимости бизнеса (предприятия) используются в основном следующие три подхода:

- *затратный подход*:
  - – метод чистых активов;
  - – метод ликвидационной стоимости;
- *сравнительный подход*:
  - – метод рынка капитала;
  - – метод сделок;
  - – метод отраслевых коэффициентов;
- *доходный подход*:
  - – метод дисконтированных денежных потоков;
  - – метод капитализации.

Затратный подход используется в тех случаях, когда не существует развитого рынка исследуемого бизнеса, когда предприятие не продается и не покупается, т.е. соображения извлечения дохода не являются причиной оценки. Объектом оценки в таких случаях могут быть больница, правительственное здание и пр. Оценка объекта затратным подходом может производиться на основании стоимости строительства здания с учетом амортизации и т.д.

Сравнительный подход базируется на сравнении стоимости исследуемого и сопоставимого объектов, уже проданных на развитом рынке бизнеса.

Если на рынке обращаются десятки и сотни однородных объектов, целесообразно применение сравнительного подхода. Для оценки сложных и уникальных объектов предпочтительнее затратный подход.

Доходный подход основан на дисконтировании (капитализации) прибыли, которая будет получена в случае сдачи объекта в аренду.

Иногда для получения более достоверных результатов применяется взвешенная оценка стоимости бизнеса. При этом стоимость определяется по формуле

$$\overline{P} = \sum_{t=1}^{T} P_t s_t ,$$

где $\overline{P}$ — средневзвешенная стоимость бизнеса; P_t — стоимость бизнеса, определенная по методу под номером t; T — общее количество методов, по которым определялась стоимость исследуемого бизнеса; s_t — вес, приписываемый оценщиком тому или другому методу в зависимости от его значимости.

Если все методы равнозначны, то $s_t = 1/T$.

При оценке стоимости бизнеса в современных российских условиях *оценщик сталкивается со следующими трудностями*:

- в ряде случаев невозможно получить финансовую отчетность даже открытых акционерных обществ, т.е. налицо информационная закрытость российского рынка;
- большинство оцениваемых предприятий показывают чистую прибыль, близкую к нулю, что является следствием уклонения от налога на прибыль;
- наличие слоя акционеров, которые получили акции почти бесплатно в процессе приватизации.

14.2.1. ЗАТРАТНЫЙ ПОДХОД ПРИ ОЦЕНКЕ СТОИМОСТИ БИЗНЕСА

При оценке стоимости бизнеса при помощи затратного подхода используются понесенные издержки. Так как балансовая стоимость активов предприятия, как правило, не соответствует реальной стоимости, то оценщику необходимо провести корректировку баланса. Затратный подход использует метод чистых активов и метод ликвидационной стоимости.

При использовании метода чистых активов высчитывается и суммируется стоимость недвижимого имущества, стоимость машин и оборудования, стоимость нематериальных активов, приведенная стоимость финансовых долгосрочных и краткосрочных вложений, стоимость товарно-материальных запасов и незавершенного строительства. Затем оцениваются и суммируются дебиторская и кредиторская задолженности. Далее определяют стоимость чистых активов, для чего из суммарной стоимости активов вычисляют кредиторскую задолженность и добавляют дебиторскую задолженность.

К нематериальным активам относят:

- выгодные заключенные контракты;
- закрепленную клиентуру;
- высококвалифицированный персонал;
- патенты и лицензии;
- высокопроизводительные технологии и т.д.

При оценке стоимости бизнеса по методу чистых активов необходимо учесть стоимость нематериальных активов, несмотря на возникающие при этом трудности. К нематериальным активам относятся вложения в рекламу, не защищенные патентами инновации, квалификация персонала и пр. В дальнейшем эти нематериальные активы скажутся на увеличении продаж и прибыли.

Балансовая стоимость активов предприятия вследствие инфляции и используемых методов учета, как правило, не соответствует рыночной стоимости. Поэтому необходимо провести корректировку баланса предприятия, т.е. все составляющие чистых активов надо привести к исследуемому моменту времени путем учета инфляции и амортизации. При этом может быть использован, например, следующий алгоритм.

Определяют *индивидуальный индекс цен данного актива за период времени от момента покупки до момента оценки* по формуле

$$i_p = \frac{P_1}{P_0},$$

где i_p — индивидуальный индекс цен; P_1 — цена актива в момент оценки; P_0 — цена актива в момент покупки.

Находят *амортизационные отчисления за период от момента покупки до момента продажи* в ценах на момент покупки, например, по линейному закону амортизации по формуле

$$a = P_0 \frac{n}{N},$$

где a — амортизационные отчисления за период от момента покупки до момента продажи в ценах на момент покупки; n — период от момента покупки до момента оценки; N — время жизни актива.

Определяют *остаточную цену актива на момент оценки* в ценах на момент оценки:

$$P = (P_0 - a) \cdot i_p.$$

Метод расчета стоимости предприятия по ликвидационной стоимости применяется в том случае, когда ожидается банкротство этого предприятия. При определении ликвидационной стоимости учитываются все расходы, связанные с ликвидацией предприятия. К таким расходам относятся комиссионные, административные издержки по поддержанию работы предприятия до его ликвидации, расходы на юридические и бухгалтерские услуги. Вычисляя из чистой стоимости активов расходы на ликвидацию, получают ликвидационную стоимость.

При определении стоимости предприятия затратным методом необходимая для инвесторов информация о будущих прибылях практически отсутствует.

14.2.2. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ ПОДХОД ПРИ ОЦЕНКЕ СТОИМОСТИ БИЗНЕСА

Сравнительный подход оценки бизнеса основан *на принципе замещения*: «Покупатель не купит объект, если его стоимость превышает стоимость такого же объекта». Возможность применения сравнительного подхода зависит от наличия активно функционирующего рынка собственности. При сравнительном подходе используются метод предприятий-аналогов и метод отраслевых коэффициентов.

▶ ***Метод предприятий-аналогов*** позволяет по характеристикам этих аналогов определить стоимость исследуемого предприятия. *Предприятие-аналог* должно быть сходно с исследуемым предприятием по размеру, продукту, рынкам сбыта, местоположению, соотношению собственного и заемного капиталов и т.д. На основе информации о рыночной цене на акцию, количестве акций, балансовой прибыли, чистой прибыли и амортизационных отчислениях предприятия-аналога определяют ряд коэффициентов-аналогов (мультипликаторов).

Мультипликатор «цена/балансовая прибыль» определяется как рыночная цена всех акций предприятия-аналога к его балансовой прибыли. Этот коэффициент рассчитывается по формуле

$$H_1 = \frac{P \cdot N}{P_1},$$

где P — рыночная цена одной акции предприятия-аналога; N — количество акций предприятия-аналога; P_1 — балансовая прибыль предприятия-аналога.

Мультипликатор «цена/чистая прибыль» рассчитывается как рыночная цена всех акций предприятия-аналога к его чистой прибыли. Этот коэффициент определяется соотношением

$$H_2 = \frac{P \cdot N}{P_2},$$

где P_2 — чистая прибыль предприятия-аналога.

Мультипликатор «цена/элемент денежного потока» находится как отношение рыночной цены всех акций предприятия-аналога к элементу денежного потока, равному чистой прибыли плюс амортизация. Этот коэффициент определяется по формуле

$$H_3 = \frac{P \cdot N}{P_2 + a},$$

где a — амортизация предприятия-аналога.

После определения указанных коэффициентов рассчитывают будущую стоимость предприятия по приведенным ниже формулам.

Будущая стоимость исследуемого предприятия S_1 на основе балансовой прибыли:

$$S_1 = H_1 \cdot P_{1,\text{о}},$$

где $P_{1,\text{о}}$ — ожидаемое (прогнозируемое) к желательному моменту перепродажи значение балансовой прибыли исследуемого предприятия.

Будущая стоимость исследуемого предприятия S_2 на основе чистой прибыли:

$$S_2 = H_2 \cdot P_{2,\text{о}},$$

где $P_{2,\text{о}}$ — ожидаемое (прогнозируемое) значение чистой прибыли исследуемого предприятия.

Будущая стоимость исследуемого предприятия S_3 на основе элемента денежного потока:

$$S_3 = H_3 \cdot \left(P_{2,\text{о}} + a_\text{о}\right),$$

где $a_\text{о}$ — ожидаемое (прогнозируемое) значение амортизации исследуемого предприятия.

▶ Если стоимость акций определяется исходя из стоимости небольших (неконтрольных) пакетов, то рассматриваемый метод называют ***методом рынка капиталов***. Метод позволяет определить стоимость неконтрольного пакета акций с высокой степенью ликвидности.

▶ Если стоимость определяется стоимостью контрольного пакета, то метод называется ***методом сделок***. Этот метод позволяет определить стоимость контрольного пакета акций предприятия, акции которого на открытом фондовом рынке не продаются. В последнем случае стоимость предприятия увеличивается на величину «премии за контроль», доходящей по международной статистике до 40%.

Как правило, результаты расчета по трем приведенным коэффициентам (в общем случае их может быть больше) отличаются друг от друга. Это связано с тем, что абсолютно похожее предприятие-аналог подобрать невозможно.

Для уточнения стоимости оцениваемого предприятия может быть использовано *средневзвешенное значение* этой стоимости, вычисляемое для нашего случая по формуле

$$\overline{S} = \sum_{t=1}^{3} S_t p_t \ ,$$

где p_t — вес для стоимости S_t.

▶ ***Метод отраслевых коэффициентов*** позволяет на основании опыта продаж бизнеса в той или иной отрасли получать зависимости между ценой продажи и каким-то показателем. Метод используется для оценки малых компаний. На опыте западных фирм получены следующие зависимости.

1. Рекламные агентства и бухгалтерские фирмы продаются за 0,7 и 0,5 от годовой выручки соответственно.

2. Рестораны и туристические агентства продаются за 0,25—0,6 и 0,04—0,1 от валовой выручки соответственно.

3. Предприятия розничной торговли продаются за 0,75—1,5 от суммы: «Чистая прибыль + Оборудование + Запасы».

4. Машиностроительные предприятия продаются за 1,5—2,5 от суммы: «Чистая прибыль + Запасы».

14.2.3. ДОХОДНЫЙ ПОДХОД ПРИ ОЦЕНКЕ СТОИМОСТИ БИЗНЕСА

Доходный подход оценки бизнеса предполагает использование метода дисконтированных денежных потоков и метода капитализации.

Стоимость предприятия при использовании метода дисконтированных денежных потоков принимается равной сумме собственного капитала предприятия на момент его оценки и сумме дисконтированной прибыли за все время существования бизнеса. Если данные по прибыли приведены без учета инфляции, то используется очищенная от инфляции ставка дисконтирования. В противном случае ставка дисконтирования должна рассчитываться с учетов темпов инфляции за рассматриваемый отрезок времени. Таким образом, формулу для расчета стоимости предприятия можно записать в виде

$$A = K + \Pi = K + \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi_j}{(1+q)^j},$$

где K — собственный капитал предприятия на момент его оценки; Π — дисконтированная прибыль; n — время жизни предприятия; j = 1, 2, 3, ..., n — номер года; π_j — прибыль в периоде под номером j; q — ставка дисконтирования.

Эта прибыль обычно принимается равной чистой прибыли плюс амортизация.

Если прибыль увеличивается с темпом роста b, то для j-го периода она вычисляется по формуле

$$\pi_j = \pi(1+b)^j,$$

где π — величина прибыли в начале процесса.

При очень большом времени жизни предприятия $(n \to \infty)$ формулу для расчета стоимости бизнеса можно переписать в виде

$$A = K + \sum_{j=1}^{\infty} \pi \left(\frac{1+b}{1+q} \right)^j.$$

Если q не зависит от времени и $b < q$, тогда

$$A = K + \pi \frac{1+b}{q-b}.$$

Для приведения доходов и расходов к одному моменту времени при оценке бизнеса используют ставку дисконтирования (сравнения). Выбор ставки сравнения существенным образом зависит от инфляции, риска, структуры капитала. Ставка дисконтирования принимается равной рыночной доходности капитала.

Оценку стоимости бизнеса можно проводить также только по дисконтированной чистой прибыли. Если срок жизни исследуемого бизнеса велик и значение собственного капитала невелико, то этим капиталом при расчетах можно пренебречь, так как его влияние на результат невелико. Тогда формула для расчета стоимости предприятия примет вид

$$A = \sum_{j=1}^{n} \frac{\psi_j}{(1+q)^j},$$

где ψ_j — чистая прибыль в периоде под номером j.

В стабильно работающих предприятиях значение элемента денежного потока слабо изменяется во времени и его принимают равным постоянному значению, т.е. $\psi_j = \psi = \text{const}$. Тогда стоимость капитала будет равна

$$A = \psi \cdot a_{n;q},$$

где $a_{n;q} = \dfrac{1-(1+q)^{-n}}{q}$ — коэффициент приведения ренты.

Если срок исследуемого бизнеса очень велик, т.е. $n \to \infty$, то формула для его стоимости принимает вид

$$A = \frac{\psi}{q}.$$

Способ расчета стоимости бизнеса по этой формуле называется методом капитализации *доходов*. Входящие сюда величины имеют следующие названия:

ψ — чистая периодическая прибыль;

q — коэффициент (ставка) капитализации.

Если планируемый долговременный чистый доход является стабильным, то рассматриваемый способ называется методом прямой капитализации. Примером может являться постоянная арендная плата, планируемая на многие годы вперед. При определении коэффициента капитализации в данном случае необходимо, прежде всего, ориентироваться на его рыночную величину. Этот выбор основывается на анализе большого количества сделок.

Преимуществами метода прямой капитализации являются простота и то, что он основан на рыночной конъюнктуре. К числу недостатков относятся невозможность применения метода к объектам, не имеющим стабильных доходов, и трудности в получении данных по чистым доходам, так как эту информацию часто относят к разряду коммерческих тайн.

При определении ставки капитализации используется ряд методов.

▶ ***Метод рыночной экстракции (извлечения) для идентичных объектов*** основан на вычислении арифметической средней ставки дисконтирования для аналогичных объектов. В этом случае коэффициент капитализации рассчитывается по формуле

$$q = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} q_t ,$$

где n — общее число исследуемых объектов; $q_t = \frac{\psi_t}{A_t}$ — коэффициент капитализации объекта под номером t; ψ_t — чистая прибыль за период объекта под номером t; A_t — рыночная стоимость объекта под номером t.

Корректировка стоимости арендуемого помещения, рассчитанной по формуле метода капитализации доходов, производится ее умножением на коэффициент чистого операционного дохода $K_{\text{чод}}$, определяемого по формуле [16]

$$K_{\text{чод}} = \left(1 - K_{\text{пл}}\right)\cdot\left(1 - K_{\text{нп}}\right)\cdot\left(1 - K_{\text{ор}}\right),$$

где $K_{\text{пл}}$ — доля площади, не приносящей дохода; $K_{\text{нп}}$ — доля недоиспользования и потерь арендных платежей; $K_{\text{ор}}$ — доля операционных расходов на содержание площади.

Доля площади, не приносящей дохода, для торговых помещений и офисов $K_{\text{пл}} = 0$, так как аренда за единицу площади умножается на общую площадь помещения. Для производственно-складских помещений принимают обычно $K_{\text{пл}} = 0{,}15$.

Доля недоиспользования и потерь арендных платежей существенно зависит от частоты смены арендаторов. При частоте 1 арендатор/год и при отсутствии платежей в течение месяца этот коэффициент составит $K_{\text{нп}} = 0{,}08$.

Доля операционных расходов на содержание площади по опыту составляет $K_{\text{ор}} = 0{,}07$.

Таким образом, коэффициент чистого операционного дохода:

- $K_{\text{чод}} = 0{,}85$ — для торговых помещений и офисов;
- $K_{\text{чод}} = 0{,}73$ — для производственно-складских помещений.

▶ ***Метод рыночной экстракции* (*извлечения*) *для разнородных объектов*** основан на вычислении взвешенной арифметической средней ставки дисконтирования для исследуемых объектов. В этом случае коэффициент капитализации рассчитывается по формуле

$$q = \sum_{t=1}^{n} x_t \cdot q_t \ ,$$

где x_t — весовой коэффициент объекта-аналога, подчиняющийся соотношению $\sum\limits_{t=1}^{n} x_t = 1$.

14.3. Оценка интеллектуальной собственности

14.3.1. МЕТОД ПРЕИМУЩЕСТВА В ПРИБЫЛЯХ

Во многом интеллектуальная собственность относится к нематериальным активам предприятия. При оценке стоимости интеллектуальной собственности оценивается либо непосредственно стоимость предмета собственности, либо влияние нематериальных активов на стоимость предприятия в целом.

Метод преимущества в прибылях относится к доходному подходу. При помощи этого метода оценивается стоимость объекта интеллектуальной собственности, например новой технологии, патента на устройство, лицензии и т.д. В этом случае известны данные для расчета чистой прибыли, которую будут получать при использовании объекта интеллектуальной собственности, а также данные для расчета чистой прибыли, которую будут получать при использовании, например, заменяемого оборудования. Преимущество в прибылях — это разность в исследуемом году между чистой прибылью, полученной при использовании объекта интеллектуальной собственности, и чистой прибылью без использования объекта интеллектуальной собственности. Это преимущество определяется соотношением

$$П_t = П_{2,t} - П_{1,t},$$

где $П_t$ — преимущество в чистой прибыли, получаемое от продажи товара в году под номером t; $П_{2,t}$ — чистая прибыль, полученная при использовании объекта интеллектуальной собственности в году под номером t; $П_{1,t}$ — чистая прибыль, полученная без использования объекта интеллектуальной собственности в году под номером t, $t = 1, 2, ...; T$, t — длительность операции в годах.

Чистая прибыль в году под номером t, получаемая до ввода объекта интеллектуальной собственности, вычисляется по формуле

$$П_{1,t} = C_{1,t} \cdot V_{1,t} \cdot k_t,$$

где $C_{1,t}$ — цена единицы старого товара в году под номером t; $V_{1,t}$ — объем старого товара, проданного в году под номером t; k_t — норма чистой прибыли, которая показывает, какая часть от выручки осталась в виде чистой прибыли в году под номером t.

Чистая прибыль в году под номером t, получаемая после ввода объекта интеллектуальной собственности, определяется соотношением

$$П_{2,t} = C_{2,t} \cdot V_{2,t} \cdot k_t,$$

где $C_{2,t}$ — цена единицы нового товара в году под номером t; $V_{2,t}$ — объем нового товара, проданного в году под номером t.

Норма чистой прибыли, которая показывает, какая часть от выручки осталась в виде чистой прибыли, зависит в основном от величины выплачиваемых предприятием налогов и от отрасли. Эта величина лежит в диапазоне 0,1—0,2.

Стоимость объекта интеллектуальной собственности оценивается по формуле

$$S = \sum_{t=1}^{T} \frac{П_t}{(1+q)^t},$$

где S — стоимость объекта интеллектуальной собственности; T — длительность операции в годах (количество лет жизни товара); q — ставка дисконтирования.

В том случае если потребуются расходы на обеспечение объекта интеллектуальной собственности, то для получения стоимости этого объекта из полученной величины S вычитаются все расходы, связанные с обеспечением.

При составлении модели исследуемого метода оценки считают, что чистую прибыль, получаемую до ввода объекта интеллектуальной собственности, и чистую прибыль, получаемую после ввода объекта интеллектуальной собственности, получают во время одного и того же периода времени. Этот период времени обозначен нами знаком T.

Ставка дисконтирования в рассматриваемом случае играет особую роль. Для предприятия, которое использует интеллектуальный объект в целях получения прибыли, эта величина называется доходностью операции по использованию этого объекта. Именно эта величина является предметом торга между продавцом и покупателем объекта собственности. Из формулы для стоимости объекта интеллектуальной собственности видно, что, при прочих равных условиях, эта стоимость будет тем больше, чем меньше значение ставки дисконтирования.

В общем случае ставка дисконтирования определяется по формуле

$$q \approx \vartheta + \bar{H},$$

где ϑ — часть ставки дисконтирования без учета инфляции; $\bar{H} = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T}\left(1+H_t\right)}$ — средний годовой темп прироста инфляции за T лет; H_t — темп прироста инфляции в году под номером t.

Значение ставки дисконтирования q является номинальной доходностью предприятия за счет использования объекта интеллектуальной собственности. Сюда входят потери от инфляции. Чистой доходностью предприятия является часть ставки дисконтирования без учета инфляции, которая обозначена знаком ϑ.

Часть ставки дисконтирования без учета инфляции ϑ вычисляется по формуле

$$\vartheta = \vartheta_б + \vartheta_p,$$

где $\vartheta_б$ — безрисковая часть ставки дисконтирования, которая определяется исходя из межбанковской процентной ставки без учета инфляции или из доходности по безрисковому активу без учета инфляции; ϑ_p — премия за риск, или рисковая часть ставки дисконтирования без учета инфляции.

Для интеллектуальной собственности, риск потерь которых обычно высок, премия за риск значительна. Например, для венчурных инвестиций премия за риск достигает 25—30% годовых.

■ **Пример 14.1.** Оценить стоимость лицензии на изобретение. Ожидаемый объем продаж товаров, изготовленных на изобретенном оборудовании, равен 15 000 единиц в год. Количество единиц этого же товара, изготовленного на сравниваемом оборудовании, составляет 10 000 единиц в год. Цена единицы товара в первом году равна 8000 руб. Постоянное годовое приращение цены единицы товара равно 8,5% цены первого года. Норма чистой прибыли принимается равной 0,1. Предполагаемый срок продаж — 5 лет. Межбанковская процентная ставка равна 10% годовых, ожидаемый среднегодовой темп прироста инфляции за всю длительность операции составит 8,5%, премия за риск − 16% годовых.

Решение. Ставка дисконтирования определяется по формуле

$$q \approx \vartheta_{б} + \vartheta_{р} + \bar{И} = (10 - 8,5) + 16 + 8,5 = 26\% \text{ годовых.}$$

Постоянное годовое приращение цены единицы товара равно

$$\Delta C = 8000 \cdot 0,085 = 680 \text{ руб.}$$

Таким образом, исследуемые потоки платежей являются годовыми рентами с изменениями платежей по закону арифметической прогрессии. Годовая чистая прибыль, получаемая до ввода объекта интеллектуальной собственности, вычисляется по формуле

$$П_{1,t} = C_{1,t} \cdot V_{1,t} \cdot k_{1,t} = \big(8000 + (t-1) \cdot 680\big) \cdot 10\,000 \cdot 0,1 =$$
$$= 8\,000\,000 + (t-1) \cdot 680\,000 \text{ руб.}$$

Годовая чистая прибыль, получаемая после ввода объекта интеллектуальной собственности, определяется соотношением

$$П_{2,t} = C_{2,t} \cdot V_{2,t} \cdot k_{2,t} = \big(8000 + (t-1) \cdot 680\big) \cdot 15\,000 \cdot 0,1 =$$
$$= 12\,000\,000 + (t-1) \cdot 1\,020\,000 \text{ руб.}$$

Годовое преимущество в прибылях равно

$$П_t = 12\,000\,000 + (t-1) \cdot 1\,020\,000 - 8\,000\,000 + (t-1) \cdot 680\,000 =$$
$$= 4\,000\,000 + (t-1) \cdot 340\,000 \text{ руб.}$$

Стоимость лицензии равна современной стоимости арифметической ренты, формула для которой имеет вид

$$S = \left(П_1 + \frac{a}{q}\right) a_{T;q} - \frac{Ta}{q(1+q)^T},$$

где $a = 340\,000$ — постоянное приращение годового преимущества в прибылях; $П_1$ — годовое преимущество в прибылях в первом году; q — ставка дисконтирования; T — срок ренты в годах; $a_{T;q} = \dfrac{1-(1+q)^{-T}}{q}$ — коэффициент приведения постоянной ренты.

$$a_{5;26} = \frac{1-(1+0,26)^{-5}}{0,26} = 2,635070795.$$

Подставив в формулу для стоимости изобретения полученные данные, найдем

$$S = \left(4\,000\,000 + \frac{340\,000}{0,26}\right) \cdot 2,635070795 - \frac{5 \cdot 340\,000}{0,26(1+0,26)^5} =$$

$$= 11927303,8 \text{ руб.} \quad \square$$

14.3.2. МЕТОД ОСВОБОЖДЕНИЯ ОТ РОЯЛТИ

Метод освобождения от роялти относится к доходному подходу и используется для оценки цены нематериальных активов, будущие доходы от которых известны. Роялти — это плата владельцу интеллектуальной собственности, например, за патент, за исключительную или неисключительную лицензию на производство, продажу и получение прибыли от охраняемого законом объекта собственности. При проведении расчетов инфляционные процессы могут быть учтены или не учтены. В последнем случае определяемые прибыли и ставки дисконтирования не учитывают темпов прироста инфляции. Обычно используется следующая последовательность расчетов.

1. Определяется срок службы объекта интеллектуальной собственности.

2. Прогнозируются будущие годовые объемы продаж.

3. Определяют коэффициент, по которому рассчитывают годовые выплаты роялти.

4. Находят годовые выплаты роялти как произведение этого коэффициента на годовой объем продаж.

5. Определяют годовую ставку дисконтирования.

6. Определяется сумма современных стоимостей всех годовых роялти.

7. Из этой стоимости вычитаются все расходы, связанные с обеспечением объекта интеллектуальной собственности.

8. Полученная сумма является ценой объекта интеллектуальной собственности.

■ **Пример 14.2.** Оценить цену лицензии на патент. Ожидаемый объем продаж товаров, произведенных по этому патенту, изменяется по закону арифметической прогрессии в течение 5 лет. Объем продаж в конце первого года составит 20 млн руб. Постоянное годовое приращение объема продаж отрицательно и равно −400 тыс. руб. Роялти составляет 5% каждого годового объема продаж. Расходы, связанные с обеспечением лицензии, составляют 4% современной стоимости всех годовых роялти. Ставку дисконтирования принять равной 20% годовых.

Решение. Из условий задачи следует, что исследуемый поток платежей является годовой рентой с изменениями платежей по закону арифметической прогрессии. Формула для современной стоимости такой ренты имеет вид

$$A = \left(R + \frac{a}{q} \right) a_{T;q} - \frac{Ta}{q(1+q)^n},$$

где a — постоянное годовое приращение роялти; R — роялти в конце первого года; q — ставка дисконтирования; T — срок ренты в годах,

$a_{T;q} = \dfrac{1-(1+q)^{-T}}{q}$ — коэффициент приведения постоянной ренты.

Для рассматриваемого примера роялти в конце первого года будет равно $R = 20 \cdot 0,05 = 1$ млн руб., а постоянное годовое приращение роялти $a = -400 \cdot 0,05 = -20$ тыс. руб. Остальные характеристики ренты $T = 5$ лет, $q = 0,2$.

Предварительно найдем коэффициент приведения постоянной ренты:

$$a_{T;q} = \frac{1-(1+q)^{-T}}{q} = \frac{1-1,2^{-5}}{0,2} = 2,99061214.$$

Современная стоимость ренты

$$A = \left(1\,000\,000 + \frac{-20\,000}{0,2} \right) \cdot 2,99061214 - \frac{5 \cdot (-20\,000)}{0,2(1+0,12)^5} = 2\,892\,489,71 \text{ руб.}$$

Расходы, связанные с обеспечением лицензии

$$P = 0,04 \cdot A = 0,04 \cdot 2\,892\,489,71 = 115\,699,59 \text{ руб.}$$

Стоимость лицензии

$$S = A - P = 2\,892\,489,71 - 115\,699,59 = 2\,776\,790,12 \text{ руб.} \ \square$$

14.3.3. МЕТОД ИЗБЫТОЧНОЙ ПРИБЫЛИ

Методом избыточной прибыли обычно оценивают гудвилл. Гудвилл — это разность между рыночной стоимостью предприятия и суммой ее чистых активов. Этот метод относится к доходному подходу и используется тогда, когда избыточную прибыль приносят не отраженные в балансе нематериальные активы, например репутация предприятия, торговая марка, управленческий опыт, секреты производства, научные достижения, наименование места создания товара.

К основным этапам метода избыточной прибыли относят:

1) определение рыночной стоимости всех активов;

2) определение чистой годовой прибыли оцениваемого предприятия;

3) определение среднеотраслевой годовой доходности на активы или на собственный капитал;

4) определение годовой среднеотраслевой ожидаемой прибыли оцениваемого предприятия на его активы или на собственный капитал путем умножения рыночной стоимости активов или собственного капитала на среднеотраслевую доходность;

5) определение избыточной годовой прибыли оцениваемого предприятия путем вычитания среднеотраслевой ожидаемой прибыли из чистой годовой прибыли;

6) определение стоимости гудвилла. Для этих целей находят современную стоимость всех избыточных годовых прибылей. Если при этом полагают срок службы не отраженных в балансе нематериальных активов большим, то получают вечную ренту. Современная стоимость таких рент находится путем деления избыточной годовой прибыли на ставку дисконтирования;

7) определение стоимости всех активов с учетом стоимости гудвилла путем сложения рыночной стоимости всех активов и стоимости гудвилла.

■ **Пример 14.3.** Рыночная стоимость всех активов предприятия равна 3 млрд руб. Реальная чистая годовая прибыль, получаемая предприятием в исследуемом году, равна 0,69 млрд руб. Предполагается, что эту же прибыль за вычетом инфляции предприятие будет получать и в последующие годы. Средняя доходность на активы по отрасли без учета инфляции равна 10% годовых. Ставку дисконтирования принимаем 12% годовых. Определить стоимость всех активов с учетом стоимости гудвилла. Инфляционные процессы в этом примере не учтены.

Решение. Рыночная стоимость всех активов, чистая годовая прибыль оцениваемого предприятия, годовая среднеотраслевая доходность на активы заданы в условии. Они равны соответственно:

- рыночная стоимость всех активов — 3 млрд руб.;
- реальная чистая годовая прибыль оцениваемого предприятия — 0,69 млрд руб.;
- годовая среднеотраслевая доходность на активы — 10%.

Среднеотраслевая ожидаемая прибыль оцениваемого предприятия равна $3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$ млрд руб.

Избыточная годовая прибыль оцениваемого предприятия равна $0{,}69 - 0{,}3 = 0{,}39$ млрд руб.

Стоимость гудвилла $\frac{0{,}39}{0{,}12} = 3{,}25$ млрд руб.

Стоимость всех активов с учетом стоимости гудвилла

$$3 + 3{,}25 = 6{,}25 \text{ млн руб.} \ \square$$

14.3.4. МЕТОД СТОИМОСТИ СОЗДАНИЯ

Метод стоимости создания применяется в случаях, когда другие методы неприемлемы. Метод учитывает все затраты, связанные с созданием, приобретением и введением актива в действие.

При этом используют следующую последовательность при проведении расчетов.

1. Определяют полную стоимость замещения или восстановления нематериального актива. Для этих целей учитывают затраты на разработку, на создание конструкторской, технологической и проектной документации, на создание экспериментальных образцов, на оплату патентных пошлин. Все затраты приводят к моменту оценки актива. Считаем, что срок действия нематериального актива равен T лет. С начала работы над нематериальным активом до момента оценки прошло T_1 лет, т.е. T_1 — это момент оценки. Если принять, что проект генерирует платежи постнумерандо, то полная стоимость будет равна

$$S = \sum_{i=1}^{T_1}\left(S_{i,\text{разр}} + S_{i,\text{охр}}\right)\left(1+q\right)^{T_1-i} + \sum_{j=1}^{T-T_1}\frac{S_{j,\text{разр}} + S_{j,\text{охр}}}{\left(1+q\right)^{j}},$$

где S — сумма всех затрат связанных с созданием и охраной нематериального актива; $S_{i,\,\text{разр}}$ и $S_{j,\,\text{разр}}$ — стоимость разработки нематериального актива в году под номером i или j; $S_{i,\,\text{охр}}$ и $S_{j,\,\text{охр}}$ — затраты на правовую охрану объекта в году под номером i или j; q ставка сравнения, с помощью которой затраты приводятся к единому моменту времени. Заметим, что в отдельные годы стоимость разработки нематериального актива равна нулю.

2. Определяют коэффициент морального старения k_{MC} нематериального актива по формуле

$$k_{MC} = 1 - \frac{t}{\tau},$$

где t — срок действия охранного документа на расчетный год;, τ — номинальный срок действия охранного документа.

3. Определяют остаточную стоимость нематериального актива по формуле

$$A = S \cdot k_{MC} \cdot k_{ТЭЗ},$$

где S — полная стоимость; $k_{ТЭЗ}$ — коэффициент технико-экономической значимости, определяющейся для изобретений и полезных моделей.

По рекомендациям Инженерной академия РФ коэффициент технико-экономической значимости может принимать следующие значения:

1,0 — изобретения, относящиеся к одной простой детали, изменению одного параметра простого процесса, одной операции процесса, одного ингредиента рецептуры;

1,5 — изобретения, относящиеся к конструкции сложной детали неосновного узла, изменению нескольких параметров несложных операций, изменению нескольких неосновных ингредиентов в рецептуре;

2,0 — изобретения, относящиеся к одному основному или нескольким неосновным узлам, части неосновных процессов, части неосновной рецептуры;

2,5 — изобретения, относящиеся к конструкциям машин, приборов, станков, аппаратов, технологическим процессам, рецептурам;

3,0 — изобретения, относящиеся к конструкциям со сложной системой контроля, сложным комплексным технологическим процессам, рецептуре;

4,0 — изобретения, относящиеся к конструкциям, технологическим процессам, рецептуре особой сложности и главным образом к новым разделам науки и техники;

5,0 — изобретения, не имеющие прототипа, — пионерские изобретения.

Упражнения

ЗАДАЧИ

14.1. Оценить актив, купленный 6,5 лет назад за 75 ден. ед. За счет инфляции цена актива за это время увеличилась в 7,3 раза. Актив рассчитан на 18 лет эксплуатации.

14.2. Рыночная стоимость одной акции предприятия-аналога составляет 450 руб., а общее количество акций равно 100 000. На момент проведения анализа балансовая прибыль этого предприятия составляет 18 млн руб., чистая прибыль — 10 млн руб., элемент денежного потока — 20 млн руб. Для оцениваемого предприятия эти прогнозируемые величины к желаемому моменту перепродажи составят: балансовая прибыль — 24 млн руб.; чистая прибыль — 12 млн руб.; элемент денежного потока — 22 млн руб. Определить коэффициенты-аналоги и стоимость оцениваемого предприятия к ожидаемому моменту перепродажи.

14.3. Прибыль предприятия на момент оценки составила 70 млн руб. Собственный капитал предприятия равен 200 млн руб. Ожидается рост размера прибыли, равный 5% в год. Определить стоимость предприятия для ставки дисконтирования 15% годовых.

Глава 15 ФИНАНСОВЫЙ АНАЛИЗ ПРЕДПРИЯТИЯ

15.1. Принципы проведения анализа

Финансовый анализ предприятия включает следующие э т а п ы:

- сбор и подготовку исходных данных;
- аналитическую обработку;
- интерпретацию результатов;
- выводы и рекомендации.

Основной исходной информацией при проведении финансового анализа предприятия служат финансовые отчеты предприятия, к которым в первую очередь относятся баланс и отчет о прибылях и убытках. Поскольку современные принципы бухгалтерского учета постоянно изменяются, то представляется целесообразным преобразовать эти финансовые отчеты в аналитические таблицы в соответствии с международными стандартами бухгалтерского учета. Такое преобразование проводится автоматически в различных компьютерных системах.

Без учета инфляции финансовые показатели предприятия могут существенно отличаться от истинных показателей. Поэтому при анализе необходим учет темпа прироста инфляции как за прошлые периоды, так и за будущие, полученные при помощи прогнозирования.

15.2. Финансовые коэффициенты

Финансовые коэффициенты основаны на определенных зависимостях между отдельными показателями отчетности. Сравнение полученных величин с показателями благоприятных лет исследуемого предприятия или со среднеотраслевыми показателями позволяет сделать выводы о состоянии предприятия и предложить рекомендации.

15.2.1. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИКВИДНОСТИ

Коэффициенты ликвидности показывают, насколько доступны компании ее денежные средства, и в конечном счете способность предприятия расплатиться по краткосрочным обязательствам оборотными активами.

Коэффициент текущей ликвидности определяет долю оборотных активов предприятия по отношению к краткосрочным пассивам (этот коэффициент должен быть более двух; коэффициент используется при анализе возможного банкротства предприятия):

$$\text{Коэффициент текущей ликвидности} = \frac{\text{Оборотные активы}}{\text{Краткосрочные обязательства}}.$$

Коэффициент абсолютной ликвидности показывает долю краткосрочных обязательств, которая может быть покрыта денежными средствами и краткосрочными инвестициями в виде ценных бумаг и депозитов (рекомендуемые значения 0,1—0,3):

$$\begin{matrix}\text{Коэффициент}\\ \text{абсолютной}\\ \text{ликвидности}\end{matrix} = \frac{\text{Денежные средства} + \text{Краткосрочные инвестиции}}{\text{Краткосрочные обязательства}}.$$

Коэффициент срочной ликвидности показывает долю наиболее ликвидной части оборотных активов (денежных средств, дебиторской задолженности, краткосрочных инвестиций) к краткосрочным пассивам:

$$\begin{matrix}\text{Коэффициент}\\ \text{срочной}\\ \text{ликвидности}\end{matrix} = \frac{\text{Оборотные активы} - \text{Стоимость запасов}}{\text{Краткосрочные обязательства}}.$$

Значение этого коэффициента должно быть больше единицы.

Чистый оборотный капитал — это разность между оборотными активами и краткосрочными пассивами:

$$\text{Чистый оборотный капитал} =$$
$$= \text{Оборотные активы} - \text{Краткосрочные обязательства}.$$

Чистый оборотный капитал необходим для поддержания финансовой устойчивости предприятия. Его значение должно быть положительной величиной. Слишком большое значение чистого оборотного капитала говорит о его нерациональной структуре.

15.2.2. КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЕЛОВОЙ АКТИВНОСТИ

Эффективность использования капитала предприятием характеризуется коэффициентами деловой активности.

Коэффициент оборачиваемости оборотного капитала определяет эффективность использования инвестиций в оборотный капитал, вычисляется как отношение объема реализованной за год продукции к среднему значению оборотного капитала за год (при увеличении этого коэффициента увеличивается эффективность использования предприятием оборотного капитала):

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент оборачиваемости} \\ \textit{оборотного капитала}\end{matrix} = \frac{\textit{Суммарная выручка за год}}{\begin{matrix}\textit{Среднее значение оборотного} \\ \textit{капитала за год}\end{matrix}}.$$

***Коэффициент оборачиваемости основных средств* (*фондоотдача*)** — это эффективность использования предприятием имеющихся основных средств, вычисляется как отношение объема реализованной за год продукции к средней стоимости основных фондов:

$$\textit{Фондоотдача} = \frac{\textit{Суммарная выручка за год}}{\textit{Среднее значение основного капитала за год}}.$$

Значения этого коэффициента отличаются друг от друга в разных отраслях. Низкий уровень коэффициента оборачиваемости основных средств свидетельствует о недостаточном объеме продаж или о слишком высоком уровне капитальных вложений.

Фондоемкость — это отношение средней стоимости основных фондов к объему реализованной за год продукции. Фондоемкость является величиной, обратно пропорциональной фондоотдаче:

$$\textit{Фондоемкость} = \frac{1}{\textit{Фондоотдача}}.$$

Коэффициент оборачиваемости активов выражает эффективность использования предприятием всех имеющихся в его распоряжении активов, этот коэффициент означает количество полных циклов производства и обращения в течение года:

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент} \\ \textit{оборачиваемости активов}\end{matrix} = \frac{\textit{Суммарная выручка за год}}{\textit{Среднее значение всех активов за год}}.$$

Коэффициент оборачиваемости оборотных активов выражает эффективность использования предприятием всех имеющихся в его распоряжении оборотных активов:

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент} \\ \textit{оборачиваемости} \\ \textit{оборотных активов}\end{matrix} = \frac{\textit{Суммарная выручка за год}}{\begin{matrix}\textit{Среднее значение} \\ \textit{всех оборотных активов за год}\end{matrix}}.$$

15.2.3. КОЭФФИЦИЕНТЫ УСТОЙЧИВОСТИ

За способность предприятия отвечать по долгосрочным обязательствам без ликвидации долгосрочных активов отвечают коэффициенты финансовой устойчивости, или показатели структуры капитала. Предприятия с хорошими коэффициентами устойчивости защищены от банкротства.

Коэффициент «Отношение суммарных обязательств к суммарным активам» демонстрирует долю суммарных краткосрочных и долгосрочных активов, за счет которых финансируются суммарные краткосрочные и долгосрочные заемные обязательства (рекомендуемые значения — 0,2—0,5):

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент} \\ \textit{«Отношение суммарных} \\ \textit{обязательств} \\ \textit{к суммарным активам»}\end{matrix} = \frac{\begin{matrix}\textit{Среднее значение} \\ \textit{всех обязательств за год}\end{matrix}}{\textit{Среднее значение всех активов за год}}.$$

Коэффициент «Отношение суммарных обязательств к собственному капиталу» — это доля суммарных краткосрочных и долгосрочных активов в собственном капитале предприятия (рекомендуемый диапазон — 0,25—1):

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент} \\ \textit{«Отношение суммарных} \\ \textit{обязательств} \\ \textit{к собственному капиталу»}\end{matrix} = \frac{\begin{matrix}\textit{Среднее значение} \\ \textit{всех обязательств за год}\end{matrix}}{\begin{matrix}\textit{Среднее значение} \\ \textit{собственного капитала за год}\end{matrix}}.$$

Коэффициент обеспеченности собственными средствами — это отношение собственных оборотных средств к величине материальных запасов (рекомендуемые значения — 0,6—0,8):

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент обеспеченности} \\ \textit{собственными средствами}\end{matrix} = \frac{\textit{Собственные оборотные средства}}{\textit{Материальные запасы}}.$$

Этот коэффициент используется при анализе возможного банкротства предприятия.

Коэффициент обеспеченности собственными средствами — это отношение собственных оборотных средств к оборотным активам:

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент обеспеченности} \\ \textit{собственными средствами}\end{matrix} = \frac{\textit{Собственные оборотные средства}}{\textit{Оборотные активы}}.$$

Коэффициент защищенности кредиторов (покрытия процентов) — это степень защищенности кредиторов от невыплаты процентов, или количество периодов, в течение которых предприятие заработало средства для выплаты процентов за предоставленные кредиты (значение этого коэффициента должно быть больше единицы):

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент} \\ \textit{защищенности} \\ \textit{кредиторов}\end{matrix} = \frac{\textit{Суммарная операционная прибыль за период}}{\textit{Суммарные проценты по кредитам за период}}.$$

15.2.4. КОЭФФИЦИЕНТЫ РЕНТАБЕЛЬНОСТИ

Прибыльность деятельности предприятия определяют коэффициенты рентабельности.

Коэффициент рентабельности активов — это доля чистой прибыли в сумме всех активов:

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент}\\ \textit{рентабельности}\\ \textit{активов}\end{matrix} = \frac{\textit{Чистая прибыль за год}}{\textit{Среднее значение всех активов за год}}.$$

Чем выше значение этого коэффициента, тем более эффективно используются активы. Коэффициент рентабельности активов является одним из наиболее важных показателей конкурентоспособности.

Коэффициент рентабельности оборотных активов — это доля чистой прибыли в оборотных активах, чем выше значение этого коэффициента, тем более эффективно используются оборотные активы:

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент}\\ \textit{рентабельности}\\ \textit{оборотных активов}\end{matrix} = \frac{\textit{Чистая прибыль за год}}{\textit{Среднее значение оборотных активов за год}}.$$

Коэффициент рентабельности внеоборотных активов показывает долю чистой прибыли во внеоборотных активах, чем выше значение этого коэффициента, тем более эффективно используются внеоборотные активы:

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент}\\ \textit{рентабельности}\\ \textit{внеоборотных активов}\end{matrix} = \frac{\textit{Чистая прибыль за год}}{\begin{matrix}\textit{Среднее значение внеоборотных}\\ \textit{активов за год}\end{matrix}}.$$

Коэффициент рентабельности валовой прибыли определяет долю валовой прибыли в суммарной выручке:

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент}\\ \textit{рентабельности}\\ \textit{валовой прибыли}\end{matrix} = \frac{\textit{Суммарная валовая прибыль за период}}{\textit{Суммарная выручка активов за период}}.$$

Коэффициент рентабельности чистой прибыли выражает долю чистой прибыли в суммарной выручке:

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент}\\ \textit{рентабельности}\\ \textit{чистой прибыли}\end{matrix} = \frac{\textit{Суммарная чистая прибыль за период}}{\textit{Суммарная выручка активов за период}}.$$

Коэффициент рентабельности собственного капитала определяет долю чистой прибыли в акционерном капитале:

$$\begin{matrix}\textit{Коэффициент}\\ \textit{рентабельности}\\ \textit{собственного капитала}\end{matrix} = \frac{\textit{Суммарная чистая прибыль за год}}{\begin{matrix}\textit{Среднее значение акционерного}\\ \textit{капитала за год}\end{matrix}}.$$

Чем выше значение этого коэффициента, тем более эффективно используется акционерный капитал. Этот показатель сравнивают с альтернативными вложениями капитала.

15.2.5. ИМУЩЕСТВЕННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Имущественные коэффициенты показывают состав и динамику имущества предприятия.

Коэффициент оборотных средств в совокупном имуществе предприятия показывает долю стоимости оборотных средств в сумме стоимостей основных оборотных активов:

$$\textit{Коэффициент оборотных средств в совокупном имуществе предприятия} = \frac{\textit{Стоимость оборотных активов}}{\textit{Стоимость основных средств} + \textit{Стоимость оборотных активов}}.$$

Коэффициент запаса в оборотных активах показывает долю в этих активах наименее ликвидной ее части:

$$\textit{Коэффициент запасов в оборотных активах} = \frac{\textit{Стоимость запасов}}{\textit{Стоимость оборотных активов}}.$$

Коэффициент износа основных средств определяется отношением износа этих средств к их балансовой стоимости:

$$\textit{Коэффициент износа основных средств} = \frac{\textit{Износ основных средств}}{\textit{Балансовая стоимость основных средств}}.$$

Коэффициент обновления основных средств — это отношение балансовой стоимости поступивших основных средств за период к балансовой стоимости основных средств на конец этого периода:

$$\textit{Коэффициент обновления основных средств} = \frac{\textit{Балансовая стоимость поступивших основных средств за период}}{\textit{Балансовая стоимость основных средств на конец периода}}.$$

Коэффициент выбытия основных средств определяется как отношение балансовой стоимости выбывших основных средств к балансовой стоимости основных средств:

$$\textit{Коэффициент выбытия основных средств} = \frac{\textit{Балансовая стоимость выбывших основных средств}}{\textit{Балансовая стоимость основных средств}}.$$

15.2.6. ИНВЕСТИЦИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Инвестиционные коэффициенты показывают стоимость и доходность акций предприятия.

Прибыль на акцию — это доля чистой прибыли за год, приходящаяся на одну обыкновенную акцию:

$$\text{Прибыль на акцию} = \frac{\begin{array}{c}\text{Чистая прибыль} -\\ -\text{Дивиденды по привилегированным акциям}\end{array}}{\text{Количество обыкновенных акций}}.$$

Дивиденды на акцию выражают годовую долю выплат, приходящихся на одну обыкновенную акцию:

$$\text{Дивиденды на акцию} = \frac{\text{Дивиденды на обыкновенные акции}}{\text{Количество обыкновенных акций}}.$$

Коэффициент покрытия дивидендов — это доля дивидендов по обыкновенным акциям за год в чистой прибыли предприятия без дивидендов по привилегированным акциям:

$$\begin{array}{c}\text{Коэффициент}\\ \text{покрытия дивидендов}\end{array} = \frac{\text{Дивиденды на обыкновенные акции}}{\begin{array}{c}\text{Чистая прибыль} -\\ -\text{Дивиденды по привилегированным акциям}\end{array}}.$$

Сумма активов на акцию определяет долю активов предприятия за год, приходящихся на одну обыкновенную акцию:

$$\text{Сумма активов на акцию} = \frac{\text{Среднее значение всех активов за год}}{\text{Количество обыкновенных акций}}.$$

15.3. Определение возможного банкротства предприятия

Результаты финансового анализа предприятия позволяют сделать выводы о его возможном банкротстве. Признание предприятия банкротом определяется законами и правительственными документами.

В России основанием для признания предприятия банкротом является невыполнение своих обязательств по оплате товаров, работ и услуг по истечении трех месяцев со дня наступления срока оплаты. По истечении этого срока поставщики, исполнители работ и услуг, кредиторы могут предъявить через суд иски неплательщикам.

Неудовлетворительное финансовое состояние предприятия определяется по методике, утвержденной Постановлением Правительства РФ от 20 мая 1994 г. № 498. Для определения неудовлетворительной структуры баланса используются два показателя.

Первым показателем является ***коэффициент текущей ликвидности***, вычисляемый как отношение оборотных активов предприятия к краткосрочным обязательствам. Структура баланса считается неудовлетворительной, если коэффициент текущей ликвидности меньше двух.

Вторым показателем является ***коэффициент обеспеченности собственными средствами***, т.е. отношение собственных оборотных средств к величине материальных запасов. Структура баланса считается неудовлетворительной, если коэффициент обеспеченности собственными средствами меньше 0,1.

Если хотя бы по одному из двух приведенных показателей результаты не совпадают с нормативными требованиями, то структуру баланса считают неудовлетворительной.

Для проверки возможности восстановления платежеспособности определяют ***коэффициент восстановления***, или ***утраты платежеспособности***. При расчете коэффициента восстановления период восстановления принимается равным шести месяцам, а при расчете коэффициента утраты платежеспособности — трем месяцам. При этом используется формула

$$ВУТ = \frac{ТЛ_К - \frac{У}{Т}\left(ТЛ_К - ТЛ_Н\right)}{2},$$

где $ВУТ$ — коэффициент восстановления или утраты платежеспособности; $ТЛ_К, ТЛ_Н$ — коэффициенты текущей ликвидности на конец и начало отчетного периода соответственно; $Т$ — продолжительность отчетного периода; $У$ — период восстановления или утраты платежеспособности ($У = 6$ мес. при расчете коэффициента восстановления платежеспособности, $У = 3$ мес. при расчете коэффициента утраты платежеспособности).

Если коэффициент восстановления платежеспособности $ВУТ \ge 1$, то предприятие имеет возможность восстановить свою платежеспособность за шесть месяцев, если же $ВУТ < 1$, то у предприятия нет реальной возможности восстановления платежеспособности за этот срок и оно подпадает под действие Закона о банкротстве.

При удовлетворительной структуре баланса для оценки устойчивости предприятия рассчитывают коэффициент утраты платежеспособности на срок три месяца. Если при этом $ВУТ < 1$, то в ближайшее время предприятие может утратить платежеспособность.

Реструктуризация — это процесс управления, обеспечивающий эффективность использования ресурсов и приводящий к нормальному функционированию предприятия. Реструктуризация проводится путем эффективного управления внутренними факторами и правильного использования внешних факторов, влияющих на результаты бизнеса.

За рубежом для определения возможного банкротства предприятия часто используют *формулу Е. Альтмана*:

$$Z = 1{,}2 \cdot \frac{\text{ОК}}{\text{ВА}} + 1{,}4 \cdot \frac{\text{НП}}{\text{ВА}} + 3{,}3 \cdot \frac{\text{ДОД}}{\text{ВА}} + 0{,}6 \cdot \frac{\text{РСА}}{\text{ВА}} + \frac{\text{ОП}}{\text{ВА}},$$

где ОК — оборотный капитал; ВА — все активы; НП — нераспределенная прибыль; ДОД — доход от основной деятельности; РСА — рыночная стоимость обычных и привилегированных акций; ОП — объем продаж.

При $Z \le 1{,}8$ вероятность банкротства предприятия *очень высокая*; при $1{,}8 < Z \le 2{,}7$ вероятность банкротства предприятия *высокая*; при $2{,}7 \le Z \le 3$ положение предприятия хорошее; при $3 \le Z$ вероятность банкротства предприятия *очень низкая*.

Упражнения

ТЕСТ 15.1

Какие из приведенных ниже высказываний относятся к коэффициентам ликвидности, а какие к коэффициентам деловой активности?

1. Коэффициент оборачиваемости основных средств.
2. Коэффициент срочной ликвидности.
3. Коэффициент оборачиваемости оборотного капитала.
4. Коэффициент оборачиваемости активов.
5. Чистый оборотный капитал.
6. Коэффициент абсолютной ликвидности.
7. Коэффициент оборачиваемости запасов.
8. Коэффициент оборачиваемости дебиторской задолженности.
9. Коэффициент текущей ликвидности.
10. Коэффициент оборачиваемости кредиторской задолженности.

ТЕСТ 15.2

Какие из приведенных ниже высказываний относятся к коэффициентам устойчивости, а какие к коэффициентам рентабельности?

1. Коэффициент «Отношение суммарных обязательств к суммарным активам».
2. Коэффициент «Отношение долгосрочных обязательств к суммарным активам».
3. Коэффициент рентабельности собственного капитала.
4. Коэффициент защищенности кредиторов.
5. Коэффициент рентабельности операционной прибыли.
6. Коэффициент рентабельности чистой прибыли.
7. Коэффициент рентабельности оборотных активов.
8. Коэффициент рентабельности активов.
9. Коэффициент «Отношение долгосрочных обязательств к необоротным активам».
10. Коэффициент «Отношение суммарных обязательств к собственному капиталу».

Глава 16 ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РЕАЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Технико-экономическое обоснование (бизнес-план) является основным документом инвестиционного проекта, на основе которого принимается окончательное решение о реализации проекта и его финансировании. Управление инвестиционным проектом проводится на основе анализа выполнения плана, представленного в технико-экономическом обосновании.

Основная цель инвестиционного проектирования состоит в том, чтобы показать предпринимателю, как окупятся его расходы, и определить методы преобразования расходов в доходы.

Технико-экономическое обоснование разрабатывается на первой предынвестиционной фазе. В бизнес-плане подробно рассматривается инвестиционная фаза, т.е. фаза создания бизнеса, или инвестиционного объекта, а также эксплуатационная фаза. На эксплуатационной фазе выпускают продукцию или оказывают услуги и получают прибыль.

Технико-экономическое обоснование состоит из ряда разделов.

16.1. Титульный лист и резюме бизнес-плана

На титульном листе представляются наименование бизнеса, название и адрес предприятия, имена и адреса учредителей, ссылка на секретность.

Резюме пишут после разработки всего бизнес-плана. Резюме — это реклама проекта. Оно должно вызвать интерес у потенциального инвестора. В резюме кратко и доходчиво должны быть изложены основные характеристики предлагаемого бизнеса. Правильно составленное резюме — это первый шаг к привлечению инвестора в бизнес.

В резюме представляются основные характеристики сектора вашего рынка, размеры рынка. Указываются ваши продукты и услуги, удовлетворяющие конкретные потребности покупателей. Рассматриваются стратегии маркетинга и сбыта. Особое внимание уделяется конкурентной борьбе. Указываются основные планируемые эффективности и эффекты вашего бизнеса.

16.2. Методы финансирования

При финансировании бизнеса основные источники и формы инвестиций должны быть определены на самых ранних стадиях разработки этого бизнеса, т.е. до начала разработки бизнес-плана. Иначе затраты предпринимателя на разработку бизнес-плана могут оказаться напрасными.

Источниками финансирования являются физические лица, предприятия негосударственных форм собственности, государство и его органы, иностранцы.

Основными формами финансирования являются собственный и заемный капиталы.

Собственный капитал предприятия состоит из уставного капитала, резервного фонда и нераспределенной прибыли.

Методы комплектования собственного капитала предприятия во многом определяются формой собственности. Наиболее характерным типом собственного капитала является акционерный капитал.

Венчурный капитал — это особый вид собственного капитала, используемого для продвижения на рынок научно-технических нововведений, связанных с повышенным риском. Венчурный капитал широко использовался при разработках и продвижении на рынок микроэлектроники, вычислительной техники, систем автоматизации и т.д.

К заемному финансированию относятся краткосрочные и долгосрочные ссуды, товарный кредит, облигации, лизинг, ипотека.

16.3. Цели и стратегии предприятия

Управление стратегией предусматривает выбор миссии, определение стратегии, анализ ее качества, реализацию стратегии. Понятие качества присутствует на всех этапах управления стратегией. На этапе выбора миссии и целей помимо вопросов «Кто мы?», «Чего мы хотим достичь?», «Какие нормы и ценности мы применяем в отношениях друг с другом и с внешним миром?» руководитель предприятия или группа руководителей ставят перед собой также вопросы о качестве стратегии. Их заботит прежде всего эффективность деятельности предприятия в результате реализации выбранной стратегии. На этапе управления стратегией одной из главных задач руководителей является управление ее качеством.

При выборе стратегии руководители интуитивно ориентируются на ее качество, которое получит предприятие в результате реализации этой стратегии. Например, сегодня многим наиболее целесообразной может показаться инновационная стратегия. Хотя более предпочтительными для других руководителей покажутся другие подходы к выбору своего пути. Но интуитивной оценки качества стратегий явно недостаточно для получения полной картины. Поэтому для таких оценок лучше всего пользоваться общеизвестными понятиями эффектов и эффективностей.

Миссия должна быть сформулирована кратко и понятно для всех сотрудников предприятия и для каждого, кто захочет ее прочитать.

Цели — это дальнейшая разработка предвидения, причем конкретная и измеримая. Цели бывают:

- проверяемые;
- качественные и количественные;
- логические и последовательные;
- как дополнение к предвидению будущего, не противоречащие убеждениям.

В качестве целей компании могут быть поставлены, например, высокая эффективность и качество, производство дешевых качественных продуктов или услуг, доля на рынке, доходность, товарооборот и рост прибыли, финансовые показатели и т.д.

Выделяют три типа целей:

- *корпоративные цели*, касающиеся корпорации в целом (рынки, тип изделия или услуги, технологии);
- *бизнес-цели*, т.е. цели однородной группы конкретной деятельности;
- *функциональные цели*, например, цели финансовых, технологических и социальных областей.

Примером может служить цель «IBM-Рочестер», принятая при создании компьютера «Silverlake» в конце прошлого века [3], состоявшая из двух частей.

1. Превратить «IBM-Рочестер» в лидера на рынке машин среднего класса, для чего надо было создать за 2—3 года ЭВМ, являющуюся стандартом индустрии (в то время на создание машин такого класса требовалось около пяти лет).

2. Сделать из «IBM-Рочестер» символ всей корпорации, образовав предприятие, ориентированное на рынок. Это означало, что на первых порах (в процессе разработки) во главу угла ставилась не прибыль, а долговременное удовлетворение потребностей потребителя продукции.

Эта цель была с успехом реализована.

Стратегия — это перспективная модель поведения объекта управления для достижения поставленной им цели.

Рассмотрим наиболее известные стратегии, из которых может быть сформирован портфель стратегий.

16.3.1. СТРАТЕГИИ ПОРТЕРА

В 1985 г. Майкл Портер разработал модель анализа конкуренции внутри отрасли. На рынке действуют пять сил, являющихся движущими силами конкуренции. К факторам отраслевого анализа относятся:

- появление новых конкурентов внутри отрасли;
- появление товаров-заменителей;
- воздействие поставщиков;
- воздействие покупателей;
- уровень конкуренции в отрасли.

Модель стратегий Портера представлена на рис. 16.1 в виде матрицы.

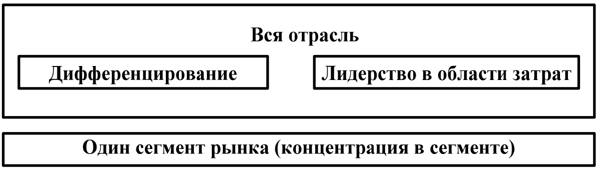


Рис. 16.1. Матрица Портера

Портер утверждал, что рентабельность предприятия будет приемлемой при работе на определенном сегменте или на всем рынке, а «середина» опасна. Матрица Портера позволяет выбрать следующие конкурентные стратегии.

▶ ***Дифференцирование*** — это преимущество товара предприятия перед товаром конкурентов всей отрасли с точки зрения потребителя (престижный автомобиль, телевизор и т.д.). Затраты играют второстепенную роль. Предпосылками этой стратегии являются известность фирмы, особый дизайн, высокое качество.

Преимущества стратегии:

- высокая прибыль за счет самых высоких цен на продукт;
- приверженность потребителя марке;
- стратегия создает высокий барьер для компаний, желающих попасть на рынок отрасли.

Недостатки:

- слишком высокая цена и появление похожих товаров конкурентов (даже худшего качества) могут отпугнуть потребителя;
- у потребителя может измениться взгляд на систему ценностей.

▶ ***Лидерство в области затрат, или стратегия низких издержек*** — это преимущество товара предприятия из-за низкой себестоимости перед товаром конкурентов всей отрасли. Все действия предприятия направлены на снижение затрат. Предпосылками этой стратегии являются большая доля рынка, контроль расходов.

Преимущества стратегии:

- высокая прибыль за счет низких цен, поскольку издержки ниже издержек конкурентов;
- защита от сильных конкурентов;
- компания может выйти на новый рынок с ценами ниже конкурентных;
- стратегия создает высокий барьер для компаний, желающих попасть на рынок отрасли.

Недостатки:

- применение новых технологий конкурентами может привести к снижению цен на товар;
- непредсказуемое повышение затрат на сырье приведет к повышению издержек предприятия.

▶ ***Концентрация в сегменте***, ***или стратегия в «нише»***, — это достижение концентрации на одном сегменте рынка либо на одном продукте. Например, компания концентрируется на отдельных группах потребителей, объединенных возрастом, полом, величиной дохода, географическим положением и т.д. При этом компания применяет либо стратегию дифференцирования, либо стратегию низких издержек. Предпосылкой этой стратегии является более эффективная работа предприятия в сегменте по сравнению с работой конкурентов на всем рынке.

Преимущества стратегии:

- не требует крупных вложений в ресурсы по сравнению со стратегиями, направленными на охват всего рынка;
- позволяет обслуживать выбранный сегмент с учетом более узкой специализации и компетентности;
- позволяет вступить на новый рынок с меньшими затратами.

Недостатки:

- высокая цена по сравнению с ценой на товар лидера в области затрат, работающего на всем рынке;
- возможность сближения потребителей сегмента и всего рынка, влекущая за собой потерю покупателей.

Позднее (1986) Портер расширил свою матрицу стратегий до международных рынков. В новую матрицу были введены дополнительно две стратегические модели: защищенные рынки и учет национальных особенностей.

Защищенные рынки: компания выбирает те национальные рынки, где ее бизнес будет работать в защищенных условиях.

Учет национальных особенностей: компания адаптирует свою деятельность для удовлетворения конкретных нужд локальных рынков.

16.3.2. СТРАТЕГИИ АНСОФФА

Другой тип стратегий предложен Ансоффом. Матрица Ансоффа показана на рис. 16.2.

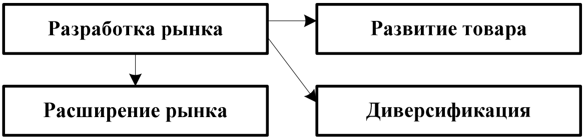


Рис. 16.2. Матрица Ансоффа

Матрица рекомендует следующие стратегии.

1. ***Разработка рынка*** — усиление мероприятий маркетинга для имеющихся товаров на имеющихся рынках. *Пути достижения*: улучшение качества продукта и качества обслуживания; повышение репутации компании; уменьшение себестоимости продукции; увеличение потребления за счет, например, снижения цен; привлечение покупателей конкурирующих товаров за счет рекламы и т.д.

2. ***Расширение рынка*** — выход со старыми товарами на новые рынки. *Пути достижения*: расширение функций товаров; приспособление товаров к требованиям определенных групп потребителей; сбыт на новых региональных, национальных, интернациональных рынках.

3. ***Развитие товара*** — продажа новых товаров на старых рынках. *Пути достижения*: опыт работы компании с покупателями на существующем рынке.

4. Диверсификация — переход к новым сферам деятельности в основном из-за короткого жизненного цикла продукта. *Пути достижения*:

- горизонтальная диверсификация на том же уровне (например, предприятие по выпуску телевизоров начинает выпуск радиоприемников);
- вертикальная диверсификация (например, предприятие по выпуску автомобильных двигателей начинает выпуск автомобилей);
- побочная диверсификация без вещественной взаимосвязи (например, предприятие по выпуску автомобилей начинает выпуск кофемолок).

Величины рисков и расходы в зависимости от реализуемой стратегии Ансоффа приведены в табл. 16.1.

Таблица 16.1

Стратегия	*Вероятность успеха, %*	*Расходы*
Разработка рынка	50	Базис
Расширение рынка	20	Четырехкратные
Развитие товара	33	Восьмикратные
Диверсификация	5	Двенадцатикратные

GAP-АНАЛИЗ

***Gap-анализ* (*анализ щели*)** позволяет выработать стратегию при помощи матрицы Ансоффа. График Gap-анализа представлен на рис. 16.3.

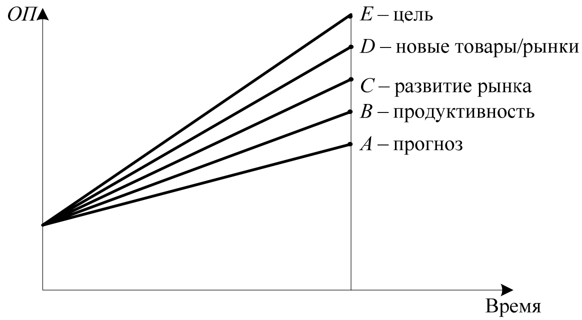


Рис. 16.3. Gap-анализ при помощи матрицы Ансоффа

Щели — это отрезки между точками *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Gap-анализ начинается с прогноза на планируемый период с помощью экспертного или математико-статистического метода прогнозирования. Прогноз представлен точкой *A* на графике Gap-анализа. Чтобы закрыть щель от точки *A* до точки *B*, достаточно увеличить продуктивность операционной деятельности организации без изменения ее стратегии. Для анализа щели от *B* до *E* используется матрица Ансоффа.

Выбор стратегии «разработка рынка» позволяет закрыть щель до точки *C*. Выбор стратегий «расширение рынка» или «развитие товара» позволяет закрыть щель до точки *D*. Выбор стратегии «диверсификация» позволяет закрыть щель до точки *E*.

16.3.3. СТРАТЕГИИ ВИССЕМЫ

Свою модель с шестью стадиями Ханс Виссема связывает с моделью Кондратьева. Известно, что модель Кондратьева имеет четыре цикла, занимающих следующие периоды: 1782—1845 гг., 1845—1892 гг., 1892—1948 гг., 1948—? гг. Виссема рассматривает последний цикл. Связь шести стратегических стадий с четвертым циклом Кондратьева представлена на рис. 16.4.

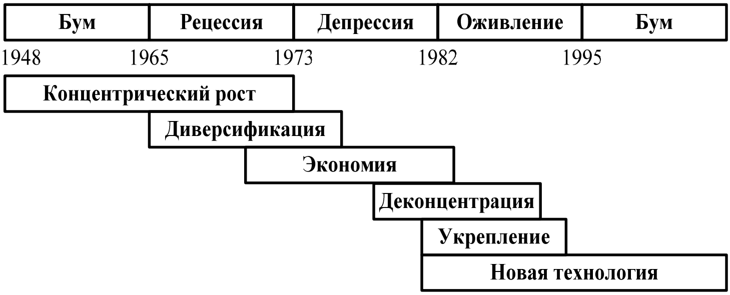


Рис. 16.4. Модель стратегий Ханса Виссемы

Первая строчка рисунка — это *стадии цикла Кондратьева.* По Виссеме, новый, пятый цикл Кондратьева начался в 1995 г. По существующим сегодня концепциям бум пятого цикла Кондратьева закончился и началась стадия рецессии. Нижние шесть строчек — шесть стратегических стадий. Эти *шесть основных стадий* получены на основе анализа стратегий предприятий, которых они придерживались в соответствующие временны́е периоды.

1. *Стратегия роста* (1948—1973) основывается на концентрическом росте, т.е. на повышении качества продукции, понижении издержек и увеличении выпускаемых товаров.

2. *Стратегия диверсификации* (1965—1975) предусматривает новые коммерческие виды деятельности, когда выбираются новые продукты и рынки.

3. *Стратегия экономии* (1969—1985). Эта стратегия использовалась в период депрессии, когда компании вначале перестали принимать новых сотрудников, а затем приступили к сокращению штатов. Доверие к стратегическому менеджменту стало убывать, многие сократили отделы стратегического планирования.

4. *Стратегия деконцентрации* (1981—1990 гг.). Продажа тех видов деятельности, которые не входили в основной бизнес, т.е. концентрация на основных видах деятельности. Идеи стратегического управления впервые были применены в период деконцентрации. Стали широко использоваться внешние ресурсы. Если поставщик может сделать комплектующие лучше, гарантирует качество и сроки поставки, то используются поставляемые комплектующие.

5. *Стратегия выборочного роста, или укрупнения* (1983—1993), в которой основные виды деятельности, оставшиеся после окончания четвертой стадии, укрепляются за счет увеличения рентабельности и конкурентоспособности. Это достигается посредством:

- сокращения издержек (усиливается маркетинг, сокращается штат, автоматизируются процессы, вводится система повышения качества, обучаются сотрудники, улучшается моральный климат в коллективах);
- повышения эффективности инновационной деятельности;

• предложения дополнительных услуг и создания продуктов по желанию потребителей;

• представления продуктов или услуг, которые вместе составляют систему (например, каждую программу «Microsoft» можно использовать при соединении с любой другой программой);

• увеличения доли рынка;

• вступления в стратегические альянсы.

6. *Инновационная стратегия*, начавшаяся в 1983 г., основывается на инвестировании в новые технологии и новые рынки роста.

16.4. План маркетинга

План маркетинга составляется на основе маркетинговых исследований, состоящих из сбора, обработки и анализа информации. При их проведении рынок делится на сегменты, выбираются наиболее подходящие из этих сегментов и проводится позиционирование товара на выбранных сегментах.

Позиционирование подразумевает выделение своего товара из ряда конкурентных, формулирование его преимуществ и отличительных черт с точки зрения покупателя. Позиционирование — это причина, по которой покупатель выбирает данную продукцию. При позиционировании следует избегать специальных терминов. Надо использовать язык, доступный клиенту.

Интересен опыт отделения «IBM-Рочестер» [3], создавшего в конце прошлого века за 28 мес. компьютер «AS/400» (кодовое название — «Silverlake»). Потребители были разделены по размерам: малые, средние и крупные. В результате проведенного анализа рынок был разбит на географические регионы, которые, в свою очередь, — на отрасли, потребляющие продукцию. В качестве отраслей для «Silverlake» были выбраны страхование, торговля, здравоохранение, производство и конструирование, федеральные и местные органы власти. Пользователи «Silverlake» разбивались на три уровня: высокий, средний, низкий. Привлечение клиентов высокого уровня становилось приоритетным, так как они развивали рынок. Представив передовым покупателям то, что им нужно, можно быть уверенным в том, что через некоторое время будут удовлетворены потребности их последователей. Выбор реальных и потенциальных рынков «Silverlake» проводился в соответствии со схемой (рис. 16.5).

Важнейшим этапом маркетинговых исследований является определение конкурентных возможностей на рынке. При этом анализируется продукция конкурентов, а также исследуются компании, выпускающие эту продукцию, и их стратегии. Для этого, например, покупается товар конкурента, разбирается на части и анализируется его работа, собираются и анализируются годовые отчеты конкурентов, биржевые, страховые и другие доступные материалы, отчеты консультантов и аналитиков рынка, изучаются научные статьи и другие публикации. В результате проведенной работы создатели «Silverlake» выяснили, что 250 фирм-конкурентов составляют несколько групп. Шесть компаний занимали более 24% рынка, другие шесть — около 20%. Ясно, что соревноваться надо не со всеми, а с главными конкурентами.

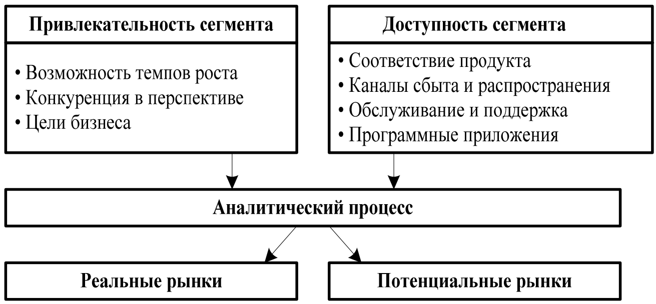


Рис. 16.5. Схема выбора реальных и потенциальных рынков

Схема планирования маркетинга представлена на рис. 16.6.

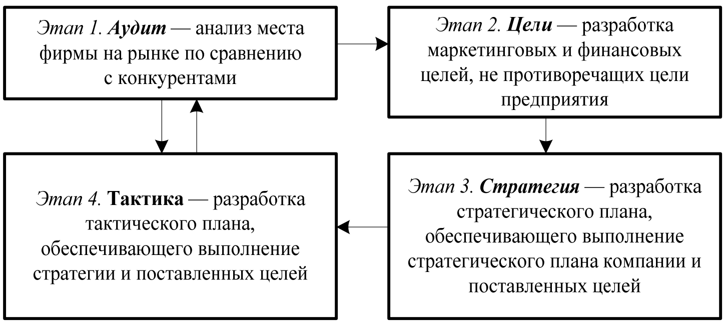


Рис. 16.6. Схема планирования маркетинга

Планы маркетинга подразделяют на стратегический план (на 3—5 лет) и тактический план (на 1 год). Сначала разрабатывается стратегический план, а затем тактический. Для эффективного планирования обеспечивается непрерывный процесс получения информации о внешнем окружении.

При аудите маркетинга учитываются операционные факторы, контролируемые фирмой в большей или меньшей степени, и внешние факторы, не контролируемые фирмой или контролируемые слабо. Внешние факторы разделяются на макроокружение (политические, экономические, социальные, технологические) и микроокружение (заказчики, конкуренты, дистрибьюторы, партнеры).

Аудит маркетинга часто проводится экспертным методом. Например, аудит маркетинга может быть проведен при помощи пяти опросных листов с оценкой каждого вопроса по трехбалльной шкале.

16.5. Продукты

Прежде всего в этом разделе следует перечислить продукты и услуги, оказываемые планируемым бизнесом.

Наименование продуктов должно быть понятно широкому потребителю. Следует избегать специальных терминов и жаргонов. Список продуктов должен легко восприниматься не подготовленным в технике вашего бизнеса человеком.

Каждый продукт или услуга должны быть подробно описаны. Причем их свойства должны излагаться с точки зрения потребителя. Например, потребителя мало интересует технология и внутреннее устройство оперативной памяти для компьютера, но его интересует ее объем и быстродействие. Необходимо особо выделить преимущества вашего продукта перед продуктом конкурента.

Следует показать состояние разработки продукта, особенно для инновационного проекта (например, на уровне идеи, опытного образца, опытного производства, серийного выпуска), а также определить жизненные циклы продукта и факторы, влияющие на продолжительность жизненных циклов.

Новизну на уровне изобретения продукта необходимо запатентовать и сообщить об этом в данном разделе. Перечислить проведенные и планируемые опытно-конструкторские и исследовательские работы и ожидаемые результаты.

В раздел надо включить фотографию товара, позволяющую составить о товаре хорошее представление. Здесь же должна содержаться информация о цене, издержках на создание единицы товара и прибыли, полученной от каждой единицы.

Большое значение в описании товара или услуги имеет качество и надежность продукта. Это особенно важно в российских условиях, где к качеству товара предъявляется много претензий.

16.6. Налоги и инфляция

Конечные результаты бизнеса существенным образом зависят от налоговой системы страны и темпов роста инфляции. Без учета инфляции полученные в бизнес-плане результаты могут оказаться далеки от истинных.

В списке налогов указываются наименование налога, база начисления, периодичность выплат и процентная ставка. К числу типовых налогов в России относятся налог на прибыль с выплатами из налогооблагаемой прибыли, налог на добавленную стоимость с базой «добавленная стоимость», налог на имущество с базой «имущество», социальный налог с базой «заработная плата» и др.

Прогноз инфляции представляется в виде таблицы на все годы существования рассматриваемого бизнеса. При прогнозировании используются, например, данные по прогнозу инфляции из официальных источников. Эти источники могут составляться, например, по прогнозам правительства. Некоторые разработчики бизнес-планов проводят собственный прогноз инфляции. Понятно, что это удорожает разработку бизнес-плана. Прогноз годовой инфляции может быть представлен в виде среднего по различным производственным объектам или по каждому объекту. К таким объектам, например, относятся заработная плата, недвижимость, сбыт, постоянные и переменные издержки.

16.7. Инвестиционный план

Раздел «Инвестиционный план» предназначен для систематизации информации о затратах инвестиционной стадии.

Инвестиционный план содержит информацию об инвестиционных мероприятиях, представляемых в виде таблиц. К таким мероприятиям можно отнести организационные и другие издержки подготовительного периода (все издержки до момента пуска предприятия и сбыта продукции или услуг), приобретение участков земли, приобретение и строительство зданий и сооружений, приобретение и изготовление оборудования. Таблицы мероприятий содержат номер этапа, его наименование, дату начала этапа, длительность этапа в днях, курс доллара в рублях, стоимость работ в рублях и долларах.

Если актив будет продан до окончания проекта, например, в связи с сокращением производства, то необходимо указать дату продажи и стоимость.

Этапы, являющиеся активами, необходимо отнести к одному из следующих типов активов: земля, здания и сооружения, оборудование, предоплаченные расходы, другие активы. Это связано с тем, что данные расчета инвестиционного плана необходимо отразить в балансе предприятия в соответствии с требованиями бухгалтерского учета. В зависимости от типа актива устанавливаются налоговые ставки и амортизационные отчисления. Норма амортизационных отчислений рассчитывается, например, как частное от деления стоимости актива (объекта) на период эксплуатации.

Значения всех затрат приводятся, как правило, к единой дате. При проведении расчетов затраты корректируются в соответствии с прогнозируемыми показателями инфляции.

Все этапы работ собираются в календарном плане. Этапы могут выполняться последовательно и параллельно. Для наглядного отображения сетевого графика проекта используется диаграмма GANTT.

Диаграмма GANTT отображает временны́е зависимости этапов инвестиционного плана и связи между ними. Пример диаграммы GANTT представлен на рис. 16.7.

Рис. 16.7. Диаграмма GANTT

16.8. План сбыта

Жизненный цикл продукта состоит из трех основных стадий: роста продаж, стабилизации, снижения объема продаж. План сбыта может быть представлен в таблицах и в виде графика.

Графически план сбыта представлен на рис. 16.8. Необходимо учитывать сезонные снижения объема сбыта.

План сбыта составляется на основе данных по исследованию рынка. При разработке стратегии продаж следует учитывать временны́е факторы (время производства продукта, время реализации продукта, время задержки платежа после поставки продукта) и условия оплаты (по факту, с предоплатой, в кредит). Особенно важен учет этих факторов в условиях инфляции. В этом случае предоставление льготных условий оплаты, являющихся распространенным методом стимулирования спроса, может негативно сказаться на результатах.

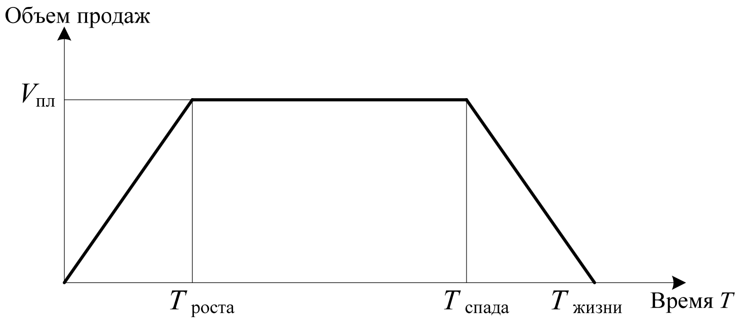


Рис. 16.8. График плана сбыта:

$V_{пл}$ — планируемый объем продаж; $T_{роста}$ — время роста продаж; $T_{спада}$ — начало падения продаж; $T_{жизни}$ — срок жизни продукта на рынке

План сбыта содержит три раздела:

- цены на продукты, скидки, информация о продаже по факту, с предоплатой, в кредит;
- инфляция по каждому продукту на внутреннем и внешнем рынках;
- объем сбыта по периодам, сезонные колебания объема сбыта, распределение продаж между внутренним и внешним рынками.

Полученные при расчете объемов продаж данные используются при составлении Отчета о прибылях и убытках (incomt statement) и Отчета о движении денежных средств (cash-flow). Причем в Отчете о прибылях и убытках данные о сбыте продукции отображаются в соответствии с принципами бухгалтерского учета. Это означает, что, например, при реализации продукции с предоплатой датой зачисления платежа считается дата отгрузки продукции потребителю, а не дата получения аванса; при реализации продукции в кредит датой зачисления всей суммы кредита считается дата заключения сделки, а не будущие поступления. В Отчете о движении денежных средств поступления отображаются только в момент их зачисления на счет предприятия.

16.9. Производственный план

Составление производственного плана необходимо для того, чтобы доказать возможным партнерам, инвесторам и самому себе, что бизнес в состоянии производить нужное количество товаров в нужные сроки.

Основой для разработки плана производства является план сбыта. Планируемый объем производства равен объему продаж плюс запасы плюс потери. Обычно объем запасов и потерь определяется как доля от планируемого объема продаж, например, 7% — доля запаса, 2% — доля потерь.

Исходными данными для разработки производственного плана служат издержки. Издержки подразделяются на:

а) переменные (прямые);

б) постоянные (общие):

- оперативные,
- торгово-административные.

Переменными издержками называются те издержки, величина которых прямо пропорциональна количеству произведенной продукции.

Постоянными издержками называются те издержки, величина которых не связана с объемом произведенной продукции и является относительно стабильной от периода к периоду.

Оперативными постоянными издержками считаются те издержки, которые непосредственно связаны с процессом производства, например, это повременная заработная плата, стоимость ремонта оборудования, стоимость топлива и энергии.

Торгово-административными постоянными издержками являются те издержки, которые относятся к продвижению продукта на рынок, а также затраты на содержание работы офиса, включая заработную плату администрации.

16.10. Финансовый план

Финансовый план получают путем анализа входной информации и последующих расчетов. Финансовый план включает в себя Отчет о прибылях и убытках, Баланс, План денежных потоков. Данные в каждой из статей доходов и расходов этих документов указываются в единой валюте.

Отчет о прибылях и убытках представляет результаты производства и сбыта продукции (услуг) за заданные периоды времени (месяц, квартал, год), т.е. результаты операционной деятельности предприятия.

Отчет о прибылях и убытках представляется в виде таблицы. В левом столбце таблицы представлены статьи, в остальных столбцах — показатели за заданные периоды, например за месяц, квартал и т.д. Пример отчета о прибылях и убытках представлен в виде табл. 16.2.

Отчет о прибылях и убытках может быть представлен также для нескольких проектов. При этом данные таблицы представляются для одного периода времени, а в столбцах вместо дат проставляются номера проектов.

Балансовая ведомость представляет финансовое состояние предприятия на заданный момент времени, а не на заданный период, как Отчет о прибылях и убытках. Балансовая ведомость состоит из актива и пассива, которые должны быть равны друг другу. Актив — это собственность предприятия, пассив — его долги.

Таблица 16.2

Наименование статьи	*Октябрь 2006 г.*	*Ноябрь 2006 г.*	*Декабрь 2006 г.*	*Январь 2007 г.*	*Февраль 2007 г.*
Валовой объем продаж					
Налоги с продаж и потери					
Чистый объем продаж					
Себестоимость продукции					
Балансовая (валовая) прибыль					
Коммерческие, управленческие расходы					
Внереализационные доходы/расходы					
Отдельные виды налогов					
Налогооблагаемая прибыль					
Налог на прибыль					
Чистая прибыль					

Из табл. 16.2 следует:

Чистый объем продаж =
= Валовой объем продаж − Налоги с продаж и потери;

Валовая прибыль =
= Чистый объем продаж − Себестоимость продукции;

Прибыль до налогообложения =
= Валовая прибыль − Коммерческие, управленческие расходы ±
± Внереализационные доходы/расходы − Отдельные виды налогов;

Чистая прибыль =
= Прибыль до налогообложения − Налог на прибыль.

Балансовая ведомость представляется в виде таблицы. Например, в левой стороне таблицы представлены активы, к которым относятся денежные средства, дебиторская задолженность, основные фонды, нематериальные активы. В правой стороне таблицы представлены пассивы, а именно: кредиторская задолженность, задолженность по налогам, заработной плате, обязательства перед поставщиками, собственный капитал. Пример балансовой ведомости представлен в табл. 16.3.

При анализе Отчета о прибылях и убытках и Балансовой ведомости можно определить прибыльность, платежеспособность и ликвидность предприятия.

План денежных потоков (кэш-фло) представляет остаток денежных средств на счете предприятия. План денежных потоков формируется за счет притока и оттока денежных средств.

Приток денежных средств — это доходы от реализации продуктов (услуг), амортизационных отчислений, от реализации активов предприятия, взносов в уставный фонд и займов.

Таблица 16.3

Активы	*Тыс. руб.*	*Пассивы*	*Тыс. руб.*
Денежные средства		Кредиторская задолженность (долговые обязательства перед поставщиками)	
Дебиторская задолженность (долговые обязательства клиентов)		Задолженность по выплатам (налоги, заработная плата и т.д.)	
Запасы		Краткосрочный заем (до 12 мес.)	
Сумма текущих активов (оборотные средства)		**Сумма текущих пассивов (краткосрочные обязательства)**	
Основные фонды: • земля; • здания и сооружения (минус амортизация) • оборудование (минус амортизация)		**Долгосрочные займы (более одного года)**	
Суммарная стоимость основных фондов		Собственный капитал (акционерный капитал)	
Другие активы (нематериальные)		Прирост собственного капитала (чистая прибыль или убытки)	
		Суммарный собственный капитал	
Сумма активов		**Сумма пассивов**	

Отток денежных средств — это затраты на производство продукции (услуг), издержки предприятия, затраты на инвестиции, обслуживание и погашение займов, выплаты дивидендов и т.д.

В Отчете о движении денежных средств поступления отображаются только в момент их зачисления на счет предприятия. Поступления и платежи в СКВ при этом переводятся в рубли по курсу, соответствующему дате платежа. Баланс наличности (остаток денежных средств на счете) используется для обеспечения производственной деятельности, инвестиций, погашения займов, выплаты налогов и потребления. В отличие от Отчета о прибылях и убытках в Отчете о движении денежных средств помимо особенностей отображения начислений на счет предприятия вводятся два дополнительных раздела — «Кэш-фло от инвестиционной деятельности» и «Кэш-фло от финансовой деятельности». Так как амортизационные отчисления остаются на счете предприятия, то в статье «Операционные издержки» Отчета о движении денежных средств отсутствует статья «Амортизационные отчисления». Эти средства являются внутренним источником финансирования. Чем выше амортизационные отчисления, тем меньше налогооблагаемая прибыль и тем больше сумма «Кэш-фло от производственной деятельности».

При составлении плана денежных потоков необходимо иметь такое количество собственного и заемного капиталов, чтобы все кэш-балансы на конец всех периодов были положительными величинами. Пример плана денежных потоков представлен в табл. 16.4.

Кэш-фло от производственной деятельности =
= Объем продаж − Переменные издержки — Операционные издержки —
− Проценты по кредитам − Налоги и прочие выплаты;

Кэш-фло от инвестиционной деятельности =
= Поступления от продажи активов − Выплаты на приобретение активов;

Кэш-фло от финансовой деятельности =
= Акционерный капитал + Заемный капитал −
− Выплаты в погашение займов − Выплаты дивидендов;

Кэш-баланс на начало периода = Кэш-баланс на конец предыдущего периода;

Кэш-баланс на конец периода =
= Кэш-фло от производственной деятельности +
+ Кэш-фло от инвестиционной деятельности +
+ Кэш-фло от финансовой деятельности + Кэш-баланс на начало периода.

Таблица 16.4

Наименование статьи	*1-й месяц*	*2-й месяц*	*3-й месяц*	*4-й месяц*
Объем продаж				
Переменные издержки				
Операционные (постоянные) издержки				
Проценты по кредитам				
Налоги и прочие выплаты				
Кэш-фло от производственной деятельности				
Выплаты на приобретение активов				
Поступления от продажи активов				
Кэш-фло от инвестиционной деятельности				
Акционерный капитал				
Заемный капитал				
Выплаты в погашение займов				
Выплаты дивидендов				
Кэш-фло от финансовой деятельности				
Кэш-баланс на начало периода				
Кэш-баланс на конец периода				

16.11. Финансовые коэффициенты

В этом разделе представлены финансовые коэффициенты, к которым относятся коэффициенты ликвидности, коэффициенты деловой активности, коэффициенты устойчивости, коэффициенты рентабельности, имущественные коэффициенты, инвестиционные коэффициенты. В свою очередь указанные типы представляются, например, следующим набором коэффициентов.

1. *Коэффициенты ликвидности*:
- коэффициент текущей ликвидности;
- коэффициент абсолютной ликвидности;
- коэффициент срочной ликвидности.

2. *Коэффициенты деловой активности*:
- коэффициент оборачиваемости оборотного капитала;
- коэффициент оборачиваемости основных средств (фондоотдача);
- фондоемкость;
- коэффициент оборачиваемости активов.

3. *Коэффициенты финансовой устойчивости*:
- коэффициент «Отношение суммарных обязательств к суммарным активам»;
- коэффициент «Отношение суммарных обязательств к собственному капиталу»;
- коэффициент обеспеченности собственными средствами;
- коэффициент защищенности кредиторов (покрытия процентов).

4. *Коэффициенты рентабельности*:
- коэффициент рентабельности активов;
- коэффициент рентабельности оборотных активов;
- коэффициент рентабельности внеоборотных активов;
- коэффициент рентабельности валовой прибыли;
- коэффициент рентабельности чистой прибыли;
- коэффициент рентабельности собственного капитала.

5. *Имущественные коэффициенты*:
- коэффициент оборотных средств в совокупном имуществе предприятия;
- коэффициент запаса в оборотных активах;
- коэффициент износа основных средств;
- коэффициент обновления основных средств;
- коэффициент выбытия основных средств.

6. *Инвестиционные коэффициенты*:
- сумма дивидендов на акцию;
- коэффициент покрытия дивидендов;
- сумма активов на акцию.

Финансовые коэффициенты представляются в виде таблиц для заданных отрезков времени. Весь временной интервал берется равным времени жизни продукта.

16.12. Показатели качества инвестиционного проекта

Для оценки качества инвестиционного проекта лучше всего использовать количественные показатели с учетом степени возможных рисков. Для таких оценок обычно пользуются общеизвестными понятиями эффектов и эффективностей. Эффекты и эффективности позволяют описать качество проекта в виде цифр и отразить эти цифры в бизнес-плане. Такое представление качества бизнеса позволяет сравнительно легко управлять его реализацией путем сравнения планового и реального состояний и принятия решений.

Обычно показатели качества представляются в таблице для двух валют: национальной и одной из наиболее стабильных валют. Эти показатели являются интегральными, т.е. характеризуют проект за весь срок его существования. Чаще всего в виде показателей качества используются:

- ставка дисконтирования;
- чистый приведенный доход;
- индекс прибыльности;
- внутренняя норма доходности;
- доходность инвестиций к погашению,
- срок окупаемости.

Показатели качества инвестиционного проекта — это важнейший раздел технико-экономического обоснования, с которого инвестор начинает изучение этого проекта. По показателям качества судят об основных достоинствах и недостатках проекта. Если проект не обещает хороших доходов, то вряд ли его будут читать дальше. Инвестиционная привлекательность определяется прежде всего этими показателями.

Упражнения

ТЕСТ 16.1

Выберите правильный вариант ответа.

В матрицу Портера входит:

A. Развитие товара.
B. Диверсификация.
C. Лидерство в области затрат.

D. Расширение рынка.
E. Разработка рынка.

ТЕСТ 16.2

Какие из перечисленных ниже высказываний относятся к отчету о прибылях и убытках?

1. Акционерный капитал.
2. Валовой объем продаж.
3. Заемный капитал.
4. Налоги с продаж и потери.
5. Чистый объем продаж.
6. Выплаты в погашение займов.
7. Себестоимость продукции.
8. Балансовая (валовая) прибыль.
9. Коммерческие, управленческие расходы.
10. Выплаты дивидендов.
11. Внереализационные доходы/расходы.
12. Налогооблагаемая прибыль.
13. Налог на прибыль.
14. Чистая прибыль.

Глава 17 УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ОБЪЕМЕ МАКРОЭКОНОМИКИ

Управление инвестициями в объеме макроэкономики осуществляется центральными органами. В России такими органами являются Правительство РФ, Государственная Дума и Центральный банк. Для управления инвестициями создается модель развития экономики, в которой внутренний валовой продукт делится в определенной пропорции на потребление и инвестиции. Эта пропорция выбирается так, чтобы экономика развивалась оптимальным образом. Управление инвестициями осуществляется путем инвестиционной и налоговой политики, влиянием на норму ссудного процента. Это управление должно приводить к выполнению выбранной пропорции потребления и инвестиций.

17.1. Факторы экономического роста

Основным фактором экономического роста страны в целом являются инвестиции [17, 22, 27].

Под экономическим ростом обычно понимают увеличение реального дохода в экономике, к которому относят внутренний национальный продукт, внутренний валовой продукт, или национальный доход, а также рост реального выпуска в расчете на душу населения.

Экономический рост называется *экстенсивным ростом*, если он осуществляется за счет привлечения дополнительных ресурсов и не изменяет средней производительности труда. *Интенсивный рост* связан с применением более совершенных факторов производства и технологии, т.е. осуществляется за счет роста отдачи от ресурсов.

Факторы экономического роста обычно группируются с типами экономического роста. К экстенсивным факторам относят рост затрат капитала и труда. К интенсивным факторам относят технологический прогресс, рост образовательного и профессионального уровней работников, совершенствование управления производством, улучшение законодательства и т.д.

Обычно экономический рост представляется в виде математических моделей, которые представляют собой упрощенное выражение реального экономического процесса в форме уравнений и графиков. Тем не менее экономическая модель дает возможность проанализировать отдельные стороны и закономерности экономического роста и управлять инвестициями так, чтобы экономика развивалась оптимальным образом. Поэтому многие государства в качестве своей экономической политики выбирают ту или иную модель. В настоящее время широкое распространение получили кейнсианский и монетаристский подходы к прогнозированию и регулированию рыночной экономики.

Работа Дж.М. Кейнса «Общая теория занятости, процента и денег» вышла в 1936 г. как ответ на проблемы, возникшие в связи с кризисом перепроизводства и массовой безработицей в период Великой депрессии 1929—1933 гг. Кейнс видел свою задачу в том, чтобы показать, что равновесие при полной занятости не является общим случаем. Общий случай — это равновесие при наличии безработицы, а полная занятость лишь частный случай. Чтобы достигнуть желаемого состояния полной занятости, государство обязано проводить особую политику для ее достижения, поскольку автоматически действующие рыночные силы без этой поддержки не гарантируют ее достижения. При этом Кейнс считал, что деньги воздействуют на развитие экономики не через цены, а через норму ссудного процента. Рост нормы ссудного процента удорожает кредит и ведет к сокращению инвестиций в производство, а снижение нормы стимулирует инвестиции. Решающим рычагом воздействия на экономику Кейнс считал также налоговую политику и политику государственных расходов (фискальную политику). Облегчение налогового бремени и рост государственных инвестиций в экономику ускоряют темпы ее развития, и наоборот. Кейнсианцы полагали, что денежная политика слабо влияет на развитие экономики в целом. В результате этого возник конфликт между монетаризмом и кейнсианством.

Коррекцией подхода Кейнса является монетаристский анализ экономики, развитый в начале 1970-х гг. М. Фридманом. По мнению Фридмана, главное влияние на движение основных макроэкономических показателей оказывает не спрос на товары, а контроль над предложением денег, спрос на деньги не зависит от ставки процента. Монетаристы считают, что скорость обращения денег является величиной переменной и денежно-кредитная политика имеет решающее значение в развитии экономики. Фридман сформулировал «денежное правило», согласно которому среднегодовой прирост денежной массы может составлять 4—5% в год при среднегодовом увеличении ВНП примерно на 3% и незначительном снижении скорости обращения денег. Это означает, что денежную массу следует наращивать с постоянным темпом независимо от динамики и циклических колебаний конъюнктуры рынка или ограничивать рост денежной массы постоянным темпом, но отнюдь не сокращать эту массу.

Считается, что при малой и контролируемой государством инфляции в своей политике государство должно использовать модель Кейнса, а при гиперинфляции и слабом ее контроле – модель Фридмана.

17.2. Модель Солоу

Модель, предложенная лауреатом Нобелевской премии Р.М. Солоу, характеризуется рядом особенностей:

- производственная функция в этой модели нелинейная;
- модель учитывает выбытие основного капитала;
- модель включает описание динамики трудовых ресурсов и технического прогресса и их влияние на экономический рост.

Состояние экономики в модели Солоу задается следующими *пятью переменными*, являющимися функциями времени, измеряемого в годах:

Y — внутренний валовой продукт;
C — потребление;
I — инвестиции;
L — число занятых в производстве (труд);
K — фонды (капитал).

Схема функционирования экономики согласно модели Солоу приведена на рис. 17.1.

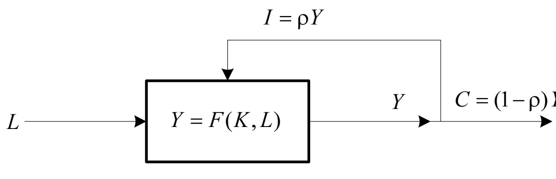


Рис. 17.1. Схема функционирования экономики по Солоу

Здесь и далее используются о б о з н а ч е н и я:

ρ — норма накопления, т.е. доля валовых инвестиций в валовом внутреннем продукте;

μ — доля выбывших за год основных производственных фондов;

ν — годовой темп прироста числа занятых в производстве.

Указанные параметры находятся в следующих границах:

$$0 < \rho < 1,\ 0 < \mu < 1,\ -1 < \nu < 1.$$

Значения параметров ρ, μ, ν постоянны во времени, причем норма накопления ρ считается управляющим параметром, т.е. в начальный момент времени может устанавливаться управляющим органом системы на любом уровне из области допустимых значений.

Предполагается, что выпуск в каждый момент времени определяется неоклассической производственной функцией $Y = F(K, L)$, например функцией Кобба—Дугласа:

$$Y = F(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}. \qquad \textbf{(17.1)}$$

Изменение за небольшой промежуток времени, согласно определению годового темпа прироста, числа занятых в производстве определяется соотношением $\frac{\Delta L}{L} = \nu \Delta t$. Переходя к дифференциалам, получим $\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = \nu$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид $\ln L = \nu \cdot t + \ln B$, где $\ln B$ — постоянная интегрирования. Отсюда находим $L = B\mathrm{e}^{\nu \cdot t}$. Значение B находим при подстановке в последнюю формулу $t = 0$, т.е. $L(0) = L_0 = B$. Окончательно

$$L = L_0 \mathrm{e}^{\nu \cdot t}.$$

Фонды за небольшой промежуток времени уменьшаются за счет их выбытия и увеличиваются за счет инвестиций. Их изменение за промежуток времени dt составит $dK = -\mu K dt + I dt$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dK}{dt} = -\mu \cdot K + I \text{ с начальным условием } K(0) = K_0.$$

Обобщим сказанное в виде модели Солоу в абсолютных показателях:

$$L = L_0 \mathrm{e}^{\nu t}; \quad \frac{dK}{dt} = -\mu K + I; \quad K(0) = K_0; \quad Y = F(K, L);$$

$$I = \rho Y; \quad C = (1 - \rho) Y. \qquad \textbf{(17.2)}$$

Введем *удельные показатели*:

$k = \frac{K}{L}$ — фондовооруженность;

$y = \frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k)$ — народно-хозяйственная производительность труда;

$i = \dfrac{I}{L} = \rho \cdot y$ — удельные инвестиции на одного занятого;

$c = \left(1-\rho\right) y$ — среднедушевое потребление на одного занятого.

Дифференциальное уравнение запишем в виде

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d\left(kL\right)}{dt} = k\nu L + L\frac{dk}{dt} = -\mu K + I; \quad \frac{dk}{dt} = -\nu k - \mu k + i = -\left(\nu+\mu\right)k + \rho \cdot f\left(k\right).$$

Тогда в удельных показателях модель Солоу приобретает вид

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho \cdot f(k); \quad \lambda = \nu + \mu; \quad k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0};$$

$$y = f(k); \quad i = \rho f(k); \quad c = (1-\rho) f(k). \qquad \textbf{(17.3)}$$

Изменяющиеся во времени показатели, определяемые моделями **(17.2)** и **(17.3)**, называются абсолютными или относительными траекториями. Траектория называется стационарной, если показатели не изменяются во времени, т.е.

$$k = k^0 = \text{const}; \quad y = y^0 = \text{const}; \quad i = i^0 = \text{const}; \quad c = c^0 = \text{const}.$$

После выхода траектории на стационарный режим производная $\dfrac{dk^0}{dt} = 0$. Для этого режима дифференциальное уравнение принимает вид

$$-\lambda \cdot k^0 + \rho \cdot f\left(k^0\right) = 0,$$

или

$$\lambda \cdot k^0 = \rho \cdot f\left(k^0\right). \qquad \textbf{(17.4)}$$

Поскольку функция $F\left(K,L\right)$ неоклассическая, то $f\left(0\right)=0$, $f'\left(k\right)>0$, $f''\left(k\right)<0$. Если задать условие $\rho \cdot f'(0) > \lambda$, то уравнение **(17.4)** будет иметь единственное ненулевое решение k^0 (рис. 17.2).

На рис. 17.2. введено обозначение $k = \widehat{k}$, при котором скорости роста функций $g_1\left(k\right) = \lambda k^0$ и $g_2\left(k\right) = \rho \cdot f\left(k^0\right)$ равны. Значение $\widehat{k}$ является решением уравнения

$$\rho \cdot f'\left(k\right) = \lambda. \qquad \textbf{(17.5)}$$

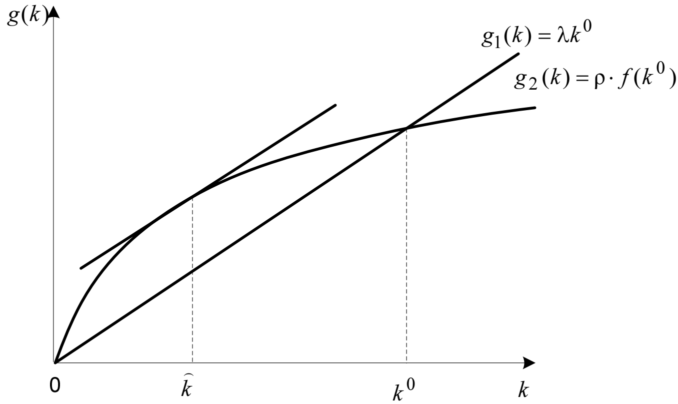


Рис. 17.2. Ход функций g_1 и g_2 по фондовооруженности

Если в начальный момент времени $k_0 = k^0$, то экономика находится на стационарной траектории и может сойти с нее только при изменении внешних условий, например при изменении функции $Y = F(K, L)$ (переход к новым технологиям). При $k \neq k^0$ в экономике будет переходный режим, который закончится установлением стационарного режима. Исследование переходного режима проведем для производственной функции Кобба—Дугласа **(17.1)**. Для удельного внутреннего валового продукта имеем

$$y = \frac{Y}{L} = A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} = A \cdot k^{\alpha}. \qquad \textbf{(17.6)}$$

Точку k^0 находят из уравнения

$$\lambda k = \rho \cdot A \cdot k^{\alpha}, \; k^{1-\alpha} = \frac{\rho \cdot A}{\lambda}, \; k^0 = \left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad \textbf{(17.7)}$$

а точку $\hat{k}$ — из уравнения

$$\rho \cdot \alpha \cdot A \cdot k^{\alpha - 1} = \lambda; \; k^{1-\alpha} = \frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}; \; \hat{k} = \left(\frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad \textbf{(17.8)}$$

Дифференциальное уравнение **(17.3)** для производственной функции Кобба—Дугласа **(17.6)** приобретает вид

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho \cdot A \cdot k^{\alpha}.$$

Введя замену $k = u\mathrm{e}^{-\lambda t}$, $u = k\mathrm{e}^{\lambda t}$, получим

$$\frac{du}{dt} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} - u \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} = -\lambda \cdot u \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} + \rho \cdot A \cdot u^{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha \cdot \lambda \cdot t},$$

или

$$\frac{du}{dt}=\rho\cdot A\cdot u^{\alpha}\cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot t}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{u^{\alpha}}=\rho\cdot A\cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot t}dt,$$

его решение имеет вид

$$\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{\rho\cdot A\cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot t}}{\lambda(1-\alpha)}+c_1.$$

Постоянную интегрирования находим из условия $t=0$, $u(0)=k_0$:

$$k_0^{1-\alpha}=\frac{\rho\cdot A}{\lambda}+c_1;\ c_1=k_0^{1-\alpha}-\frac{\rho\cdot A}{\lambda}.$$

Тогда

$$u=\left(\frac{\rho\cdot A\cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot t}}{\lambda}+k_0^{1-\alpha}-\frac{\rho\cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Подставив сюда $\left(k^0\right)^{1-\alpha}=\frac{\rho\cdot A}{\lambda}$ (см. **(17.7)**), получим

$$u=\left(\left(k^0\right)^{1-\alpha}\cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot t}+k_0^{1-\alpha}-\left(k^0\right)^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Учитывая замену $u=k\mathrm{e}^{\lambda t}$, найдем

$$k(t)=\left[\mathrm{e}^{-(1-\alpha)\lambda t}\left(\left(k^0\right)^{1-\alpha}\cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot t}+k_0^{1-\alpha}-\left(k^0\right)^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}};$$

$$k(t)=\left(\left(k^0\right)^{1-\alpha}+\left(k_0^{1-\alpha}-\left(k^0\right)^{1-\alpha}\right)\cdot \mathrm{e}^{-(1-\alpha)\cdot\lambda\cdot t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad \textbf{(17.9)}$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\lim_{t\to\infty}k(t)=k^0.$$

Вид переходного процесса, определяемого траекторией **(17.9)**, зависит от соотношения величин $k_0,\widehat{k}$ и k^0. Первая производная фондовооруженности k^0 от времени, являющаяся исходным дифференциальным уравнением $\frac{dk}{dt}=-\lambda k+\rho\cdot A\cdot k^{\alpha}$, будет положительной при возрастающей функции и отрицательной — при убывающей. Положив первую производную положительной, получим

$$-\lambda k + \rho \cdot A \cdot k^{\alpha} > 0; \quad \frac{\rho \cdot A}{\lambda} > k^{1-\alpha} .$$

Учитывая, что $\left(k^{0}\right)^{1-\alpha} = \dfrac{\rho \cdot A}{\lambda}$, получим возрастающий переходный процесс при $k < k^{0}$ и убывающий — при $k > k^{0}$.

Проведем исследование функции **(17.9)** на наличие точки перегиба. Для этих целей определим вторую производную и приравняем ее нулю:

$$\frac{d^2 k}{dt^2} = -\lambda \frac{dk}{dt} + \rho \cdot A \cdot \frac{dk^{\alpha}}{dt} = \left(-\lambda + \alpha \cdot \rho \cdot A \cdot k^{\alpha-1}\right) \frac{dk}{dt} = 0 .$$

Точка перегиба имеет место при

$$k^{1-\alpha} = \frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}; \quad k = \left(\frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} .$$

Сопоставив это с **(17.8)**, находим, что перегиб имеет место в точке

$$k = \widehat{k} .$$

Таким образом, можно выделить *три типа переходного процесса* применительно к фондовооруженности (рис. 17.3):

1) $k_0 < \widehat{k}$ (вначале ускоренный рост фондовооруженности, который при достижении $\widehat{k}$ сменяется замедленным ростом);

2) $\widehat{k} < k_0 < k^{0}$ (замедленный рост фондовооруженности);

3) $k_0 > k^{0}$ (замедляющееся падение фондовооруженности, т.е. «поедание фондов»).

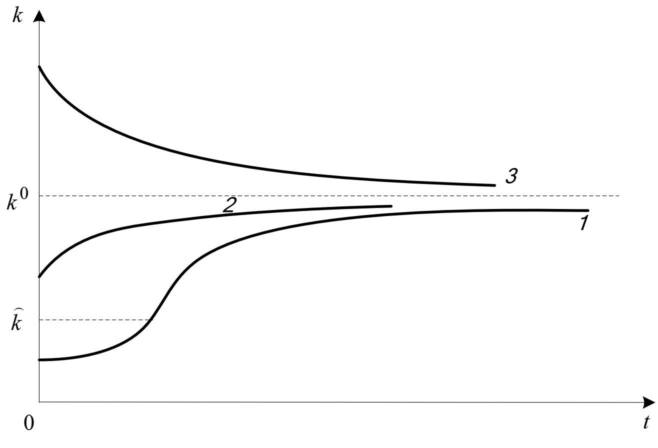


Рис. 17.3. Три типа переходного процесса

■ **Пример 17.1.** Производственная функция валового выпуска страны имеет вид $Y = K^{0,4}L^{0,6}$. Валовой внутренний продукт и основные производственные фонды представлены в млрд руб., а численность занятых — в млн чел. Норма накопления принимается равной $\rho = 0,2,$ доля выбывших за год основных производственных фондов $\mu = 0,03,$ годовой темп прироста числа занятых в производстве $\nu = 0,02,$ удельная фондовооруженность в начальный момент времени $k_0 = 4$ тыс. руб./чел.

Определить удельную фондовооруженность k^0 на стационарной траектории и точку $\widehat{k}$, народно-хозяйственную производительность труда на стационарной траектории, удельные инвестиции на одного занятого на стационарной траектории, среднедушевое потребление на одного занятого на стационарной траектории и в начальный момент времени, а также время переходного процесса.

Решение.

Удельный валовой внутренний продукт описывается уравнением

$$y = \frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{0,4} \cdot \left(\frac{L}{L}\right)^{0,6} = k^{0,4}.$$

На стационарной траектории удельную фондовооруженность k^0 и точку $\widehat{k}$ находят из соотношений **(17.7)** и **(17.8)** при

$$\lambda = \nu + \mu = 0,02 + 0,03 = 0,05;$$

$$k^0 = \left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{0,2}{0,05}\right)^{\frac{1}{1-0,4}} = 10,08 \text{ тыс. руб./чел.};$$

$$\widehat{k} = \left(\frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{0,4 \cdot 0,2}{0,05}\right)^{\frac{1}{1-0,4}} = 2,19 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Народно-хозяйственная производительность труда на стационарной траектории

$$y^0 = \left(k^0\right)^{\alpha} = 10,08^{0,4} = 2,56 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Удельные инвестиции на одного занятого на стационарной траектории

$$i^0 = \rho \cdot y^0 = 0,2 \cdot 2,56 = 0,51 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Среднедушевое потребление на одного занятого на стационарной траектории

$$c^0 = (1-\rho)\, y^0 = 0,8 \cdot 2,56 = 2,05 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Народно-хозяйственная производительность труда в начальный момент времени

$$y_0 = k_0^{\alpha} = 4^{0,4} = 1,74 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Среднедушевое потребление на одного занятого в начальный момент времени

$$c_0 = (1-\rho)\, y_0 = 0,8 \cdot 1,74 = 1,39 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Траектория фондовооруженности определяется формулой **(17.9)** и при полученных данных может быть представлена в виде

$$k^{0,6}(t) = 4 + \left(k_0^{0,6} - 4\right) \cdot e^{-0,03t}.$$

Процесс считают установившимся при $k(t) = 0,9 \cdot k^0$. Поэтому, подставив сюда $k(t) = 0,9 \cdot 10,08 = 9,072$, получим для $k_0 = 4$ тыс. руб./чел.:

$$9,072^{0,6} - 4 = (2,3 - 4) \cdot e^{-0,03t};$$

$$3,755 - 4 = -1,7 \cdot e^{-0,03t}; \quad e^{0,03t} = 6,94.$$

Решив это уравнение относительно t, найдем время переходного процесса $t_{\text{пер}}$. Прологарифмировав правую и левую части последнего выражения, получим

$$t_{\text{пер}} = \frac{\ln 6,94}{0,03} = \frac{1,94}{0,03} = 64,6 \text{ лет.} \quad \square$$

17.3. «Золотое правило» накопления

Оптимальная норма накопления, соответствующая «золотому правилу» накопления Э. Фелпса, обеспечивает равновесный экономический рост с максимальным уровнем потребления.

На стационарной траектории функция удельного потребления может быть представлена в виде

$$c^0 = (1-\rho) y^0 = (1-\rho) A \cdot \left(k^0\right)^{\alpha} = (1-\rho) A \cdot \left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{A}{\lambda^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot (1-\rho) \rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Проведем исследование этой функции от нормы накопления ρ на экстремум. Для этого продифференцируем ее по норме накопления, приравняем производную нулю и решим уравнение

$$\frac{dc^0}{d\rho} = \left(\frac{A}{\lambda^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left[-\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\rho)\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} \right] =$$

$$= \left(\frac{A}{\lambda^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha} \left(-1 + \alpha + \alpha \frac{1-\rho}{\rho} \right) = \left(\frac{A}{\lambda^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha} \left(-1 + \frac{\alpha}{\rho} \right) = 0.$$

В точке $\rho_{\max} = \alpha$ имеет место максимум функции, так как левее этой точки производная положительна, т.е. функция возрастает, а правее — отрицательна, т.е. функция убывает. Таким образом, наибольшее потребление достигается при равенстве нормы накопления эластичности выпуска по фондам. На практике норма накопления всегда меньше оптимального значения, т.е. имеет место недонакопление (рис. 17.4).

Рис. 17.4. График удельного потребления от нормы накопления

В общем случае удельное потребление определяется соотношением

$$c = (1-\rho)\,y = (1-\rho)\,A\cdot k^{\alpha} = (1-\rho)\,A\cdot\left(\left(k^0\right)^{1-\alpha} + \left(k_0^{1-\alpha} - \left(k^0\right)^{1-\alpha}\right)\cdot e^{-(1-\alpha)\lambda t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Установив $\rho = \alpha$, получим оптимальную траекторию удельного потребления:

$$c = (1-\alpha)\,A\cdot\left(\left(k^0\right)^{1-\alpha} + \left(k_0^{1-\alpha} - \left(k^0\right)^{1-\alpha}\right)\cdot e^{-(1-\alpha)\lambda t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}};$$

$$c = (1-\alpha)\,A\cdot\left(\left(k^0\right)^{1-\alpha} + \left(k_0^{1-\alpha} - \left(k^0\right)^{1-\alpha}\right)\cdot e^{-(1-\alpha)\lambda t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Начальное потребление в этом случае составит $c_0 = (1-\alpha)\,A\cdot k_0^{\alpha}$, а на стационарной траектории —

$$c^0 = (1-\alpha)\,A\cdot\left(k^0\right)^{\alpha} = (1-\alpha)\,A\cdot\left(\frac{\alpha\cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Если же $\rho < \alpha$, то начальное потребление $\tilde{c}_0 = (1-\rho)\,A\cdot k_0^{\alpha}$, а на стационарной траектории —

$$\tilde{c}^0 = (1-\rho)\,A\cdot\left(k^0\right)^{\alpha} = (1-\rho)\,A\cdot\left(\frac{\rho\cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Поскольку $\rho < \alpha$, то

$$\tilde{c}_0 > c_0\,;\ \tilde{c}^0 < c^0\,, \tag{17.10}$$

так как

$$(1-\rho)(\rho)^{\alpha/(1-\alpha)} < (1-\alpha)(\alpha)^{\alpha/(1-\alpha)}\,. \tag{17.11}$$

Действительно, запишем **(17.11)** в виде

$$\left[(1-\rho)^{(1-\alpha)/\alpha}\cdot\rho\right]^{\alpha/(1-\alpha)} < \left[(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha}\cdot\alpha\right]^{\alpha/(1-\alpha)};$$

$$(1-\rho)^{1/\alpha}\cdot\frac{\rho}{1-\rho} < (1-\alpha)^{1/\alpha}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}\,.$$

Пусть $\rho = \alpha - \Delta\rho$. Тогда последнее соотношение принимает вид

$$(1-\alpha+\Delta\rho)^{1/\alpha}\cdot\frac{\alpha-\Delta\rho}{1-\alpha+\Delta\rho} < (1-\alpha)^{1/\alpha}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha};$$

$$\left(\frac{1-\alpha+\Delta\rho}{1-\alpha}\right)^{1/\alpha} < \frac{\alpha(1-\alpha+\Delta\rho)}{(\alpha-\Delta\rho)(1-\alpha)};$$

$$\left(1+\frac{\Delta\rho}{1-\alpha}\right)^{1/\alpha} < \frac{1+\dfrac{\Delta\rho}{1-\alpha}}{1-\dfrac{\Delta\rho}{\alpha}}\,.$$

Разложим левую часть в ряд и ограничимся двумя первыми слагаемыми:

$$\left(1+\frac{\Delta\rho}{\alpha(1-\alpha)}\right)\left(1-\frac{\Delta\rho}{\alpha}\right) < 1+\frac{\Delta\rho}{1-\alpha};$$

$$1+\frac{\Delta\rho}{\alpha(1-\alpha)}-\frac{\Delta\rho}{\alpha}-\frac{(\Delta\rho)^2}{\alpha^2(1-\alpha)} < 1+\frac{\Delta\rho}{1-\alpha};$$

$$\frac{1}{1-\alpha}-1-\frac{\Delta\rho}{\alpha(1-\alpha)} < \frac{\alpha}{1-\alpha};$$

$$-\frac{\Delta\rho}{\alpha(1-\alpha)} < 1+\frac{\alpha}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha};$$

$$-\frac{\Delta\rho}{\alpha(1-\alpha)} < 0\,.$$

Таким образом, неравенства **(17.10)** и **(17.11)** имеют место. Траектории удельного потребления для $\rho = \alpha$ и $\rho < \alpha$ представлены на рис. 17.5, из которого следует, что выигрыш в текущем потреблении приводит к проигрышу в ближайшей перспективе. В момент t_0 этого выигрыша уже не будет, а потом потребление будет меньше оптимального.

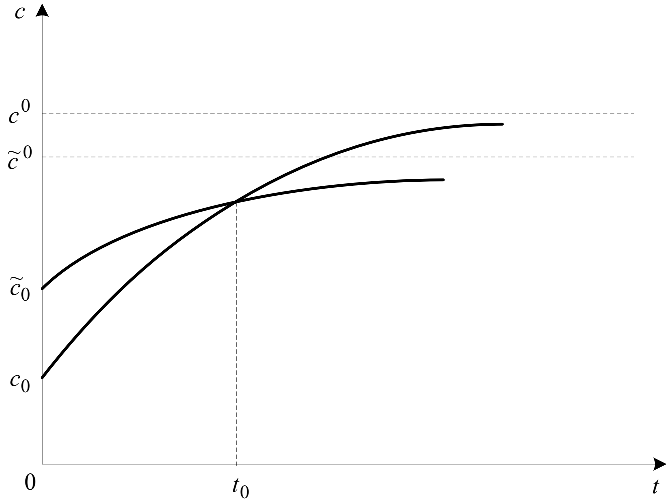


Рис. 17.5. Траектории удельного потребления

■ **Пример 17.2.** Условия примера 17.1. Норма накопления принимается равной $\rho = 0,4$.

Решение.

На стационарной траектории удельная фондовооруженность k^0 и точка $\widehat{k}$:

$$k^0 = \left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{0,4}{0,05}\right)^{\frac{1}{1-0,4}} = 32 \text{ тыс. руб./чел.}$$

$$\widehat{k} = \left(\frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{0,4 \cdot 0,4}{0,05}\right)^{\frac{1}{1-0,4}} = 6,95 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Народно-хозяйственная производительность труда на стационарной траектории

$$y^0 = \left(k^0\right)^{\alpha} = 32^{0,4} = 4 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Удельные инвестиции на одного занятого на стационарной траектории

$$i^0 = \rho \cdot y^0 = 0,4 \cdot 4 = 1,6 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Среднедушевое потребление на одного занятого на стационарной траектории

$$c^0 = (1-\rho)\, y^0 = 0,6 \cdot 4 = 2,4 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Народно-хозяйственная производительность труда в начальный момент времени

$$y_0 = k_0^{\alpha} = 4^{0,4} = 1,74 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Среднедушевое потребление на одного занятого в начальный момент времени

$$c_0 = (1-\rho) y_0 = 0,6 \cdot 1,74 = 1,04 \text{ тыс. руб./чел.}$$

Траектория фондовооруженности определяется формулой **(17.9)** и при полученных данных может быть представлена в виде

$$k^{0,6}(t) = 8 + (2,3-8) \cdot \mathrm{e}^{-0,03t}.$$

Подставив сюда $k(t) = 0,9 \cdot 32 = 28,8,$ получим

$$7,51 - 8 = -5,7 \cdot \mathrm{e}^{-0,03t}; \quad \mathrm{e}^{0,03t} = 11,63.$$

Прологарифмировав, получим

$$t_{\text{пер}} = \frac{\ln 11,63}{0,03} = \frac{2,45}{0,03} = 81,8 \text{ лет.}$$

Сопоставив полученные данные с данными примера 17.1, видим, что среднедушевое потребление на одного занятого в начальный момент времени уменьшилось на $1,39 - 1,04 = 0,35$ тыс. руб./чел., а среднедушевое потребление на одного занятого на стационарной траектории увеличилось на $2,4 - 2,05 = 0,35$ тыс. руб./чел. В то же время интервал выхода на стационарную траекторию увеличился с 64,6 года до 81,8 лет. □

УПРАЖНЕНИЯ

ТЕСТ 17.1

Укажите, какой точки зрения придерживался Кейнс, а какой Фридман?

1. Главное влияние на движение основных макроэкономических показателей оказывает контроль над предложением денег.

2. Деньги воздействуют на развитие экономики не через цены, а через норму ссудного процента, и денежная политика слабо влияет на развитие экономики в целом.

ТЕСТ 17.2

Какие из приведенных ниже высказываний описывают состояние экономики в модели Солоу?

1. Себестоимость продукции.
2. Инвестиции.
3. Заработная плата.
4. Внутренний валовой продукт.
5. Потребление.
6. Наличие рынков сбыта.
7. Число занятых в производстве.
8. Фонды (капитал).

Часть 5

РИСКИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Глава 18 ОСНОВЫ ТЕОРИИ РИСКОВ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

18.1. Виды рисков, учитываемых при оценке проектов

В главе 3 было отмечено, что ***инвестиционный проект*** — это система целей, реализация которых основывается на инвестициях, сформированных для достижения этих целей, а также исходных данных, обусловливающих способ достижения поставленных целей. Для разработки технико-экономического обоснования проекта используется информация, представленная, в частности, в виде исходных данных. Разработчик технико-экономического обоснования никогда не обладает полной информацией, способной исключить любую неопределенность. В общем случае для исключения неопределенности необходимо использовать бесконечное число обстоятельств.

Следует различать два понятия: риск и неопределенность [12]. ***Неопределенность*** — неполнота и неточность информации об условиях реализации проекта. ***Риск*** — возможность возникновения в ходе реализации проекта неблагоприятных ситуаций и последствий. Риск — это субъективное понятие. Для одних участников инвестиционного процесса возникшие последствия могут негативным образом сказаться на результатах, для других — позитивным.

Слово «риск» имеет испанско-португальские корни и означает «риф», «подводная скала». Это ассоциируется с понятием «лавировать между скалами», а значит, сопряжено с опасностью [12].

С появлением товарно-денежных отношений риск становится экономической категорией. Риск связан с неопределенностью. Неопределенность, связанная с возможностью возникновения в ходе реализации проекта неблагоприятных ситуаций и последствий, характеризуется понятием риска. Результаты проявления неопределенности могут быть положительными, т.е. прибыль, доход или другая выгода могут увеличиться по сравнению с ожидаемыми. Однако о риске чаще всего говорят в негативном смысле.

Развитие инвестиционного проекта является динамическим процессом. В каждый отдельно взятый момент времени принятия решений условия реализации проекта могут изменяться. Это приводит к необходимости изменения ранее установленных параметров проекта.

Под *классификацией рисков* понимают распределение рисков на конкретные группы в соответствии с определенным признаком, положенным в основу классификации.

Научно обоснованная классификация риска содействует четкому положению места каждого риска в общей системе. Это создает предпосылки для эффективного применения соответствующих методов и приемов управления риском. Известно множество классификаций риска.

Например, риски подразделяют на внешние и внутренние. *Внешний риск* — это возможность возникновения в ходе реализации проекта неблагоприятных ситуаций и последствий, причинами которых является внешняя среда. *Внутренний риск* связан с неопределенностью реализации проекта, вызванной причинами внутри проекта.

Достаточно подробно виды инвестиционных рисков рассмотрены, например, в [12, 20].

К внешним рискам относят:

- риски, связанные с нестабильностью экономического законодательства и экономической ситуации, условий инвестирования и использования прибыли;
- внешнеэкономические риски, связанные с возможностью введения ограничений на торговлю и поставки, закрытия границ и т.д.;
- риски из-за неопределенности природно-климатических условий, а также возможности стихийных бедствий;
- риски из-за неполноты или неточности информации о динамике технико-экономических показателей, параметров новой техники и технологии;
- риски из-за рыночной конъюнктуры, цен, валютных курсов и т.д.

К внутренним рискам относят:

- риски из-за неполноты и неточности исходных данных проекта;
- риски из-за неполноты и неточности проектной документации;
- производственно-технологические риски, связанные с авариями, отказами оборудования, производственным браком и т.д.;

• риски из-за неполноты и неточности информации о финансовом положении и деловой репутации предприятий-участников, связанные с возможностью неплатежей, банкротств, срывов договорных обязательств;

• риски из-за неопределенности целей, интересов и поведения участников.

Другой тип классификации, предложенной в работе [12].

1. *Производственный риск* — риск невыполнения планируемых объемов работ, увеличения затрат, недостатков планирования.

2. *Инвестиционный риск* — риск возможного обесценивания инвестиционно-финансового портфеля, состоящего из собственных и приобретенных ценных бумаг.

3. *Рыночный риск* связан с возможными колебаниями рыночных процентных ставок.

4. *Политический риск* — риск понесения убытков или снижения прибыли вследствие изменения государственной политики.

5. *Финансовый риск* связан с осуществлением операций с финансовыми активами:

5.1. Процентный риск — возможность незапланированного изменения процентной ставки при заключении долгосрочных соглашений о займе.

5.2. Кредитный риск связан с невозможностью выполнения кредитного договора вследствие финансового краха.

5.3. Валютный риск — риск потенциальных убытков, которые может понести предприниматель вследствие изменения валютных курсов.

6. *Экономический риск* — риск потери конкурентоспособности предприятия вследствие непредвиденных изменений в экономическом окружении, например роста цен на энергоносители, роста процентных ставок на кредиты для финансирования оборотных средств, повышения таможенных тарифов и т.д.

18.2. Риски инновационных проектов

Инновационным проектом [1] называется инвестиционный проект, который связан с производством новой или усовершенствованной продукции, использованием новой или усовершенствованной технологии.

Инновационным проектам присущи все риски, характерные для инвестиционного проекта. Однако таким проектам присущи также риски, связанные с ролью инноваций. Инновационным проектам присущи свои особенности.

Два проекта называются *взаимоисключающими* (*альтернативными*), если рентабельность первого снижается до нуля в случае принятия второго.

Два проекта называются *условными*, если рентабельность каждого из них равна нулю без принятия другого.

Независимыми называются два проекта, если принятие или отказ одного из них никак не отражается на рентабельности другого.

Замещающими называются проекты, для которых рентабельность одного снижается при принятии другого.

Синергическими называются такие два проекта, для которых принятие одного из них увеличивает рентабельность другого.

В инновационной деятельности выделяются следующие составляющие:

- фундаментальные исследования, выявляющие наиболее общие закономерности в природе;
- прикладные исследования, выявляющие практическое применение законов природы;
- разработка прототипа продукта;
- опытное производство, подтверждающее технологическую реализуемость продукта и востребованность продукта обществом;
- массовое производство.

Инновационный процесс должен заканчиваться на рынке, где не только продают, но и покупают.

К основным рискам, присущим инновационному предпринимательству, относятся:

- *риск оригинальности*, связанный с разработкой совершенно нового продукта или технологии. Особенно рискованными являются инвестиции в фундаментальную науку. Наиболее интересны инвестиции в оригинальные проекты, для которых будет найдена возможность их практического применения;
- *риск информационной неадекватности*, связанный с недостатком информации, предоставляемой инвестору, о состоянии разработки. Например, разработчики пытаются выдать прототип за опытную партию, идею — за образец и т.д. Только в том случае, если реальное состояние соответствует заявленному, разговор перейдет к сути заявленной инновации;
- *риск технологической неадекватности*, связанный с возможностью ее воплощения в промышленности. Такое воплощение не всегда возможно;
- *риск юридической неадекватности*, связанный с недостаточной правовой защищенностью интеллектуальной собственности и с правовой безграмотностью авторов инноваций. Например, авторы отказываются раскрыть особенности своего продукта и тем самым препятствуют возможности инвестирования в него. Другой пример — автор работает с иностранной компанией на определенных устных договоренностях. Эти договоренности аккуратно соблюдаются обеими сторонами. На определенном этапе отношения оформляются письменно. После этого иностранная сторона будет руководство-

ваться только договором, и ссылки на предыдущие устные договоренности, не внесенные в текст договора, будут встречаться непониманием;

- *риск финансовой неадекватности*, состоящий в несоответствии содержания инвестиционного проекта и финансовых средств, необходимых для его реализации;
- *риск неуправляемости проектом*, связанный с многообразием проблем, возникающих при внедрении инновации. Например, лидер команды разработчиков инновации может оказаться несостоятельным в бизнесе. Финансовыми вопросами такому лидеру заниматься неинтересно, он по-прежнему основное внимание уделяет научным исследованиям, все остальное внимания не удостаивается, и его деятельность не приводит к положительным финансовым результатам.

18.3. Методы анализа риска

При анализе рисков используются качественные и количественные методы.

Качественная оценка рисков инвестиционного проекта представляет собой описательный метод, по результатам которого аналитик приходит к количественному описанию рисков проекта.

Качественный подход позволяет выявить и идентифицировать возможные виды проектных рисков, описать причины и факторы, влияющие на уровень данного вида риска, и предложить систему антирисковых мероприятий.

Количественный подход к анализу рисков инвестиционного проекта связан с численным определением величин отдельных рисков и риска проекта в целом.

Проведение количественного анализа рисков инвестиционного проекта является продолжением качественного анализа.

К наиболее часто встречающимся методам относятся точка безубыточности, анализ чувствительности, метод сценариев, правило рычага, метод экспертных оценок и дерево решений, ценовая модель капитальных активов, регрессионный и трендовой методы, метод Монте-Карло. Использованию этих методов для анализа рисков инвестиционных проектов посвящена эта часть книги.

Анализ риска выполняют следующие участники проекта.

1. Заказчик, являющийся наиболее заинтересованным участником проекта и использующий результаты анализа для планирования элементов проекта.

2. Подрядчик, стремящийся ограничить число факторов риска, за которые он должен нести ответственность.

3. Банк, использующий результаты анализа риска для определения условий кредитования проекта.

4. Страховая компания, использующая результаты анализа риска для обоснования условий имущественного или иного страхования участников проекта.

18.4. Точка безубыточности

Анализ безубыточности — это расчет и анализ объема реализации, необходимого для возмещения всех издержек.

Точка безубыточности — это критический объем реализации товара (услуг), при котором совокупные доходы равны сумме всех издержек. Другими словами, точка безубыточности характеризует объем продаж, при котором выручка от реализации продукции совпадает с издержками производства. Смысл точки безубыточности поясняет рис. 18.1.

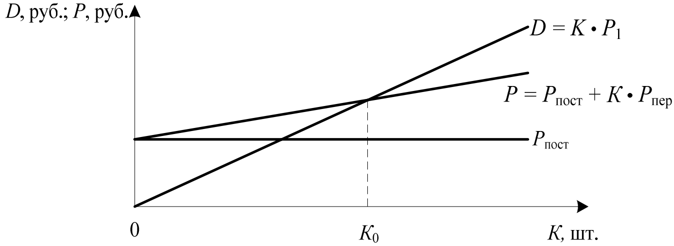


Рис. 18.1. Точка безубыточности

На рис. 18.1 использованы следующие о б о з н а ч е н и я: $P_{\text{пост}}$ — постоянные издержки, не изменяющиеся при изменении объема производства; $P = P_{\text{пост}} + KP_{\text{пер}}$ — совокупные расходы, состоящие из постоянных издержек $P_{\text{пост}}$ и переменных издержек, изменяющихся прямо пропорционально объему производства; $P_{\text{пер}}$ — переменные издержки на единицу продукции; K — количество единиц продукции; $D = KP_1$ — совокупные доходы; P_1 — цена единицы продукции.

Точка безубыточности K_0 определяется равенством совокупных расходов и совокупных доходов $D = P$, или $K_0 P_1 = P_{\text{пост}} + K_0 P_{\text{пер}}$. Отсюда находим

$$K_0 = \frac{P_{\text{пост}}}{P_1 - P_{\text{пер}}}.$$

Эта формула позволяет найти количество реализованного товара, при котором совокупные доходы равны сумме всех издержек. Чем ниже точка безубыточности, тем устойчивее проект.

Если суммарные переменные издержки и выручка связаны через постоянный коэффициент c при помощи соотношения

$$P_{1,\text{пер}} = c \cdot P_1,$$

то формула для точки безубыточности приобретает вид

$$K_0 = \frac{P_{\text{пост}}}{P_1 \cdot (1-c)}.$$

Запасом финансовой прочности называют величину, выраженную в денежных единицах, показывающую превышение предполагаемого количества продаж точки безубыточности.

Индекс безопасности — это отношение величины запаса финансовой прочности к предполагаемому объему продаж.

■ **Пример 18.1.** Данные о работе двух аналогичных промышленных предприятий приведены в табл. 18.1. Для каждого варианта $P_1 = 25$. Предполагаемый объем продаж каждого предприятия равен 1500 ед. продукции.

Определить объем продаж и величину издержек в точке безубыточности, а также запас финансовой прочности и индекс безопасности.

Таблица 18.1

Виды затрат	*Предприятие 1*	*Предприятие 2*
Постоянные издержки		
Обслуживание и ремонт	1400	1500
Заводские накладные расходы	1900	2000
Административные затраты	3000	3500
Затраты на сбыт	1200	1200
Переменные издержки на единицу продукции		
Сырье, основные материалы	6	4
Прочие материалы	5	3,5
Заработная плата рабочих	5	6,5
Коммунальные издержки	2	2
Энергия на технологические цели	1	1

Решение.

Постоянные издержки по предприятиям *1* и *2* составляют соответственно:

$$P_{\text{пост},1} = 7500; \quad P_{\text{пост},2} = 8200.$$

Переменные издержки:

$$P_{1,\text{пер},1} = 19; \quad P_{1,\text{пер},2} = 17.$$

Точка безубыточности по каждому из предприятий:

$$K_{01} = \frac{7500}{25-19} = 1250; \quad K_{02} = \frac{8200}{25-17} = 1025.$$

Предприятие *2* имеет бо́льшую устойчивость, так как реализация 1025 ед. продукции покрывает все издержки, а для предприятия *1* для этих целей необходимо реализовать 1250 ед. продукции.

Точка безубыточности, выраженная в денежных единицах, по каждому из предприятий:

$$P_{01} = 25 \cdot 1250 = 31\,250 \text{ ден. ед.}; \quad P_{02} = 25 \cdot 1025 = 25\,625 \text{ ден. ед.}$$

Запас финансовой прочности:

$$\Delta D_1 = 25 \cdot 1500 - 31\,250 = 6250 \text{ ден. ед.};$$

$$\Delta D_2 = 25 \cdot 1500 - 25\,625 = 11\,875 \text{ ден. ед.}$$

Индекс безопасности:

$$I_{б1} = \frac{\Delta D_1}{D_{пр}} = \frac{6250}{25 \cdot 1500} = 0{,}1667, \text{ или } 16{,}67\%;$$

$$I_{б2} = \frac{\Delta D_2}{D_{пр}} = \frac{11\,875}{25 \cdot 1500} = 0{,}3167, \text{ или } 31{,}67\%.$$

По запасу финансовой прочности и по индексу безопасности предприятие *2* также имеет лучшие характеристики по сравнению с предприятием *1*. □

18.5. Понятие эластичности

Прежде чем переходить к исследованию чувствительности проекта к различным показателям, введем понятие эластичности. Это понятие широко используется при исследовании большого числа экономических процессов, и в частности при исследовании чувствительности. Понятие эластичности функции тесно связано с дифференцированием функции.

Эластичностью функции называется предел отношения относительного приращения функции к относительному приращению переменной при стремлении приращения переменной к нулю. В экономическом анализе под функцией обычно понимают показатель проекта, а под переменной — величину, в той или иной степени влияющую на этот показатель.

Формула расчета эластичности:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} \middle/ \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{y'}{y/x}.$$

Из формулы расчета эластичности видно, что эластичность $E_x(y)$ функции $y = y(x)$ прямо пропорциональна производной этой функции y' по x.

Для практических целей часто используется *приближенная формула* для вычисления эластичности по приращениям аргумента и функции:

$$E_x(y) \approx \frac{\Delta y}{y} \bigg/ \frac{\Delta x}{x},$$

где Δx — приращение аргумента x; Δy — приращение функции y, соответствующее приращению аргумента Δx.

Важность понятия эластичности в экономике заключается в том, что *эластичность* показывает, на сколько процентов изменится исследуемый показатель при изменении зависимого показателя на 1%.

■ **Пример 18.2.** Функции спроса и предложения имеют вид

$$q = \frac{1}{p^2}; \quad s = p^2,$$

где q — количество покупаемого товара; s — количество предлагаемого на продажу товара; $p > 0$ — цена товара.

Определить равновесную цену, эластичность спроса и предложения по этой цене, а также изменение дохода при увеличении цены на 3%.

Решение.

Равновесная цена определяется из условия равенства спроса и предложения, т.е. из уравнения $\frac{1}{p_p^2} = p_p^2$, откуда $p_p^4 = 1$, или $p_p = 1$ ден. ед.

Эластичность спроса и предложения определяются по формулам

$$E_{p_p}(q) = \frac{q'_{p_p} \cdot p_p}{q} = -\frac{2p_p p_p^2}{p_p^3} = -2; \quad E_{p_p}(s) = \frac{s'_{p_p} \cdot p_p}{s} = \frac{2p_p p_p}{p_p^2} = 2.$$

Так как полученные значения эластичности по абсолютной величине больше единицы, то спрос и предложения товара при равновесной цене эластичны относительно цены. Увеличение цены на 1% приведет к уменьшению спроса на 2%. При увеличении цены на 3% спрос уменьшится на $3 \cdot 2 = 6\%$, следовательно, доход уменьшится на $6 - 3 = 3\%$. □

18.6. Анализ чувствительности

Анализ чувствительности показывает, насколько сильно изменяется основной показатель проекта при определенном изменении заданных параметров этого проекта. *Для проведения анализа чувствительности* используется следующий алгоритм.

1. Выбирают основной показатель проекта, например чистый приведенный доход, внутреннюю норму доходности и т.д.

2. Выбирают факторы, наиболее существенно влияющие на чувствительность, например цена реализации, величина переменных или постоянных производственных издержек, объем продаж, плата за кредит, сумма инвестиционных затрат, стоимость привлекаемого капитала.

3. Рассчитывают значение основного показателя для заданных диапазонов факторов.

4. Определяют факторы, к которым проект наиболее чувствителен, и принимают решение о реализации проекта или о доработке технико-экономического обоснования.

Геометрическое представление чувствительности проекта позволяет по наклону графика зависимости совокупных доходов к оси вариации переменной судить о чувствительности проекта к той или иной переменной.

Пример изменения чистого приведенного дохода (NPV) от номинала, выраженного в процентах, при изменении некоторых факторов приведен на рис. 18.2. Анализ рис. 18.2 показывает, что модель наиболее чувствительна к цене реализации. Если рассматриваются два проекта, то при прочих равных условиях выбирается тот проект, чувствительность которого меньше. На рис. 18.2 более чувствительным к цене реализации оказался проект *1*.

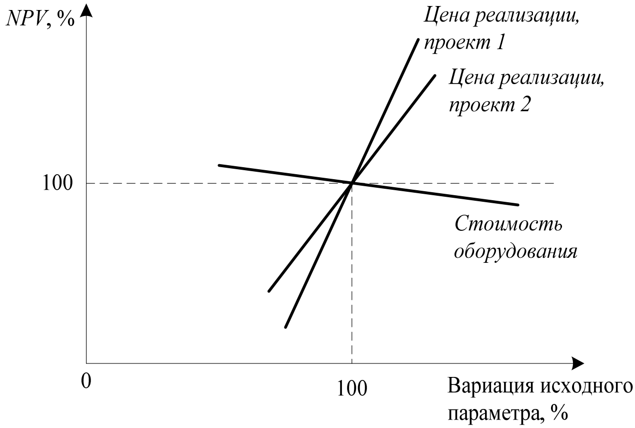


Рис. 18.2. Геометрическое представление чувствительности проекта

Показателем чувствительности проекта служит эластичность чистого приведенного дохода по вариации в точке 100%. Например, эластичность чистого приведенного дохода по цене реализации может быть рассчитана по формуле

$$E_p(\mathrm{NPV}) \approx \frac{\Delta \mathrm{NPV}}{\mathrm{NPV}} \Big/ \frac{\Delta p}{p},$$

где ΔNPV — приращение чистого приведенного дохода, соответствующее приращению цены единицы продукции Δp; p — номинальная цена единицы продукции.

При использовании графиков рис. 18.2 эластичность можно определить как отношение приращения основного показателя в процентах к приращению вариации исходного параметра в процентах.

■ **Пример 18.3.** Чистый приведенный доход инвестиционного проекта для базового сценария при цене реализации единицы продукции по 152 руб./шт. равен 2 587 436 руб. При уменьшении цены единицы продукции на 2 руб. чистый приведенный доход составит 2 523 476 руб.

Определить эластичность чистого приведенного дохода по цене реализации.

Решение.

Для определения эластичности используется формула

$$E_p(\mathrm{NPV}) \approx \frac{\Delta\mathrm{NPV}}{\mathrm{NPV}} \bigg/ \frac{\Delta p}{p} = \frac{2\ 587\ 436 - 2\ 523\ 476}{2\ 587\ 436} \bigg/ \frac{2}{152} = 1{,}88.$$

Таким образом, при изменении цены на 1% чистый приведенный доход изменится на 1,88%. □

18.7. Метод сценариев

Анализ сценариев позволяет определить воздействие на основные показатели проекта всех параметров проекта. При этом отклонения параметров проекта рассчитываются с учетом корреляции между ними. Часто при проведении риск-анализа используются три сценария: базовый, пессимистический и оптимистический.

В пессимистическом сценарии используются значения параметров ниже ожидаемых. При этом учитывается корреляционная связь между параметрами. Например, снижение объема реализуемой продукции, скорее всего, приведет к росту цены на эту продукцию. Если при этом ухудшать все значащие для успешной работы по проекту параметры, то следует ожидать снижения качества проекта. Однако вероятность одновременного ухудшения большого числа слабокоррелированных величин невелика. Поэтому к выбору характеристик пессимистического сценария следует относиться очень осторожно. Те же сложности встречаются при разработке оптимистического варианта. Этих недостатков лишен имитационный метод Монте-Карло, рассмотренный ниже.

18.8. Правило рычага

Метод позволяет определять возможные риски по предполагаемому изменению объема продаж, поэтому его использование возможно на стадии эксплуатации.

Рычагом называется чувствительность дохода предприятия к изменениям объема продаж.

Предприятие получает прибыль посредством реализации продукции, однако объем реализации — это не фиксированная постоянная величина, а величина, подверженная случайным и закономерным, например сезонным, колебаниям. Для выявления влияния этих колебаний может быть использована чувствительность дохода предприятия к изменениям объема продаж. Эта чувствительность и называется рычагом. Другими словами, рычаги — это эластичности, связывающие изменение одной статьи дохода при изменении другой статьи.

Доход предприятия может измеряться до и после уплаты налогов. Типы доходов предприятия, используемые для анализа при помощи рычагов, представлены на рис. 18.3.

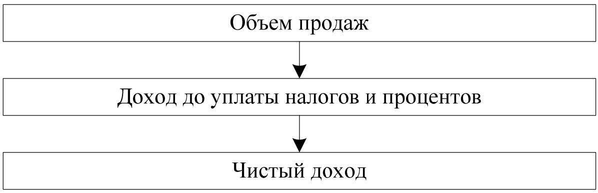


Рис. 18.3. Типы доходов предприятия, используемые для анализа

Теория об управлении финансами различает *три вида операционных рычагов*:

- оборотный;
- финансовый;
- комбинированный.

18.8.1. ОБОРОТНЫЙ РЫЧАГ В ФИНАНСОВОЙ ПОЛИТИКЕ

Оборотный рычаг показывает, на сколько процентов изменится доход до уплаты налогов и процентов, когда объем продаж изменится на 1%.

Доход до уплаты налогов и процентов вычисляется по формуле

$$E = D - P_{\text{пост}} - P_{\text{пер}},$$

где E — доход до уплаты налогов и процентов; D — совокупные доходы, или объем продаж; $P_{\text{пост}}$ — постоянные издержки, которые не изменяются при изменении объема производства; $P_{\text{пер}}$ — переменные издержки, изменяющиеся прямо пропорционально объему производства, $P_{\text{пер}} = c \cdot D$, $c = \text{const}$.

Оборотный рычаг — это отношение процентного дохода до уплаты налогов и процентов к процентному изменению объема продаж:

$$L = \frac{\delta E / E}{\delta D / D}.$$

Так как $\delta E = \delta D - \delta P_{\text{пер}} = \delta D(1-c)$ при условии $\delta P_{\text{пост}} = 0$, то

$$L = \frac{\delta D(1-c)/\left(D(1-c) - P_{\text{пост}}\right)}{\delta D/D} = \frac{D(1-c)}{D(1-c) - P_{\text{пост}}}.$$

Иначе эту формулу можно записать в виде

$$L = \frac{D(1-c)}{D(1-c) - P_{\text{пост}}} = \frac{C}{E} = \frac{\textit{Маржа на продажах}}{\textit{Доход до уплаты налогов и процентов}},$$

где $C = D(1-c)$ — маржа на продажах.

■ **Пример 18.4.** При объеме продаж 3 млн руб., постоянных издержках 1 млн руб. и переменных издержках, составляющих 40% (80%) объема продаж, найти оборотный рычаг.

***Решение*:**

$$L_1 = \frac{3(1-0,4)}{3(1-0,4)-1} = 2,25; \quad L_2 = \frac{3(1-0,8)}{3(1-0,8)-1} = -1,5 \cdot$$

В первом варианте при росте или падении объема продаж на 1% доход до уплаты налогов и процентов возрастет или упадет на 2,25%. Во втором варианте оборотный рычаг имеет отрицательное значение. Это означает превышение суммарных издержек над объемом продаж. □

Поскольку объем продаж изменяется со временем, например в связи с сезонными колебаниями, то использование оборотного рычага позволяет по изменению объема продаж предсказать изменение дохода до уплаты налогов и процентов и принять меры для снижения влияния возможных потерь.

Определим удаленность объема продаж от точки безубыточности по оборотному рычагу. Как показано выше, формула для точки безубыточности имеет вид $K_0 = \frac{P_{\text{пост}}}{P_1 \cdot (1-c)}$. Умножив правую и левую части этого уравнения на стоимость единицы продукции, получим выражение для точки безубыточности в денежных единицах, т.е. в рублях: $P_0 = \frac{P_{\text{пост}}}{1-c}$. Перепишем формулу в виде $P_{\text{пост}} = P_0(1-c)$. Подставив это выражение в формулу для оборотного рычага, получим

$$L = \frac{D(1-c)}{D(1-c) - P_0(1-c)} = \frac{D}{D - P_0} \cdot$$

Отсюда находим соотношения для запаса финансовой прочности, удаленности объема продаж от точки безубыточности и для индекса безопасности.

Запас финансовой прочности будет определяться выражением

$$\Delta D = D - P_0 = \frac{D}{L}.$$

Разделив левую и правую части этого выражения на D, находим формулу для индекса безопасности:

$$I_б = \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{L}.$$

С другой стороны, разделив левую и правую части на P_0, получим

$$\frac{D}{P_0} - 1 = \frac{D}{P_0} \cdot \frac{1}{L}.$$

Решив это уравнение относительно удаленности объема продаж от точки безубыточности, представленной в виде дроби $\frac{D}{P_0}$, получим

$$\frac{D}{P_0} = \frac{L}{L-1}.$$

■ **Пример 18.5.** При объеме продаж 900 тыс. руб., постоянных издержках 350 тыс. руб. и переменных издержках, составляющих 35% объема продаж, определить индекс безопасности и удаленность объема продаж от точки безубыточности.

Решение.

Оборотный рычаг

$$L = \frac{900 \cdot (1 - 0,35)}{900 \cdot (1 - 0,35) - 350} = 2,49.$$

Индекс безопасности

$$I_б = \frac{1}{2,49} = 0,4.$$

Удаленность объема продаж от точки безубыточности

$$\frac{D}{P_0} = \frac{2,49}{2,49 - 1} = 1,67. \quad \square$$

18.8.2. ФИНАНСОВЫЙ РЫЧАГ В ФИНАНСОВОЙ ПОЛИТИКЕ

Финансовый рычаг показывает, на сколько процентов изменится чистый доход, когда объем дохода до уплаты налогов и процентов изменится на 1%.

Чистый доход вычисляется по формуле

$$N = (E - rB) \cdot (1 - g),$$

где N — чистый доход; E — доход до уплаты налогов и процентов; r — кредитная процентная ставка; B — объем кредитов; g — ставка налога на доход до уплаты налогов и процентов.

Финансовый рычаг — это отношение процентного чистого дохода к процентному изменению дохода до уплаты налогов и процентов:

$$M = \frac{\delta N/N}{\delta E/E}.$$

Так как $\delta N = \delta E \cdot (1-g)$ при условии $\delta B = \delta r = 0$, то

$$M = \frac{\delta E(1-g)/(E-rB)(1-g)}{\delta E/E} = \frac{E(1-g)}{(E-rB)(1-g)} = \frac{E}{E-rB}.$$

■ **Пример 18.6.** При объеме продаж 3 млн руб., постоянных издержках 1 млн руб. и переменных издержках, составляющих 40% объема продаж, найти финансовый рычаг при условии, что проценты по кредиту 3,5 млн руб. выплачиваются по ставке 15% (25%) годовых.

Решение.

Доход до уплаты налогов и процентов составит

$$E = D - P_{пост} - P_{пер} = 3 - 1 - 0,4 \cdot 3 = 0,8 \text{ млн руб.}$$

Финансовый рычаг находим по формуле

$$M_1 = \frac{E}{E-rB} = \frac{800\ 000}{800\ 000 - 0,15 \cdot 3\ 500\ 000} = 2,91;$$

$$M_2 = \frac{E}{E-rB} = \frac{800\ 000}{800\ 000 - 0,25 \cdot 3\ 500\ 000} = -10,67.$$

В первом варианте при росте или падении дохода до уплаты налогов и процентов на 1% чистый доход возрастет или упадет на 2,91%. Во втором варианте финансовый рычаг имеет отрицательное значение. Это означает превышение процентов по кредитам над доходом до уплаты налогов и процентов. □

Устойчивость дохода до уплаты процентов и налогов по отношению к выплачиваемым процентам по кредитам, обозначаемая как дробь E/rB, находят следующим образом. Перепишем формулу для финансового рычага в виде

$$M = \frac{E/rB}{E/rB - 1}.$$

Решая это уравнение относительно E/rB, получим

$$\frac{E}{rB} = \frac{M}{M-1}.$$

■ **Пример 18.7.** При объеме продаж 900 тыс. руб., постоянных издержках 350 тыс. руб. и переменных издержках, составляющих 35% объема продаж, определить устойчивость дохода до уплаты процентов и налогов по отношению к выплачиваемым процентам по кредиту в 1 млн руб. при кредитной ставке 15% годовых.

Решение.

Доход до уплаты процентов и налогов

$$E = D - P_{\text{пост}} - P_{\text{пер}} = 900 - 350 - 0,35 \cdot 900 = 235 \text{ тыс. руб.}$$

Финансовый рычаг определим по формуле

$$M = \frac{E}{E - rB} = \frac{235}{235 - 0,15 \cdot 1000} = 2,76.$$

Устойчивость дохода до уплаты процентов и налогов по отношению к выплачиваемым процентам по кредиту:

$$\frac{E}{rB} = \frac{2,76}{2,76 - 1} = 1,57. \quad \square$$

18.8.3. КОМБИНИРОВАННЫЙ РЫЧАГ В ФИНАНСОВОЙ ПОЛИТИКЕ

В совокупности оборотный и финансовый рычаги составляют ***комбинированный рычаг***, который показывает, как изменится чистый доход в зависимости от относительного изменения объема продаж.

Комбинированный рычаг Q находят как произведение оборотного и финансового рычагов:

$$Q = L \cdot M.$$

Комбинированный рычаг показывает, на сколько процентов изменится чистый доход, когда объем продаж изменится на 1%. Подставив в формулу для комбинированного рычага соотношения для оборотного и финансового рычагов, получим

$$Q = L \cdot M = \frac{D(1-c)}{E} \cdot \frac{E}{E - rB} = \frac{D(1-c)}{E - rB}.$$

■ **Пример 18.8.** При объеме продаж 3 млн руб., постоянных издержках 1 млн руб. и переменных издержках, составляющих 40% объема продаж, а также при условии, что проценты по кредиту 3,5 млн руб. выплачиваются по ставке 15% годовых, найти комбинированный рычаг.

Решение.

Определим комбинированный рычаг двумя способами:

$$Q = \frac{D(1-c)}{E - rB} = \frac{3(1 - 0,4)}{0,8 - 0,15 \cdot 3,5} = 6,55;$$

$$Q = L \cdot M = 2,25 \cdot 2,91 = 6,55.$$

Таким образом, при росте или падении объема продаж на 1% чистый доход возрастет или упадет на 6,55%. $\square$

Схема рычагов, в которой в обобщенном виде представлены полученные результаты, показана на рис. 18.4.

<table>
<tr><td>Объем продаж D</td><td rowspan="2">Оборотный рычаг показывает, на сколько процентов изменится доход до уплаты налогов и процентов, когда объем продаж изменится на 1%:
$L = \dfrac{D(1-c)}{D(1-c) - P_{\text{пост}}}$</td><td rowspan="3">Комбинированный рычаг показывает, на сколько процентов изменится чистый доход, когда объем продаж изменится на 1%:
$Q = L \cdot M = \dfrac{D(1-c)}{E - rB}$</td></tr>
<tr><td>Доход до уплаты налогов и процентов:
$E = D - P_{\text{пост}} - P_{\text{пер}}$</td></tr>
<tr><td>Чистый доход:
$N = (E - rB) \cdot (1-g)$</td><td>Финансовый рычаг показывает, на сколько процентов изменится чистый доход, когда объем дохода до уплаты налогов и процентов изменится на 1%:
$M = \dfrac{E}{E - rB}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">О б о з н а ч е н и я:
$P_{\text{пост}}$ — постоянные издержки; $P_{\text{пер}}$ — переменные издержки; $c = \dfrac{P_{\text{пер}}}{D} = \text{const}$;
B — объем кредитов, r — кредитная процентная ставка; g — ставка налога на доход до уплаты налогов и процентов</td></tr>
</table>

Рис.18.4. Схема рычагов

18.9. Метод экспертных оценок

Метод экспертных оценок рисков предполагает разработку анкеты с вопросами для экспертов, опрос экспертов и обработку полученных материалов.

При использовании метода экспертных оценок определяют степень риска проекта в виде вероятности для различных типов рисковых инвестиций. Результаты оценки рисков экспертным методом по отдельным инвестиционным проектам позволяют количественно оценить их уровни. При этом могут быть использованы следующие т и п ы и н в е с т и ц и й:

1. *С уровнем допустимого риска*, при котором имеет место возможность потери всей суммы чистой прибыли по рассматриваемому проекту.

2. *С уровнем критического риска*, при котором имеет место возможность потери всей суммы валовой прибыли.

3. *С уровнем катастрофического риска*, при котором имеет место возможность потери всех активов инвестора, вложенных в проект, в результате банкротства.

Предельными значениями вероятности риска по оценке экспертов являются:

для инвестиций с уровнем допустимого риска — 0,1;
для инвестиций с уровнем критического риска — 0,01;
для инвестиций с уровнем катастрофического риска — 0,001.

Инвестор, воспользовавшись этими пороговыми ограничениями, только в том случае примет решение об инвестициях в проект, если вероятности рисков по оценкам экспертов будут меньше пороговых.

Упражнения

ТЕСТ 18.1

Выберите правильный вариант ответа.

1. В каких проектах не нужно учитывать риск?
A. С неопределенностью условий реализации проекта.
B. С неполнотой информации об условиях реализации проекта.
C. Со случайными плановыми показателями.
D. С детерминированными плановыми показателями.

2. К какой группе относится риск понесения убытков вследствие изменения государственной политики?
A. Инвестиционный риск.
B. Рыночный риск.
C. Политический риск.
D. Финансовый риск.

ТЕСТ 18.2

Внимательно посмотрите на приведенные высказывания. Подумайте, какие из них относятся только к инновационным проектам.

1. Риск информационной неадекватности.
2. Риск оригинальности.
3. Неполнота или неточность проектной документации.
4. Риск финансовой неадекватности.
5. Стихийные бедствия.
6. Политический риск.
7. Риск неуправляемости проектом.
8. Риск юридической неадекватности.
9. Экономический риск.
10. Риск технологической неадекватности.

ТЕСТ 18.3

Внимательно посмотрите на приведенные высказывания. Подумайте, какие из них относятся к проектам, пригодным для дальнейшего рассмотрения.

1. Уровень катастрофического риска проекта равен 0,002.

2. Уровень допустимого риска проекта равен 0,015.

3. Уровень катастрофического риска проекта равен 0,00087.

4. Уровень критического риска проекта равен 0,0099.

5. Уровень допустимого риска проекта равен 0,0015.

6. Уровень критического риска проекта равен 0,0099.

ЗАДАЧИ

18.1. Функции спроса и предложения имеют вид

$$q = \frac{1}{p^{0,5}}; \quad s = p^{0,4},$$

где q — количество покупаемого товара; s — количество предлагаемого на продажу товара; $p > 0$ — цена товара.

Определить равновесную цену, эластичность спроса и предложения по этой цене, изменение дохода при изменении цены на $\pm 3\%$.

18.2. Чистый приведенный доход инвестиционного проекта для базового сценария при цене реализации единицы продукции 12,5 руб./шт. равен 38,72 млн руб. При изменении цены единицы продукции до 13,1 руб./шт. чистый приведенный доход составит 42,1 млн руб. Определить эластичность чистого приведенного дохода по цене реализации.

18.3. Пусть объем продаж равен 12 млн руб., постоянные издержки — 3,5 млн руб., а переменные издержки составляют 32% объема продаж. Определить индекс безопасности и удаленность объема продаж от точки безубыточности, устойчивость дохода до уплаты процентов и налогов по отношению к выплачиваемым процентам по кредиту в 10 млн руб. при кредитной ставке 14% годовых, а также комбинированный рычаг.

Глава 19 ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

19.1. Статистика и ее задачи

Статистика как раздел науки об управлении государством, сборе, классификации и обсуждении сведений о состоянии общества и государства зародилась в XVII в. Однако статистический учет существовал в глубокой древности. Так, за 5 тыс. лет до новой эры проводились переписи населения в Китае, велся учет имущества граждан в Древнем Риме и т.д.

В современном понимании ***статистика*** — это регистрация, описание и анализ экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений.

Важнейшей задачей статистики является определение закона распределения случайной величины (системы случайных величин) по статистическим данным. Закономерности, наблюдаемые в случайных массовых явлениях, проявляются тем точнее, чем больше объем статистической информации. На практике, как правило, мы имеем ограниченное количество экспериментальных данных. Поэтому при определении закона распределения возникает необходимость расчета уровня доверия к нему. Отсюда следует задача проверки правдоподобия гипотез, предполагающая выявление в статистических закономерностях элементов случайности. В частности, может быть проверена гипотеза о том, что данная случайная величина подчиняется заданному закону распределения.

Часто при обработке статистических данных возникает задача определения параметров закона распределения, а не самого закона.

19.2. Генеральная совокупность и выборки

Генеральной совокупностью называются все возможные наблюдения интересующего нас показателя, все исходы испытания или вся совокупность реализаций случайной величины X. Примером генеральной совокупности может быть все население страны. Такая совокупность иногда изучается путем переписи населения. В этой совокупности нас могут интересовать, например, доходы жителей. Это количественный признак совокупности. Другим примером генеральной совокупности являются все изготовленные на данном станке детали. Эти детали могут быть бракованными и годными. Этот признак деталей является качественным.

Выборкой называется выбор части объектов из генеральной совокупности, причем выбор отдельных объектов происходит независимо один от другого. Примером выборки объемом n может являться независимый выбор из всех изготовленных на данном станке деталей в количестве n штук. Результатом выборки объемом n является совокупность $x_1, x_2, ..., x_n$ значений признака.

Обычно под *целью математической статистики* понимают определение закона распределения или его характеристик по выборке.

19.3. Гистограмма и статистическая функция распределения

Предположим, что изучается некоторая величина X. Пусть закон распределения X нам не известен. Требуется определить этот закон из опыта. С этой целью над случайной величиной X производится ряд независимых наблюдений. В результате получим выборку $x_1, x_2, ..., x_n$ из генеральной совокупности с признаком X.

При большом числе наблюдений простая выборка становится слишком громоздкой и неудобной для анализа. Для придания ей большей наглядности строится статистический ряд. Для этого разделим весь диапазон полученных в результате опыта значений на интервалы и подсчитаем количество значений m_j, приходящихся на каждый *j*-й интервал. Найдем частоту попадания случайной величины в *j*-й интервал по формуле

$$p_j = \frac{m_j}{n}. \quad \textbf{(19.1)}$$

Эта величина называется также статистикой. Вообще говоря, *статистика* — это любое число, вычисленное по выборке.

Занесем полученные данные в табл. 19.1, в которой интервалы расположены в порядке их возрастания вдоль оси абсцисс.

Таблица 19.1

J_j	$x_1 \div x_2$	$x_2 \div x_3$	...	$x_j \div x_{j+1}$	...	$x_k \div x_{k+1}$
p_j	p_1	p_2	...	p_j	...	p_k

Здесь J_j — интервал вдоль оси абсцисс под номером j; k — число интервалов; x_j, x_{j+1} — границы интервалов под номерами j и $j+1$; $k+1$ — число границ.

Статистический ряд, представленный в табл. 19.1, называется *интервальным.* Если частота задана для случайной дискретной величины, то ряд называется *дискретным.*

Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{k} p_j = 1.$$

■ **Пример 19.1.** Произведено 500 измерений цены продукта. После предварительной обработки выборки, представляющей собой отношение цены продукта к номинальной цене этого продукта (в процентах), результаты сведены в табл. 19.2 (две верхние строки).

Определить частоты попадания ошибки в заданные интервалы.

Решение.

Результаты расчета по формуле **(19.1)** представлены в последней строке табл. 19.2.

Таблица 19.2

J_j, %	$-40 \div -30$	$-30 \div -20$	$-20 \div -10$	$-10 \div 0$	$0 \div 10$	$10 \div 20$	$20 \div 30$	$30 \div 40$
m_j	6	25	72	133	120	88	46	10
p_j	0,012	0,05	0,144	0,266	0,24	0,176	0,092	0,02

□

Если экспериментальные значения случайной величины X находятся в точности на границе двух интервалов, то чисто условно можно рекомендовать половину этих значений прибавить к предыдущему интервалу, а другую половину — к последующему. Можно также граничные значения целиком отнести как к предыдущему интервалу, так и к последующему.

Статистический ряд можно представить в виде графика, называемого *гистограммой.* При этом по оси абсцисс откладываются интервалы, и на каждом из этих интервалов строится прямоугольник, площадь которого равна частоте данного интервала. При увеличении числа опытов можно выбирать все более и более мелкие интервалы. При этом гистограмма приближается к некоторой кривой, являющейся плотностью распределения величины X. Функция плотности распределения становится непрерывной, если количество опытов стремится к бесконечности, а интервалы — к нулю.

■ **Пример 19.2.** Построить гистограмму для данных примера 19.1.

Решение.

Гистограмма представлена на рис. 19.1.

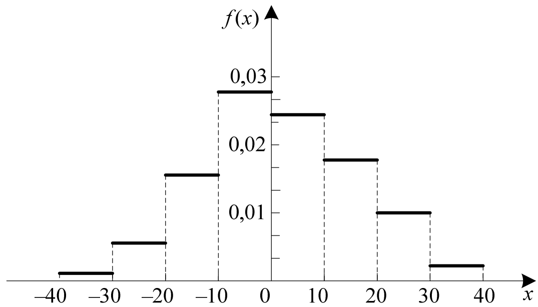


Рис. 19.1. Гистограмма □

По статистическому ряду можно приближенно построить статистическую (выборочную) функцию распределения случайной величины X. Соотношения для расчета выборочной функции распределения по статистическому ряду удобно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&F(x \le x_1) = 0;\\
&F(x_1 < x \le x_2) = p_1;\\
&F(x_2 < x \le x_3) = p_1 + p_2;\\
&\qquad\qquad \ldots\\
&F(x_{k-1} < x \le x_k) = \sum_{j=1}^{k-1} p_j;\\
&F(x_k < x \le x_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k} p_j = 1;\\
&F(x_{k+1} < x) = 1.
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(19.2)}
$$

■ **Пример 19.3.** Для условий примера 19.1 построить таблицу и график статистической функции распределения.

Решение.

Статистическая функция распределения, рассчитанная по формулам **(19.2)**, представлена в табл. 19.3. График этой функции показан на рис. 19.2.

Таблица 19.3

J_j	$-40\div-30$	$-30\div-20$	$-20\div-10$	$-10\div0$	$0\div10$	$10\div20$	$20\div30$	$30\div40$
$F(x)$	0,012	0,062	0,206	0,472	0,712	0,888	0,98	1,0

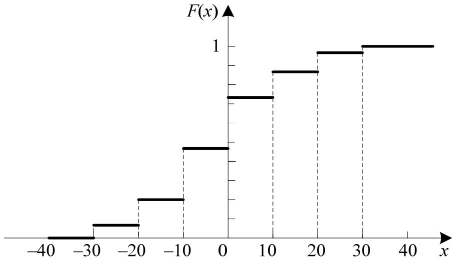


Рис. 19.2. Функция распределения □

При увеличении числа опытов и уменьшении интервала статистическая функция распределения становится все ближе к функции распределения генеральной совокупности. Функция распределения также становится непрерывной, если количество опытов стремится к бесконечности, а интервалы — к нулю.

19.4. Свойства функции распределения

При помощи функции распределения можно указать вероятность того, что как дискретная, так и непрерывная случайная величина попадут в заданный полуоткрытый промежуток:

$$a \le X < b.$$

Эта вероятность равна приращению функции распределения на этом промежутке, т.е.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \qquad \textbf{(19.3)}$$

Пусть имеется непрерывная величина X с непрерывной и дифференцируемой функцией распределения $F(x)$. Вероятность попадания этой величины в промежуток от x до $x+\Delta x$ равна

$$P(x < X < x) = F(x+\Delta x) - F(x).$$

Рассмотрим предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x). \qquad \textbf{(19.4)}$$

Функция $f(x) = F'(x)$ называется *плотностью распределения непрерывной случайной величины* X.

При заданной плотности распределения вероятность того, что случайная величина попадет в заданный промежуток $a \le X < b$ (рис. 19.3), есть

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \textbf{(19.5)}$$

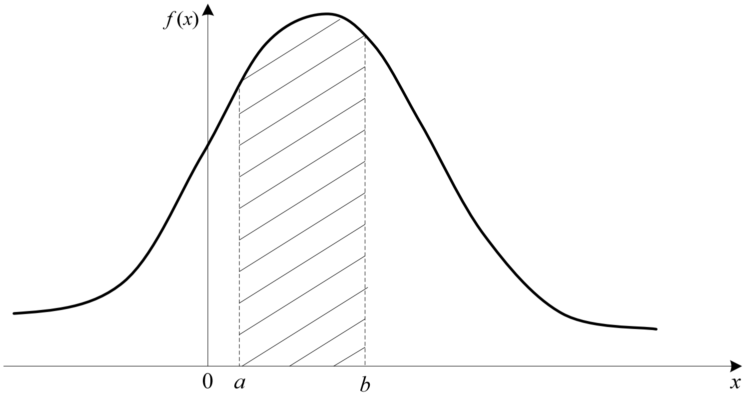


Рис. 19.3. Плотность распределения непрерывной случайной величины

Функция распределения выражается через плотность распределения по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \qquad \textbf{(19.6)}$$

Основные свойства плотности распределения:

1) плотность распределения есть неотрицательная функция

$$f(x) \ge 0;$$

2) интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

19.5. Моменты распределения случайной величины

На практике применяются начальные и центральные моменты.

Начальным моментом порядка s дискретной и непрерывной случайных величин называются соответственно соотношения вида

$$\alpha_s[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i; \qquad \textbf{(19.7)}$$

$$\alpha_s[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)\,dx. \qquad \textbf{(19.8)}$$

Первый начальный момент называется *математическим ожиданием*. Математическое ожидание будем обозначать символами $M[X]$ или m_x:

$$M[X] = \alpha_1[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i; \qquad \textbf{(19.9)}$$

$$M[X] = \alpha_1[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx. \qquad \textbf{(19.10)}$$

Пользуясь знаком математического ожидания, формулы **(19.7)** и **(19.8)** можно объединить в одну:

$$\alpha_s[X] = M\left[X^s\right]. \qquad \textbf{(19.11)}$$

Действительно, формулы **(19.10)** и **(19.11)** по структуре полностью аналогичны формулам **(19.7)** и **(19.8)** с той разницей, что в них вместо x_i и x стоят соответственно x_i^s и x^s. Таким образом, *начальным моментом порядка* s случайной величины X называется математическое ожидание степени s этой случайной величины.

Центральной случайной величиной, соответствующей величине X, называется отклонение случайной величины X от ее математического ожидания:

$$\dot{X} = X - m_x.$$

Центральным моментом порядка s случайной величины X называется математическое ожидание степени s соответствующей центральной случайной величины:

$$\mu_s\left[\dot{X}\right] = M\left[\dot{X}^s\right] = M\left[\left(X - m_x\right)^s\right]. \qquad \textbf{(19.12)}$$

Второй центральный момент называется *дисперсией случайной величины* и обозначается $D\left[\dot{X}\right]$:

$$D\left[\dot{X}\right] = \mu_2\left(\dot{X}\right) = M\left[\left(X - m_x\right)^2\right]. \qquad \textbf{(19.13)}$$

Для непосредственного вычисления дисперсий дискретной и непрерывной случайных величин могут быть использованы формулы

$$D\left[\dot{X}\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_x\right)^2 p_i; \qquad \textbf{(19.14)}$$

$$D\left[\dot{X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_x\right)^2 f(x)\,dx. \qquad \textbf{(19.15)}$$

Дисперсия (*второй центральный момент*) может быть выражена через второй начальный момент и математическое ожидание. Действительно,

$$D\left[\dot{X}\right]=M\left[\dot{X}^2\right]=M\left[\left(X-m_x\right)^2\right]=M\left[X^2\right]-2m_xM\left[X\right]+m_x^2=$$

$$=M\left[X^2\right]-m_x^2=\alpha_2-m_x^2.$$

Дисперсия случайной величины характеризует рассеивание значений случайной величины около ее математического ожидания.

Квадратный корень из дисперсии называется *средним квадратичным отклонением* случайной величины:

$$\sigma\left[\dot{X}\right]=\sqrt{D\left[\dot{X}\right]}. \qquad \textbf{(19.16)}$$

Третий центральный момент служит для характеристики асимметрии плотности распределения. Если плотность распределения симметрична относительно математического ожидания, то все центральные моменты нечетного порядка равны нулю.

Моментами распределения широко пользуются тогда, когда закон распределения случайной величины неизвестен.

19.6. Числовые характеристики выборочного распределения

Каждой числовой характеристике (моменту) случайной величины X соответствует ее выборочная аналогия. Для математического ожидания этой случайной величины в качестве аналогии используют среднее арифметическое полученных в результате опыта значений, вычисляемое по формуле

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ , \qquad \textbf{(19.17)}$$

где x_i — значение случайной величины, зарегистрированное в i-м опыте; n — число опытов.

При неограниченном увеличении числа опытов среднее арифметическое сходится к математическому ожиданию.

Выборочные дисперсии рассчитываются по одной из следующих формул:

$$s^2=M\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2; \qquad \textbf{(19.18)}$$

$$S^2=\frac{n}{n-1}s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2. \qquad \textbf{(19.19)}$$

Величину s называют *выборочным стандартным отклонением*, а величину S — *выборочным средним квадратичным отклонением.*

Если выборка задана в виде статистического ряда, то формулы **(19.17)**, **(19.18)**, **(19.19)** удобно представить в виде

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{k} \overline{x}_j p_j; \qquad \textbf{(19.20)}$$

$$s^2 = \sum_{j=1}^{k} \left(\overline{x}_j - \overline{x}\right)^2 p_j; \qquad \textbf{(19.21)}$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{j=1}^{k} \left(\overline{x}_j - \overline{x}\right)^2 p_j, \qquad \textbf{(19.22)}$$

где $\overline{x}_j = \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}$ — среднее значение случайной величины X в j-м интервале; p_j — частота попадания случайной величины в j-й интервал; k — число интервалов.

Для дискретного статистического ряда значения x_j, p_j и k относятся к соответствующему значению случайной величины, полученному в результате опыта.

Иногда используются моменты выборки более высокого порядка.

■ **Пример 19.4.** Для условий примера 19.1 определить выборочные среднюю и дисперсию.

Решение.

В табл. 19.2 для частот попадания ошибки в заданные интервалы вместо интервалов J_j введем среднее значение $\overline{x}_j$ случайной величины X в j-м интервале. Результаты представим в табл. 19.4.

Таблица 19.4

$\overline{x}_j$	−35	−25	−15	−5	5	15	25	35
p_j	0,012	0,05	0,144	0,266	0,24	0,176	0,092	0,02

Для расчета выборочных среднего и дисперсии используем формулы **(19.20)** и **(19.21)**:

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{k} \overline{x}_j p_j = -35 \cdot 0,012 - 25 \cdot 0,05 - 15 \cdot 0,144 - 5 \cdot 0,266 +$$

$$+ 5 \cdot 0,24 + 15 \cdot 0,176 + 25 \cdot 0,092 + 35 \cdot 0,02 = 1,68;$$

$$s^2 = \sum_{j=1}^{k} \left(\overline{x}_j - \overline{x}\right)^2 p_j = \left(-35 - 1,68\right)^2 \cdot 0,012 + \left(-25 - 1,68\right)^2 \cdot 0,05 +$$

$$+ \left(-15 - 1,68\right)^2 \cdot 0,144 + \left(-5 - 1,68\right)^2 \cdot 0,266 + \left(5 - 1,68\right)^2 \cdot 0,24 +$$

$$+ \left(15 - 1,68\right)^2 \cdot 0,176 + \left(25 - 1,68\right)^2 \cdot 0,092 + \left(35 - 1,68\right)^2 \cdot 0,02 = 209,7776;$$

$s = 14,48.$ □

19.7. Основные статистические распределения

Статистические распределения не только играют роль эталона при определении закона распределения случайной величины, но и используются для оценки правдоподобия выдвигаемых гипотез. В статистике часто используются закон равномерной плотности, закон треугольной плотности, закон Пуассона, нормальный закон распределения. Большое значение в статистике играют также χ^2-распределение и t-распределение Стьюдента.

19.7.1. ЗАКОН РАВНОМЕРНОЙ ПЛОТНОСТИ

Случайная величина называется *равномерно распределенной на промежутке* $[a, b]$, если ее плотность вероятности на этом промежутке постоянна, а вне промежутка равна нулю (рис. 19.4).

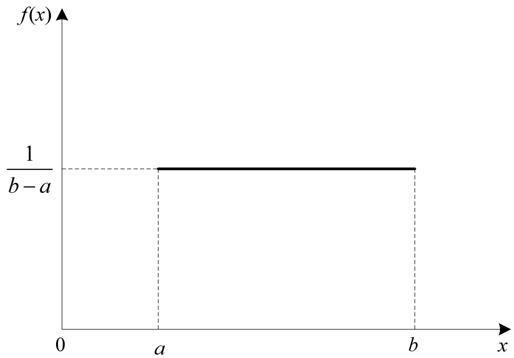


Рис. 19.4. Равномерная плотность распределения

Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = f \int\limits_{a}^{b} dx = f \cdot x\Big|_a^b = f \cdot (b - a) = 1,$ то

$$f = \frac{1}{b - a}.$$

Математическое ожидание определяется по формуле **(19.10)**:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_a^b \frac{x\,dx}{b-a} = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Дисперсию находим по формуле **(19.15)**:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 f(x)\,dx = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{dx}{b-a} =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left.\left(\frac{x^3}{3} - (b+a)\frac{x^2}{2} + \frac{(b+a)^2}{4}x\right)\right|_a^b =$$

$$= \frac{(b-a)\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(b-a)} - \frac{(b+a)\left(b^2-a^2\right)}{2(b-a)} + \frac{(b+a)^2}{4} =$$

$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3b^2-6ab+3a^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Среднее квадратичное отклонение определяется соотношением **(19.16)**:

$$\sigma = \sqrt{D} = \frac{a-b}{3\sqrt{2}}. \qquad \textbf{(19.23)}$$

■ **Пример 19.5.** Пусть случайная величина распределена равномерно на интервале $[0,\ 2]$.

Определить значение функции $f(x)$ на этом интервале и вероятность попадания случайной величины в интервал $[1;\ 1{,}5]$, а также математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение этого распределения.

Решение.

Плотность вероятности на исследуемом интервале

$$f(x) = \frac{1}{2-0} = 0{,}5.$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал $[1;\ 1{,}5]$

$$P(1 \le X < 1{,}5) = \int_1^{1{,}5} 0{,}5\,dx = 0{,}5x\Big|_1^{1{,}5} = 0{,}5(1{,}5-1) = 0{,}25.$$

Математическое ожидание

$$m_x = \frac{b-a}{2} = \frac{2-0}{2} = 1.$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma = \frac{a-b}{3\sqrt{2}} = \frac{2-0}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,47. \quad \square$$

19.7.2. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Наиболее часто встречающийся на практике закон — нормальный закон распределения, или закон Гаусса, характеризуется плотностью распределения вида

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \qquad \textbf{(19.24)}$$

Вычислим основные характеристики случайной величины, подчиняющейся нормальному закону распределения.

Математическое ожидание

$$M[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Введем замену

$$t = \frac{x-m}{\sigma}; \quad dx = \sigma\, dt. \qquad \textbf{(19.25)}$$

Тогда

$$M[X] = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2}\sigma t + m\right)^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Известно, что первый интеграл равен нулю, а второй, называемый *интегралом Эйлера—Пуассона*,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \qquad \textbf{(19.26)}$$

Таким образом,

$$M[X] = m.$$

Дисперсия

$$D[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Используя замену **(19.25)**, получим

$$D[X] = \frac{\sqrt{2}\sigma \cdot 2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

Интегрируя по частям, найдем

$$D[X]=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} td\left(-e^{-t^2}\right)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(-te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right).$$

Первое слагаемое в скобках равно нулю, а второе — $\sqrt{\pi}$ (см. **(19.26)**). Отсюда

$$D[X]=\sigma^2.$$

Таким образом, входящие в нормальный закон распределения постоянные являются математическим ожиданием, дисперсией и средним квадратичным отклонением. Размерности математического ожидания и среднего квадратичного отклонения совпадают с размерностью случайной величины X.

Кривая распределения по нормальному закону имеет симметричный холмообразный вид (рис. 19.5).

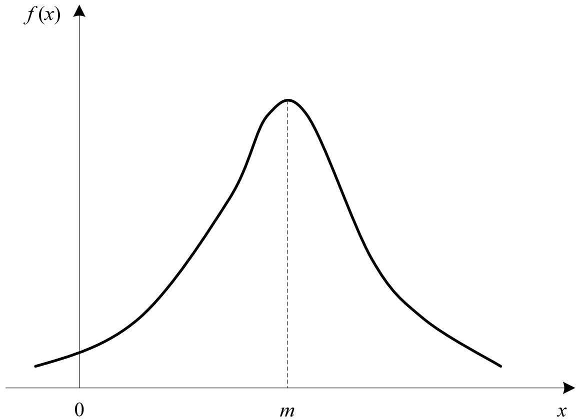


Рис. 19.5. Плотность распределения нормального закона

Функция распределения нормального закона определяется соотношением:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Введем замену $t=\dfrac{x-m}{\sigma}$; $dx=\sigma\, dt$. Тогда

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-t^2/2}dt\,. \qquad \textbf{(19.27)}$$

Интеграл **(19.27)** не выражается через элементарные функции и называется *функцией нормального распределения.* Функция $F(x)$ табулирована. Иногда эту функцию представляют в виде

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x-m}{\sigma}} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt\,. \qquad \textbf{(19.28)}$$

Функция $\Phi(x)$ называется *интегралом вероятности.*

Решим следующую задачу. От точки $x = m$ отложим отрезки длиной σ (рис. 19.6).

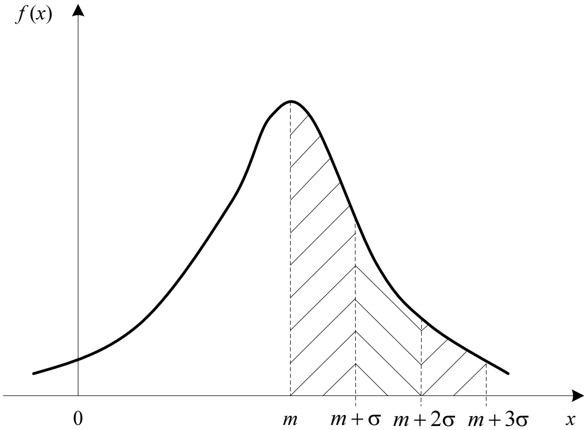


Рис. 19.6. Пояснение «правила трех сигм»

Вычислим вероятность попадания случайной величины в интервале $m < X < m + \sigma$; $m < X < m + 2\sigma$; $m < X < m + 3\sigma$. Искомая вероятность находится по формуле **(19.28)** при равенстве верхнего предела соответственно 1, 2 и 3. Используя таблицу для интеграла вероятностей, находим

$$P(m < X < m + \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2/2} dt = 0{,}34134;$$

$$P(m < X < m + 2\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^2 \mathrm{e}^{-t^2/2} dt = 0{,}47725;$$

$$P(m < X < m + 3\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^3 \mathrm{e}^{-t^2/2} dt = 0{,}49865.$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал $m+3\sigma < X < \infty$ равна

$$P\left(m+3\sigma < X < \infty\right) = 0,5 - 0,49865 = 0,00135.$$

Отсюда следует, что для нормального распределения с точностью 2,7% все рассеивание укладывается на участке $m \pm 3\sigma$. Это позволяет, зная среднее квадратичное отклонение и математическое ожидание случайной величины, ориентировочно указать интервал ее возможных значений. Такой способ оценки возможных значений называется «*правилом трех сигм*».

■ **Пример 19.6.** При измерении расстояния возможная ошибка распределена по нормальному закону. Среднее квадратичное отклонение этой случайной величины равно 0,8 см.

Найти вероятность того, что отклонение измеренного значения от истинного не превзойдет по абсолютной величине 1,6 см при следующих условиях:

1) математическое ожидание ошибки равно 1,2 см (систематическая ошибка в сторону завышения);

2) математическое ожидание равно нулю.

Решение.

Закон распределения ошибки запишем в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}0,8} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\cdot 0,8^2}}.$$

1. Для этого случая $m = 1,2$. Тогда искомая вероятность

$$P\left(-1,6 < X < 1,6\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}0,8} \int_{-1,6}^{1,6} e^{-\frac{(x-1,2)^2}{2\cdot 0,8^2}} dx.$$

Пусть $t = \dfrac{x-1,2}{0,8}$; $dx = 0,8dt$. Тогда

$$P\left(-1,6 < X < 1,6\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3,5}^{0,5} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0,5} e^{-t^2/2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-3,5} e^{-t^2/2} dt =$$

$$= F\left(0,5\right) - F\left(-3,5\right).$$

Из таблицы для функции нормального распределения [10, с. 754] находим

$$F\left(0,5\right) = 0,69146; \; F\left(-3,5\right) = 0,00023.$$

Тогда

$$P\left(-1,6 < X < 1,6\right) = 0,69123.$$

2. При $m = 0$ искомая вероятность

$$P(-1{,}6 < X < 1{,}6) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}0{,}8} \int_{-1{,}6}^{1{,}6} e^{-\frac{x^2}{2\cdot 0{,}8^2}} dx.$$

Введем замену $t = \frac{x}{0{,}8}$; $dx = 0{,}8dt$. Отсюда

$$P(-1{,}6 < X < 1{,}6) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{2} e^{-t^2/2} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{2} e^{-t^2/2} dt = 2 \cdot 0{,}47725 = 0{,}9545. \quad \square$$

19.8. Доверительные интервалы и доверительные пределы

Доверительным интервалом параметра θ распределения случайной величины X с уровнем доверия p, порожденным выборкой $x_1, x_2, ..., x_n$, называется интервал с границами $w_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $w_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые являются реализациями случайных величин $W_1(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $W_2(X_1, X_2, ..., X_n)$, таких, что $P(w_1 \le \theta \le w_2) = p$.

Граничные точки доверительного интервала называются ***доверительными пределами***.

Вначале рассмотрим доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при известном значении дисперсии.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — реализация случайной величины X, распределенной нормально и имеющей параметры a и σ. Дисперсия σ^2 известна. По выборке нужно определить математическое ожидание a. В качестве математического ожидания обычно принимают среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Среднее арифметическое $\bar{x}$, являющееся реализацией случайной величины X, также является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами a и $\sigma/\sqrt{n}$, т.е.

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma/\sqrt{n}} e^{-\frac{(\bar{x}-a)^2}{2\sigma^2/n}}.$$

Отсюда можно построить доверительный интервал для заданного уровня доверительной вероятности *F*, в котором находится математическое ожидание *a*. Этот интервал определяется выражением

$$\overline{x} - t \cdot \sigma/\sqrt{n} \le a \le \overline{x} + t \cdot \sigma/\sqrt{n} \, ,$$

где t — коэффициент доверия, от которого зависит доверительная вероятность *F*.

Некоторые значения доверительной вероятности от уровня доверия для нормального закона распределения приведены в табл. 19.5.

Таблица 19.5

t	0,5	1	2	3
F	0,3829	0,6827	0,9545	0,9973

■ **Пример 19.7.** Для изучения размера крестьянских хозяйств проведена выборка, в результате которой получены следующие данные: обследовано 100 участков, $\overline{x} = 10\ \text{га}$. Определить доверительный интервал, в котором с вероятностью 0,9545 находится среднее значение земельных участков при дисперсии $\sigma^2 = 16$.

Решение.

Для требуемой доверительной вероятности из таблиц находим $t = 2$. Тогда $t\sqrt{\sigma^2/n} = 2 \cdot \sqrt{16/100} = 0{,}8$. Отсюда находим доверительный интервал:

$$9{,}2 \le a \le 10{,}8. \quad \square$$

Если дисперсия неизвестна и выборка невелика $(n < 40)$, то доверительный интервал вычисляют с помощью *t*-распределения Стьюдента по формуле

$$\overline{x} - t_\alpha \cdot S/\sqrt{n} \le a \le \overline{x} + t_\alpha \cdot S/\sqrt{n} \, ,$$

где t_α — коэффициент доверия, от которого зависит доверительная вероятность.

При расчете используются таблицы. Необходимо помнить, что в различных источниках таблицы представлены в разной форме.

Интеграл вероятности для *t*-распределения Стьюдента имеет вид

$$p_{t_\alpha}(\nu) = \int_{-\infty}^{t_\alpha} f_\nu(t)\,dt \, ,$$

где $f_\nu(t)$ — функция плотности распределения вероятности Стьюдента с ν степенями свободы.

Графически интеграл вероятности представлен на рис. 19.7.

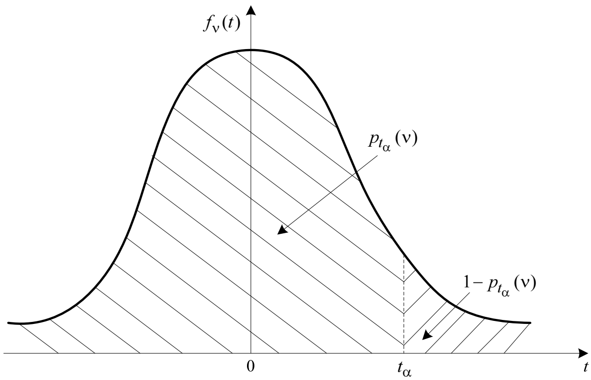


Рис. 19.7. Интеграл вероятности для *t*-распределения Стьюдента

В рассматриваемом случае табулируются значения $p_{t_\alpha}(\nu)$ для различных значений t_α и ν. Графически доверительный интервал можно представить так, как показано на рис. 19.8.

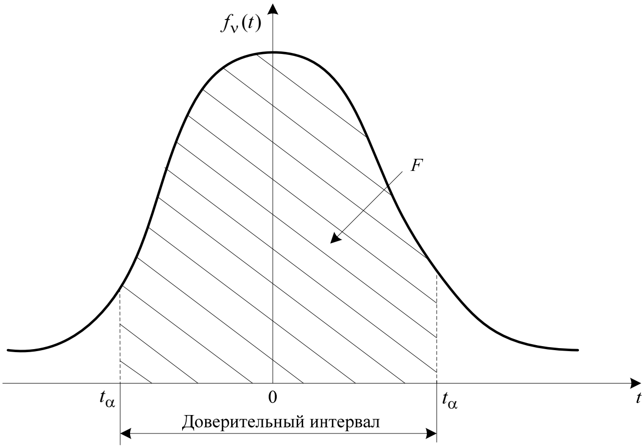


Рис. 19.8. Графическое представление доверительного интервала

Заштрихованная площадь на рис. 19.8 является доверительной вероятностью F.

Таким образом, расчет производится по следующему алгоритму.

1. Находят $\overline{x}$ и S по формулам

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ ; \ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 .$$

2. Задаются доверительной вероятностью F.

3. Рассчитывают $p_{t_\alpha}(\nu)$ по формуле

$$F = 1 - 2\left[1 - p_{t_\alpha}(\nu)\right] = 2p_{t_\alpha}(\nu) - 1.$$

4. При известном количестве степеней свободы $\nu = n - 1$ по таблицам находят t_α.

5. Определяют доверительные пределы по формуле

$$x_{1,2} = \overline{x} \pm t_\alpha S/\sqrt{n}. \qquad \textbf{(19.29)}$$

Иногда таблицы t-распределения Стьюдента представлены в виде критических точек. В этих таблицах для различных значений уровня значимости

$$\alpha = 2\left[1 - p_{t_\alpha}(\nu)\right]$$

и разных значений степеней свободы $\nu = n - 1$ приведены данные для t_α. В этом случае расчет проводится по следующей методике.

1. Находят $\overline{x}$ и S.

2. Задаются уровнем значимости α.

3. Рассчитывают F по формуле

$$F = 1 - \alpha.$$

4. По заданному уровню значимости α и по известному количеству степеней свободы $\nu = n - 1$ по таблицам находят t_α.

5. Определяют доверительные пределы.

■ **Пример 19.8.** Для условий примеров 19.1 и 19.4 определить доверительный интервал математического ожидания для доверительных вероятностей $F_1 = 0,95$ и $F_2 = 0,99$.

Решение.

В примере 19.4 были определены $\overline{x} = 1,68$ и $S = 14,48$.

Уровни значимости для поставленных условий:

$$\alpha_1 = 1 - F_1 = 1 - 0,95 = 0,05;$$

$$\alpha_2 = 1 - F_2 = 1 - 0,99 = 0,01.$$

Значения коэффициентов доверия находим из таблиц (см., например, таблицу в работе [8], с. 626):

$$t_{\alpha,1} = 1,96; \quad t_{\alpha,2} = 2,576.$$

По полученным данным определяем доверительные пределы и интервалы:

1) $F_1 = 0,95$;

$$x_{1,2} = \overline{x} \pm t_\alpha S/\sqrt{n} = 1,68 \pm 1,96 \cdot 14,48/\sqrt{500} = 1,68 \pm 1,27;$$

$$x_1 = 2,95; \quad x_2 = 0,41;$$

$$0,41 \le \overline{x} \le 2,95;$$

2) $F_1 = 0,99;$

$$x_{1,2} = \overline{x} \pm t_\alpha S/\sqrt{n} = 1,68 \pm 2,576 \cdot 14,48/\sqrt{500} = 0,168 \pm 1,67;$$

$$x_1 = 3,35; \quad x_2 = 0,01;$$

$$0,01 \le m \le 3,35. \quad \square$$

19.9. Определение закона распределения случайной величины

Обычно закон распределения случайной величины не известен и имеется ограниченное число наблюдений (выборка). При его определении задаются некоторым известным законом распределения и затем проверяют эту гипотезу на значимость.

Простейшим методом проверки гипотезы о законе распределения является визуальный. Он заключается в построении гистограммы по выборке и анализу ее внешнего вида. Метод не точен. Наиболее полная и точная проверка соответствия выбранного распределения реальному производится с помощью критерия К. Пирсона.

Статистика Пирсона имеет вид

$$\chi^2_{расч} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(nP_j - m_j\right)^2}{nP_j}, \qquad \textbf{(19.30)}$$

где n — количество полученных в результате наблюдения значений случайной величины X (объем выборки); k — число интервалов; P_j — теоретическая вероятность попадания случайной величины в j-й интервал; nP_j — ожидаемое (теоретическое) количество попаданий случайной величины в j-й интервал; m_j — количество попаданий случайной величины в j-й интервал в результате опыта.

Теоретическая вероятность попаданий случайной величины в j-й интервал Δx_j для исследуемой плотности распределения $f(x)$ рассчитывается по формуле

$$P_j = \int_{\Delta x_j} f(x)\, dx.$$

Разделив числитель и знаменатель статистики Пирсона **(19.30)** на n и учитывая соотношение **(19.1)**, получим

$$\chi^2_{\text{расч}} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(P_j - p_j\right)^2}{P_j}. \qquad \textbf{(19.31)}$$

Рассчитывать значение $\chi^2_{\text{расч}}$ можно как по формуле **(19.30)**, так и по формуле **(19.31)**.

Выборочное распределение $\chi^2_{\text{расч}}$ является (приблизительно) χ^2-распределением с числом степеней свободы

$$\nu = k - b - 1, \qquad \textbf{(19.32)}$$

где k — число интервалов; b — число параметров вероятностной модели, которые должны быть оценены по тем же данным.

Отклонение от проверяемой модели всегда будет приводить к увеличению значения $\chi^2_{\text{расч}}$.

Значимость выбранного закона распределения определяется сравнением рассчитанного и табличного (теоретического) значения χ^2_ν с ν степенями свободы. Уровень значимости α показывает вероятность того, что теоретическое значение χ^2_ν превысит расчетное значение $\chi^2_{\text{расч}}$. В виде формулы это можно записать следующим образом:

$$\alpha = P\left(\chi^2_\nu \geq \chi^2_{\text{расч}}\right). \qquad \textbf{(19.33)}$$

Геометрический смысл теоретического значения χ^2_ν поясняется рис. 19.9. По оси абсцисс отложены значения χ^2_ν. Индекс ν означает, что представлен график плотности распределения для функции с ν степенями свободы. Отмеченная на этой оси точка $\chi^2_\nu(\alpha)$ означает, что площадь под кривой плотности распределения на интервале $\left(\chi^2_\nu(\alpha), \infty\right)$ равна уровню значимости α.

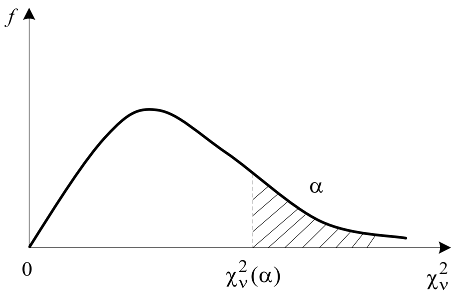


Рис. 19.9. Плотность χ^2-распределения с ν степенями свободы

Таким образом, если $\chi^2_{\text{расч}} \le \chi^2_\nu(\alpha)$ при том же числе степеней свободы и при заданном уровне значимости α, то вероятность соответствия закона распределения исследуемой случайной величины выбранному закону распределения будет больше или равна α.

Если ожидаемые частоты слишком малы для использования χ^2-распределения, то их надо объединить в один более крупный интервал. Значение частот не должно быть меньше 5—10. При объединении необходимо учитывать, что число интервалов не должно быть слишком малым.

■ **Пример 19.9.** Для условий примеров 19.1 и 19.4 определить значимость соответствия закона распределения исследуемой случайной величины нормальному.

Решение.

Используя результаты решения примера 19.4, запишем функцию плотности распределения исследуемой случайной величины в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1,448} e^{-\frac{(x-0,168)^2}{2\cdot 1,448^2}}. \qquad \textbf{(19.34)}$$

Результаты обработки выборки табл. 19.2 (пример 19.1) представлены в первых трех строчках табл. 19.6. Здесь же представлены результаты остальных расчетов.

Таблица 19.6

J_j	$-4\div-3$	$-3\div-2$	$-2\div-1$	$-1\div0$	$0\div1$	$1\div2$	$2\div3$	$3\div4$
m_j	6	25	72	133	120	88	46	10
$\Phi\left(\frac{x_{j+1}-0,168}{1,448}\right)$	0,01426	0,0668	0,209	0,4522	0,7157	0,897	0,9748	0,996
$\Phi\left(\frac{x_j-0,168}{1,448}\right)$	0,00199	0,0143	0,0668	0,209	0,209	0,7157	0,897	0,996
P_i	0,01227	0,053	0,1422	0,2433	0,2634	0,1813	0,0778	0,021
nP_i	6,135	26,275	71,08	121,64	131,71	90,67	38,9	10,55
$\frac{(nP_i-m_i)^2}{nP_i}$	0,003	0,062	0,012	1,062	1,041	0,079	1,296	0,029

Теоретические значения вероятности попадания случайной величины в *j*-й интервал для плотности распределения **(19.34)** рассчитываются по формуле

$$P_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1,448} e^{-\frac{(x-0,168)^2}{2\cdot 1,448^2}} dx = \Phi\left(\frac{x_{j+1}-0,168}{1,448}\right) - \Phi\left(\frac{x_j-0,168}{1,448}\right).$$

Интеграл вероятности

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

находим по таблицам. Его значения записаны в третьей и четвертой строках табл. 19.6. Теоретические значения вероятности попадания случайной величины в j-й интервал представлены в пятой строке этой таблицы. Расчет статистики Пирсона проведем по формуле **(19.30)**, слагаемые которой представлены в последней строке:

$$\chi^2_{расч} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(nP_j - m_j\right)^2}{nP_j} = 3,611.$$

Уровень значимости определяется по формуле $\alpha = P\left(\chi^2_\nu \geq \chi^2_{расч}\right)$ при количестве степеней свободы $\nu = k - b - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$. Уровни значимости в зависимости от заданного значения χ^2_5 находим по таблицам (см., например, работу [8], с. 74). Имеем

$$\chi^2_5 = 3 \text{ при } \alpha = 0,7;$$

$$\chi^2_5 = 4,35 \text{ при } \alpha = 0,5.$$

Принимаем зависимость χ^2_5 от α на интервале 0,5 до 0,7 линейной (рис. 19.10).

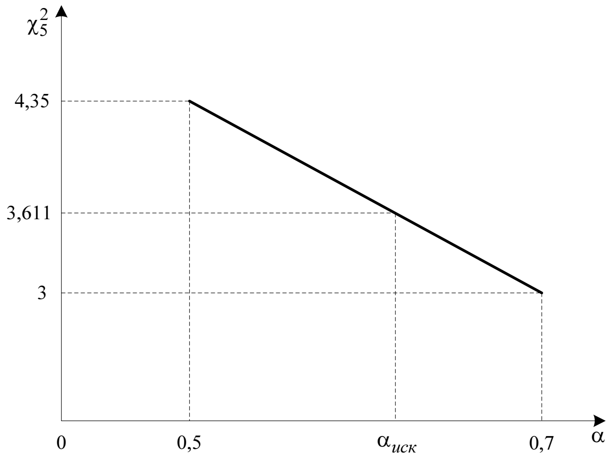


Рис. 19.10. Определение уровня значимости

Из подобия прямоугольных треугольников:

$$\frac{4,35-3}{0,7-0,7} = \frac{3,611-3}{0,7-\alpha_{иск}}.$$

Отсюда определяем уровень значимости

$$\alpha_{\text{иск}} = 0,7 - \frac{0,611 \cdot 0,2}{1,35} = 0,61.$$

Таким образом, гипотеза о том, что случайная величина распределена по нормальному закону с вероятностью 0,61, принимается. □

Упражнения

ТЕСТ 19.1

Площадь, заключенная между функцией распределения случайной величины и осью абсцисс, меньше единицы, равна единице, больше единицы. (*Укажите правильный ответ.*)

ЗАДАЧИ

19.1. При обследовании доходности инвестиций удалось установить, что из 250 проектов только 16 имеют доходность от 20 до 30% годовых. Найти частоту попадания доходности инвестиций в указанный интервал.

19.2. Проведено обследование 12 инвестиционных проектов на доходность инвестиций. Полученная выборка представлена в таблице. Определить среднее значение доходности, выборочное среднее квадратичное отклонение и выборочное стандартное отклонение.

Номер проекта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Доходность	19	23	17	20	27	26	16	19	25	15	29	18

19.3. Для задачи 19.2 найти диапазон изменения доходности инвестиций, используя «правило трех сигм».

19.4. Для условий задачи 19.2 определить доверительный интервал математического ожидания для доверительной вероятности $F_1 = 0,95$.

Глава 20 ЦЕНОВАЯ МОДЕЛЬ КАПИТАЛЬНЫХ АКТИВОВ

20.1. Статистическое описание характеристик проекта

Доходность проекта является одной из основных его характеристик. Доходность, например, может характеризоваться внутренней нормой доходности проекта или доходностью акций. Эти запланированные параметры являются, в общем случае, случайными величинами. Поэтому для их описания используются вероятностные характеристики. К этим характеристикам прежде всего относятся:

- математическое ожидание;
- среднее квадратичное (стандартное) отклонение;
- дисперсия;
- ковариация;
- коэффициент корреляции.

Математическое ожидание (средневыборочное значение) определяет наиболее вероятное значение ожидаемой случайной величины, например доходности. Если все случайные исходные величины технико-экономического обоснования проекта выбраны верно, то они, как правило, являются математическим ожиданием этих величин.

Дисперсия и *среднее квадратичное отклонение* характеризуют разброс случайной величины относительно математического ожидания. Чем больше эти величины, тем больше разброс. Например, средний возраст двух групп учащихся составляет 25 лет. Среднее квадратичное отклонение возраста в первой группе равно 1,2 года, а во второй — 2,8 года. Отсюда следует, что разброс учащихся по возрасту во второй группе больше. Заметим, что дисперсию находят, возводя в квадрат среднее квадратичное отклонение.

Ковариация характеризует связь между двумя случайными величинами. Например, если ковариация между двумя доходностями ценных бумаг является большой положительной величиной, то увеличение доходности одной ценной бумаги, как правило, приведет к увеличению доходности другой. При равенстве ковариации нулю связь между случайными величинами отсутствует. Если ковариация является большой по модулю отрицательной величиной, то увеличение доходности одной ценной бумаги, как правило, приведет к уменьшению доходности другой.

Коэффициент корреляции, так же как и ковариация, характеризует связь между двумя случайными величинами. В отличие от ковариации коэффициент корреляции является нормированной величиной. Его значения лежат в интервале от минус единицы до единицы.

Большое значение при оценке риска проектов принимает его количественная оценка. В качестве меры измерения риска часто используется среднее квадратичное отклонение. Простейшее обоснование этого выбора приводится ниже.

Плотность распределения вероятностей $f(q)$ случайных доходностей q двух инвестиционных проектов показана на рис. 20.1.

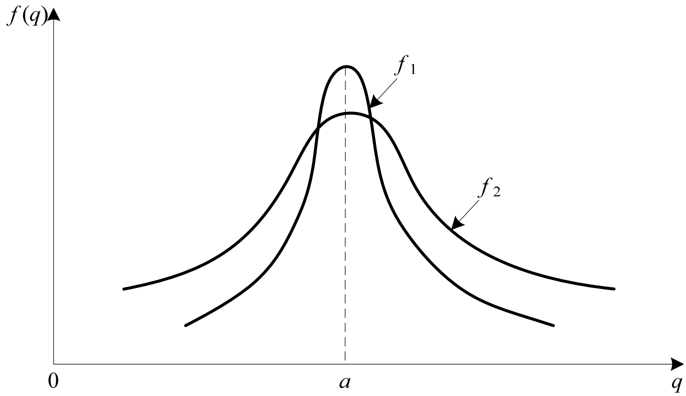


Рис. 20.1. Плотность распределения вероятностей случайных доходностей двух инвестиционных проектов

При одинаковых значениях математического ожидания внутренней нормы доходности проект с распределением f_1 имеет меньшие разбросы вариантов дохода относительно ожидаемого a (см. рис. 20.1). Это связано с тем, что среднее квадратичное отклонение доходности первого проекта σ_1 меньше среднего квадратичного отклонения доходности второго проекта σ_2, т.е. выполняется неравенство $\sigma_1 < \sigma_2$. Поэтому первый проект имеет меньший уровень риска по сравнению со вторым. При $\sigma \to 0$ проект становится безрисковым, так как доходность всегда остается равной математическому ожиданию a. Приведенные рассуждения позволяют сделать вывод о том, что *мерой риска доходности проекта может служить среднее квадратичное отклонение*.

Для описания процесса статистическими характеристиками используют выборку случайной величины x_i, где $i = 1, 2, ..., n$; n — число наблюдений. Довольно часто считают, что случайная величина подчинена нормальному закону. Эта гипотеза может быть проверена путем построения гистограммы и ее анализа. Наиболее полная и точная проверка гипотезы о теоретическом распределении производится с помощью критерия Пирсона (или критерия χ^2).

Подробно статистические методы рассмотрены нами в гл. 19. Здесь приведены основные формулы, используемые при расчетах.

Среднее значение случайной величины вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \quad \textbf{(20.1)}$$

Математическое ожидание a случайной величины с доверительной вероятностью $F = 1 - \alpha$ лежит в доверительном интервале

$$\bar{x} - t_\alpha S / \sqrt{n} \le a \le \bar{x} + t_\alpha S / \sqrt{n}, \quad \textbf{(20.2)}$$

где α — уровень значимости; t_α — коэффициент доверия, определяемый по таблице t-распределения (распределения Стьюдента) по известному α и числу степеней свободы $\nu = n - 1$; выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}. \quad \textbf{(20.3)}$$

Дисперсия σ^2 и среднее квадратичное отклонение σ являются важными показателями оценки уровня инвестиционных рисков. Значение выборочной дисперсии **(20.3)** близко по своей величине дисперсии σ^2. *Доверительные интервалы для дисперсии* и *среднеквадратического отклонения* нормального распределения находятся по формулам

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(n-1)S^2}{c} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{b}; \\ &S\sqrt{\frac{n-1}{c}} \le \sigma \le S\sqrt{\frac{n-1}{b}}. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(20.4)}$$

Коэффициенты b и c определяются по χ^2-распределению следующим образом. Задаются доверительной вероятностью F попадания величины **(20.3)** в доверительный интервал. По таблицам для числа степеней свободы $\nu = n-1$ и $\alpha_c = \frac{1-F}{2}$; $\alpha_b = \frac{1+F}{2}$ находят b и c.

При оценке рисков следует принять во внимание ковариацию двух случайных величин, выборочное значение которой рассчитывается по формуле

$$S_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_i\right)\left(x_j - \overline{x}_j\right). \qquad \mathbf{(20.5)}$$

Если показатели средних ожидаемых доходов различных проектов отличаются между собой, то эти проекты сравнивают при помощи коэффициента вариации

$$v = \frac{\sigma}{a} \approx \frac{S}{\overline{x}}. \qquad \mathbf{(20.6)}$$

В отдельных случаях бывают заданы вероятности i-го наблюдения p_i. В этом случае формулы **(20.1)** и **(20.3)** можно переписать в виде

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad \mathbf{(20.7)}$$

■ **Пример 20.1.** Имеются три проекта с параметрами, приведенными в табл. 20.1. Оценить степень риска по каждому из проектов.

Таблица 20.1

Возможное значение конъюнктуры инвестиционного рынка	*Проект 1*		*Проект 2*		*Проект 3*	
	Расчетный ЧПД x_i	Вероятность p_i	Расчетный ЧПД x_i	Вероятность p_i	Расчетный ЧПД x_i	Вероятность p_i
Высокое	1200	0,25	1600	0,2	2000	0,2
Среднее	1000	0,5	900	0,6	1200	0,7
Низкое	400	0,25	200	0,2	600	0,1

Решение.

Для каждого из проектов найдем ожидаемый доход и среднее квадратичное отклонение по формулам

$\overline{x}_1 = 1200 \cdot 0,25 + 1000 \cdot 0,5 + 400 \cdot 0,25 = 900;$

$\overline{x}_2 = 1600 + 0,2 + 900 \cdot 0,6 + 200 \cdot 0,2 = 900;$

$\overline{x}_3 = 2000 \cdot 0,2 + 1200 \cdot 0,7 + 600 \cdot 0,1 = 1300;$

$$S_1 = \sqrt{(1200-900)^2 \cdot 0,25 + (1000-900)^2 \cdot 0,5 + (400-900)^2 \cdot 0,25} = 300;$$

$$S_2 = \sqrt{(1600-900)^2 \cdot 0,2 + (900-900)^2 \cdot 0,6 + (200-900)^2 \cdot 0,2} = 443;$$

$$S_3 = \sqrt{(2000-1300)^2 \cdot 0,2 + (1200-1300)^2 \cdot 0,7 + (600-1300)^2 \cdot 0,1} = 392.$$

Полученные результаты сведены в табл. 20.2.

Таблица 20.2

Вариант	*Средний ожидаемый доход*	*Среднее квадратичное отклонение*	*Коэффициент вариации*
Проект 1	900	300	0,33
Проект 2	900	443	0,49
Проект 3	1300	392	0,30

Из сравнения параметров проектов *1* и *2* следует, что средний ожидаемый доход по ним одинаков, но более рискованным является проект *2*, так как среднее квадратичное отклонение у него больше, чем у проекта *1*. Поскольку средние ожидаемые доходы у проектов *1* и *3* различны, то сравнивать их следует по коэффициенту вариации. Проект *3* надежнее, так как коэффициент вариации у него меньше. □

Оценка риска проекта для инвестора является важной задачей. От рисковых проектов инвестор потребует более высокий доход. Разность между доходностью конкретного проекта и доходностью безрисковых инвестиций называется *премией за риск*. В качестве безрисковых активов в США считают казначейские векселя (см. табл. 12.4).

Ставка сравнения, используемая при определении качества проекта (см. § 12.4), довольно сильно зависит от риска. Возможные значения ставки сравнения для различных типов инвестиций приведены в табл. 12.5.

20.2. Определение коэффициента бета

Широкое применение при анализе характеристик инвестиционного проекта и ценных бумаг нашел коэффициент бета (β). Этот коэффициент вводится как одна из характеристик портфеля ценных бумаг и используется для оценок риска различных активов.

Оценка эффективности портфеля проводится на основе сравнения характеристик портфеля с характеристиками рынка в целом. Пусть временной интервал, на котором оценивается эффективность портфеля, разбит на T периодов. Например, если временной интервал равен четырем годам, а период — кварталу, то $T = 16$. Средняя доходность портфеля за этот интервал времени вычисляется по формуле

$$\overline{a}_p = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_{p,t}\ , \qquad \textbf{(20.8)}$$

где $t = 1, 2, ..., T$ — номер периода; $a_{p,t}$ — доходность портфеля за период t.

Среднее квадратичное отклонение портфеля определяется выражением:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(a_{p,t} - \overline{a}_p)^2}. \qquad \textbf{(20.9)}$$

Доходность портфеля сравнивается с доходностью аналогов рыночного портфеля, например с индексом S&P500 (фондовый рыночный индекс Standard&Poors 500). S&P500 находится из средневзвешенных курсов акций 500 наиболее крупных компаний США.

Введем следующие о б о з н а ч е н и я:

$a_{p,t}$ — доходность портфеля за период t;

$a_{m,t}$ — доходность аналога рыночного портфеля за период t;

a_t — безрисковая ставка за период t;

$y_t = a_{p,t} - a_t$ — избыточная доходность портфеля за период t;

$x_t = a_{m,t} - a_t$ — избыточная доходность аналога рыночного портфеля за период t.

Полученные в результате анализа точки можно построить в прямоугольной декартовой системе координат, где по оси абсцисс откладываются значения избыточной доходности аналога рыночного портфеля x_t, а по оси ординат — значения избыточной доходности портфеля y_t (рис. 20.2).

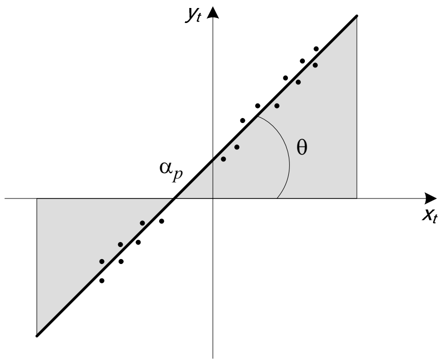


Рис. 20.2. Функция регрессии избыточной доходности портфеля от избыточной доходности аналога рыночного портфеля

Эти две переменные являются случайными величинами. В теории корреляционно-регрессионного анализа две такие переменные можно связать соотношением

$$y_t = f\left(x_t\right) + \varepsilon_x , \qquad \textbf{(20.10)}$$

где $f\left(x_t\right) = \widehat{y}_x$ — детерминированная функция регрессии от x_t; ε_x — возмущение в точке x_t, являющееся случайной величиной.

Обычно считают, что функция регрессии эффективности портфеля является линейной от эффективности рынка, т.е.

$$f\left(x_t\right) = \hat{y}_x = \alpha_p + \beta \cdot x_t\,; \;\; y_t = \alpha_p + \beta \cdot x_t + \varepsilon_x\,, \qquad \textbf{(20.11)}$$

где α_p — координата пересечения функции регрессии с осью y_t;

$\beta = tg\theta$ — бета портфеля (см. рис. 20.2).

Если при $\alpha_p = 0$, а угол $\theta = 45^{\circ}$, то характеристики портфеля в среднем соответствуют рыночным, а $\beta = \mathrm{tg}45^{\circ} = 1$. *Коэффициенты уравнения регрессии* определяются формулами

$$\beta = \frac{\overline{x_t y_t} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x_t^2} - \bar{x}^2}; \qquad \textbf{(20.12)}$$

$$\alpha_p = \bar{y} - \beta \cdot \bar{x}, \qquad \textbf{(20.13)}$$

где

$$\overline{x_t y_t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t y_t; \qquad \textbf{(20.14)}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t; \quad \bar{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t; \qquad \textbf{(20.15)}$$

$$\overline{x_t^2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} {x_t}^2. \qquad \textbf{(20.16)}$$

Часто формулу для бета портфеля записывают в виде

$$\beta = \frac{\sigma_{x,y}}{{\sigma_x}^2}\;, \qquad \textbf{(20.17)}$$

где $\sigma_{x,y}$ — ковариация случайных величин x_t и y_t; ${\sigma_x}^2$ — дисперсия случайной величины x_t.

Действительно, имеем следующие тождества:

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(x_t - \bar{x}\right)\left(y_t - \bar{y}\right) =$$

$$= \frac{T}{T-1}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(x_t y_t - \bar{x}y_t - \bar{y}x_t + \bar{x}\cdot\bar{y}\right) = \frac{T}{T-1}\left(\overline{x_t y_t} - \bar{x}\cdot\bar{y}\right);$$

$${\sigma_x}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(x_t - \bar{x}\right)^2 = \frac{T}{T-1}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left({x_t}^2 - 2x_t\bar{x} + \bar{x}^2\right) = \frac{T}{T-1}\left[\overline{x_t^2} - \bar{x}^2\right].$$

Подставив эти выражения в **(20.12)**, получим **(20.17)**.

Функцию средней доходности портфеля от бета портфеля найдем как среднее значение избыточной доходности портфеля y_t, определяемое вторым уравнением **(20.11)**:

$$\overline{y_t} = \alpha_p + \overline{\beta \cdot x_t + \varepsilon_x} = \alpha_p + \beta \cdot \overline{x_t} + \overline{\varepsilon_x}\ .$$

Здесь $\overline{\varepsilon}_x = 0$, так как коэффициенты регрессии вычисляются методом наименьших квадратов.

С другой стороны, из определения избыточной доходности портфеля и избыточной доходности аналога рыночного портфеля следует

$$\overline{y_t} = \overline{a_{p,t} - a_t} = \overline{a}_p - \overline{a};\ \ \overline{x_t} = \overline{a_{m,t} - a_t} = \overline{a}_m - \overline{a}\ ,$$

где $\overline{a}_p$ — средняя за исследуемый период доходность портфеля; $\overline{a}$ — средняя за исследуемый период доходность безрискового актива; $\overline{a}_m$ — средняя за исследуемый период доходность рынка.

Подставив два последних выражения в предыдущее и перенеся $\overline{a}$ вправо, получим

$$\overline{a}_p = \alpha_p + \overline{a} + \left(\overline{a}_m - \overline{a}\right)\beta. \qquad \textbf{(20.18)}$$

Эффективность управления портфелем может быть оценена с помощью апостериорной рыночной линии портфеля ценных бумаг (*Security Market Line*, SML). Для определения SML полагают $\alpha_p = 0$. Такой портфель называют *эталонным*. Доходность эталонного портфеля линейным образом зависит от коэффициента бета:

$$\overline{a}_{эт} = \overline{a} + \left(\overline{a}_m - \overline{a}\right)\beta\ , \qquad \textbf{(20.19)}$$

где $\overline{a}_{эт}$ — средняя за исследуемый период доходность эталонного портфеля.

Вид апостериорной SML показан на рис. 20.3.

Рис. 20.3. Апостериорная рыночная линия портфеля ценных бумаг (SML)

Таким образом, доходность портфеля является линейной функцией от бета. При увеличении бета доходность увеличивается. С другой стороны, известно, что доходность актива увеличивается при увеличении риска. Поэтому коэффициент бета можно трактовать как показатель риска. Средняя доходность портфеля равна средней доходности рынка при $\overline{\beta} = \beta_m = 1$. Обычно считают, что при $\beta = 1$ уровень риска средний, при $\beta < 1$ — низкий, при $\beta > 1$ — высокий.

Одной из мер эффективности управления портфелем является разность между средней доходностью портфеля $\overline{a}_p$ **(20.18)** и доходностью эталонного портфеля $\overline{a}_{эт}$ **(20.19)**:

$$\alpha_p = \overline{a}_p - \overline{a}_{эт}. \qquad \mathbf{(20.20)}$$

Величина α_p называется *апостериорной альфа.*

Построение функции регрессии портфеля и определение разности между средней доходностью портфеля и доходностью эталонного портфеля α_p проводится по следующему а л г о р и т м у:

• составляют таблицы периодических доходностей исследуемого портфеля, рыночного портфеля и безрискового актива;

• определяют бета и альфа портфеля;

• строят функцию регрессии портфеля;

• определяют разность между средней доходностью портфеля и доходностью эталонного портфеля.

■ **Пример 20.2.** В табл. 20.3 приведены периодические значения доходностей за квартал в процентах исследуемого портфеля, рыночного портфеля и безрискового актива за 16 кварталов (4 года) [44].

Определить бета и альфа портфеля и построить функцию регрессии портфеля.

Таблица 20.3

Квартал	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й
Исследуемый портфель, $a_{p,t}$	−8,77	−6,03	14,14	24,96	3,71	10,65	−0,22	0,27	−3,08
Рыночный портфель, $a_{m,t}$	−5,86	−2,94	13,77	14,82	11,91	11,55	−0,78	0,02	−2,52
Безрисковый актив, a_t	2,97	3,06	2,85	1,88	1,9	2	2,22	2,11	2,16

Квартал	10-й	11-й	12-й	13-й	14-й	15-й	16-й	**Итого**
Исследуемый портфель, $a_{p,t}$	−6,72	8,58	1,15	7,87	5,92	−3,1	13,61	**62,94**
Рыночный портфель, $a_{m,t}$	−1,85	8,73	1,63	10,82	7,24	−2,78	14,36	**78,12**
Безрисковый актив, a_t	2,34	2,44	2,4	1,89	1,94	1,72	1,75	**35,63**

Решение.

Средние доходности за квартал исследуемого портфеля, рыночного портфеля и безрискового актива:

$$\overline{a}_p = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_{p,t} = \frac{62,94}{16} = 3,93\%\ ;$$

$$\overline{a}_m = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_{m,t} = \frac{78,12}{16} = 4,88\%\ ;$$

$$\overline{a} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_t = \frac{35,63}{16} = 2,23\%\ .$$

Подставив полученные значения в формулу **(20.19)**, получим выражение для доходности эталонного портфеля от коэффициента бета, т.е. выражение для апостериорной SML:

$$\overline{a}_{эт} = 2,23 + 2,65\beta\ .$$

График этой зависимости представлен на рис. 20.4.

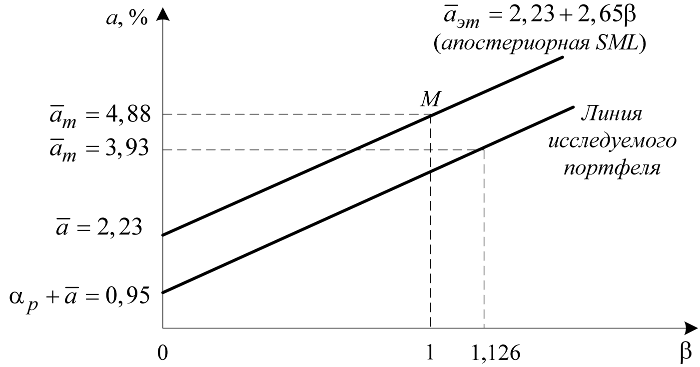


Рис. 20.4. Графики зависимостей доходностей эталонного портфеля и исследуемого портфеля от коэффициента бета

Средняя избыточная доходность за квартал исследуемого и рыночного портфелей равна

$$\overline{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(a_{p,t} - a_t\right) = \overline{a}_p - \overline{a} = 1,7\%;$$

$$\overline{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(a_{m,t} - a_t\right) = \overline{a}_m - \overline{a} = 2,65\%.$$

Результаты расчета $\overline{x_t y_t}$, $\overline{x_t^2}$, $\overline{y_t^2}$ приведены в табл. 20.4.

Таблица 20.4

Квартал	$y_t = a_{p,t} - a_t$	$x_t = a_{m,t} - a_t$	y_t^2	x_t^2	$x_t y_t$
1-й	−11,74	−8,83	137,83	77,97	103,66
2-й	−9,09	−6	82,63	36	54,54
3-й	11,29	10,92	127,46	119,25	123,29
4-й	23,08	12,94	532,69	167,44	298,66
5-й	1,81	10,01	3,28	100,2	18,12
6-й	8,65	9,55	74,82	91,2	82,61
7-й	−2,44	−3	5,95	9	7,32
8-й	−1,84	−2,09	3,39	4,37	3,85
9-й	−5,24	−4,68	27,46	21,9	24,52
10-й	−9,06	−4,19	82,08	17,56	37,96
11-й	6,14	6,29	37,7	39,56	38,62
12-й	−1,25	−0,77	1,56	0,59	0,96
13-й	5,98	8,93	35,76	79,74	53,4
14-й	3,98	5,3	15,84	28,09	21,09
15-й	−4,82	−4,5	23,23	20,25	21,69
16-й	11,86	12,61	140,66	159,01	149,55
Итого	**27,31**	**42,49**	**1332,34**	**972,13**	**1039,84**

Воспользовавшись результатами, приведенными в табл. 20.4, получим

$$\overline{x_t y_t} = \frac{1039,84}{16} = 64,99; \quad \overline{x_t^2} = \frac{972,13}{16} = 60,76.$$

Ковариация рыночного и исследуемого портфелей

$$\sigma_{x,y} = \frac{T}{T-1}\left[\overline{x_t y_t} - \overline{x} \cdot \overline{y}\right] = \frac{16}{15}(64,99 - 2,65 \cdot 1,7) = 64,52.$$

Дисперсия рыночного портфеля

$$\sigma_x^2 = \frac{T}{T-1}\left[\overline{x_t^2} - \overline{x}^2\right] = \frac{16}{15}\left(60,76 - 2,65^2\right) = 57,32.$$

Подставив эти значения в **(20.17)**, получим значение бета исследуемого портфеля:

$$\beta = \frac{64,49}{57,32} = 1,126.$$

Известно, что средняя бета рыночного портфеля равна единице. Поскольку средняя бета исследуемого портфеля больше среднего бета рыночного портфеля, то можно сделать вывод, что менеджер исследуемого портфеля был относительно агрессивен.

Альфа портфеля может быть найдена по формуле **(20.13)**:

$$\alpha_p = \overline{y} - \beta\overline{x} = 1,7 - 1,126 \cdot 2,65 = -1,28\ \%.$$

Так как альфа портфеля отрицательна, т.е. доходность исследуемого портфеля ниже доходности рыночного портфеля, то управление данным портфелем рассматривается как неэффективное.

Функцию доходности исследуемого портфеля от коэффициента бета найдем, подставив в **(20.18)** полученные значения:

$$\overline{a}_p = -1,28 + 2,23 + (4,88 - 2,23)\beta = 0,95 + 2,65 \cdot \beta.$$

Зависимость доходности исследуемого портфеля от бета портфеля см. на рис. 20.4.

Функцию регрессии портфеля найдем, подставив в **(20.11)** значения для альфа и бета портфелей:

$$\hat{y}_x = -1,28 + 1,126 x_t.$$

График этой функции представлен на рис. 20.5.

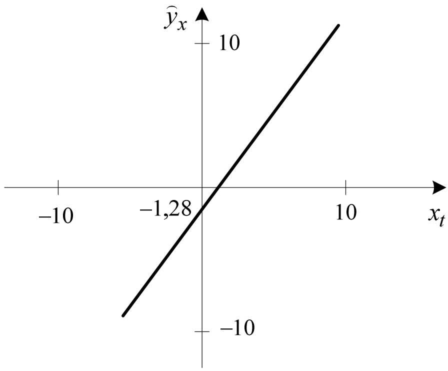


Рис. 20.5. Функция регрессии □

20.3. Оценка качества регрессионной модели

Построенная регрессионная модель нуждается в проверке ее соответствия реальным статистическим данным. При оценке качества функции регрессии проверяется значимость коэффициентов уравнения, степень тесноты взаимосвязи исследуемых случайных величин x_t и y_t, качество подбора формы кривой. В общем виде функция $f(x_t) = \hat{y}_x$ может иметь самый различный вид. В нашем случае в качестве этой функции выбрана прямая линия **(20.11)**.

Значимость коэффициентов регрессии α_p, β проверяется по t-критерию Стьюдента. Эти коэффициенты признаются значимыми с заданной вероятностью, если выполняются неравенства

$$t_{\alpha} > t_0; \;\; t_{\beta} > t_0, \tag{20.21}$$

где

$$t_{\alpha} = \frac{\alpha_p}{\sigma_{\alpha}}; \quad t_{\beta} = \frac{\beta}{\sigma_{\beta}}; \tag{20.22}$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_{\text{ОСТ}}}{\sqrt{T}}; \quad \sigma_{\beta} = \frac{\sigma_{\text{ОСТ}}}{\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{T}\left(x_t - \overline{x}\right)^2}}; \tag{20.23}$$

$$\sigma_{\text{ОСТ}}^2 = \frac{1}{T-2}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \hat{y}_x\right)^2. \tag{20.24}$$

Значение t_0 выбирается из таблицы t-критерия Стьюдента для доверительной вероятности $F = 1 - \alpha$ и числа степеней свободы $T - 2$, где T — объем выборки. При выполнении неравенства **(20.21)** коэффициент считается значимым с вероятностью F. Здесь α — уровень значимости.

Тесноту взаимосвязи x_t и y_t проверяют при помощи коэффициента корреляции

$$r = \frac{\overline{x_t y_t} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\overline{x_t^2} - \overline{x}^2} \cdot \sqrt{\overline{y_t^2} - \overline{y}^2}} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}, \tag{20.25}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^2 - \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(x_t - \overline{x}\right)^2 &= \frac{T}{T-1}\left[\overline{x_t^2} - \overline{x}^2\right]; \\ \sigma_y^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \overline{y}\right)^2 &= \frac{T}{T-1}\left[\overline{y_t^2} - \overline{y}^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{20.26}$$

Коэффициент корреляции лежит в пределах $-1 \le r \le 1$. При значении коэффициента корреляции, близком к единице или минус единице, связь сильная, при значении, близком к нулю, — слабая.

Значимость коэффициента корреляции с доверительной вероятностью $F = 1 - \alpha$ определяется с помощью t-критерия Стьюдента по формуле

$$t_r > t_0, \tag{20.27}$$

где $t_r = \dfrac{r\sqrt{T-2}}{\sqrt{1-r^2}}$; количество степеней свободы равно $T - 2$.

Значение r^2 называется *коэффициентом детерминации.* Чем больше r^2, тем лучше выбранная функция аппроксимирует фактические данные. В нашем случае коэффициент детерминации показывает ту часть изменений избыточной доходности исследуемого портфеля за заданный интервал времени, которая связана с изменениями избыточной доходности рыночного портфеля.

Коэффициент неопределенности находится по формуле

$$h^2 = 1 - r^2. \tag{20.28}$$

Коэффициент неопределенности показывает часть изменений избыточной доходности исследуемого портфеля, которая не связана с изменениями избыточной доходности рыночного портфеля.

Качество подбора формы кривой оценивается по критерию Дарбина—Уотсона. Для этого проводится анализ остатков

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_x. \tag{20.29}$$

Если модель функции регрессии адекватна форме подобранной кривой, то соседние значения остатков независимы друг от друга. Эта независимость проверяется с помощью критерия Дарбина—Уотсона:

$$d = 2 \cdot \left(1 - \frac{\sum\limits_{t=2}^{T} \varepsilon_x \varepsilon_{x-1}}{\sum\limits_{t=1}^{T} \varepsilon_x^2} \right). \tag{20.30}$$

По таблице Дарбина—Уотсона для заданной доверительной вероятности $F = 1 - \alpha$ определяют критические границы, позволяющие вынести суждение о наличии автокорреляции (рис. 20.6).

Задавшись уровнем значимости α и зная количество комбинаций T, находят из таблицы значения d_n, d_v.

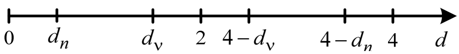


Рис. 20.6. Границы Дарбина—Уотсона, позволяющие вынести суждение о наличии автокорреляции

При $d_v < d < 4 - d_v$ автокорреляция остатков отсутствует. При $d < d_n$ и $d > 4 - d_n$ автокорреляция имеет место. Если обнаружена существенная автокорреляция остатков, то следует пересмотреть форму выбранной кривой.

■ **Пример 20.3.** Используя данные примера 20.2, проверить полученные в этом примере результаты на адекватность реальным статистическим данным, рассчитать коэффициенты корреляции, детерминации и неопределенности.

Решение.

Расчет представлен в табл. 20.5.

Таблица 20.5

Квартал	ε_x	ε_x^2	$\left(x_t - \overline{x}\right)^2$	$\varepsilon_x \varepsilon_{x-1}$
1-й	−0,52	0,27	131,79	—
2-й	−1,05	1,1	74,82	0,55
3-й	0,27	0,07	68,39	−0,28
4-й	9,79	95,84	105,88	2,64
5-й	−8,18	66,91	54,17	−80,08
6-й	−0,82	0,67	47,61	6,71
7-й	2,22	4,93	31,92	−1,82
8-й	1,79	3,2	22,47	3,97
9-й	1,31	1,72	53,73	2,34
10-й	−3,06	9,36	46,79	−4,01
11-й	0,34	0,12	13,25	−1,42
12-й	−0,89	0,79	11,7	0,3
13-й	−2,8	7,84	39,44	−2,49
14-й	−0,71	0,5	7,02	1,99
15-й	1,53	2,34	51,12	−1,09
16-й	−1,06	1,12	99,2	−1,62
Итого	**−0,06**	**196,78**	**859,3**	**−73,93**

По формулам **(20.24)**, **(20.23)** и **(20.22)** находим

$$\sigma_{\text{ОСТ}} = \sqrt{\frac{197,36}{14}} = 3,75; \quad \sigma_\alpha = \frac{3,75}{\sqrt{16}} = 0,94; \quad \sigma_\beta = \frac{3,75}{\sqrt{859,3}} = 0,128;$$

$$t_\alpha = \frac{1,28}{0,94} = 1,36; \quad t_\beta = \frac{1,126}{0,128} = 8,8.$$

Из таблицы t-распределения Стьюдента для числа степеней свободы $\nu = 16 - 2 = 14$ имеем при $t_0 = 1,3$ $F = 0,89$ и при $t_0 = 6,6$ $F = 0,99999$. Таким образом, как следует из **(20.21)**, коэффициент α_p принимается значимым с вероятностью 0,89, а коэффициент β — с вероятностью 0,99999.

Для определения коэффициента корреляции по формуле **(20.25)** найдем дисперсии (исходные данные приведены в табл. 20.4):

$$\sigma_x^2 = \frac{16}{15}\left(60,76 - 2,65^2\right) = 57,32; \quad \sigma_x = 7,57;$$

$$\sigma_y^2 = \frac{16}{15}\left(\frac{1332,34}{16} - 1,7^2\right) = 85,74; \quad \sigma_y = 9,26.$$

Подставив полученные значения и $\sigma_{x,y}$, рассчитанное в примере 20.2, в **(20.25)**, получим

$$r = \frac{64,52}{7,57 \cdot 9,26} = 0,92.$$

Отсюда следует, что связь между избыточной доходностью исследуемого и рыночного портфеля высокая.

Для определения значимости коэффициента корреляции определим

$$t_r = \frac{r\sqrt{T-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,92 \cdot \sqrt{16-2}}{\sqrt{1-0,92^2}} = 8,82.$$

Так как $t_0 = 6,6$ при $F = 0{,}99999$, то, как следует из соотношения **(20.21)**, коэффициент корреляции можно считать значимым с вероятностью 0,99999.

Коэффициент детерминации

$$r^2 = 0,85.$$

Коэффициент неопределенности находим по формуле **(20.28)**:

$$h^2 = 1 - r^2 = 1 - 0,85 = 0,15.$$

Таким образом, можно считать, что 85% изменений избыточной доходности исследуемого портфеля за 16-квартальный интервал связаны с изменением избыточной доходности рыночного портфеля; 15% изменений избыточной доходности исследуемого портфеля за этот интервал не зависят от изменений избыточной доходности рыночного портфеля.

Для оценки качества подбора формы кривой находим расчетное значение d по формуле **(20.30)** и по данным табл. 20.5:

$$d = 2\left(1 - \frac{-73,93}{196,78}\right) = 2,75 \cdot$$

Из таблицы Дарбина—Уотсона для уровня значимости $\alpha = 1\%$ и числа наблюдений $T = 16$ находим $d_n = 0,84$; $d_v = 1,09$. Полученные точки наносятся на ось рис. 20.6. Результат представлен на рис. 20.7.

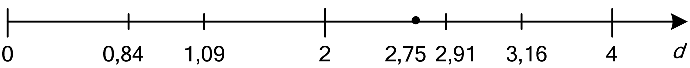


Рис. 20.7. Точки Дарбина—Уотсона

Так как расчетное значение попало в интервал [1,09; 2,91], то соседние значения остатков независимы друг от друга, т.е. выбор функции регрессии в виде прямой линии сделан правильно. □

20.4. Использование коэффициента бета для определения доходности и риска реальных инвестиционных проектов

Коэффициент бета нашел широкое применение не только при анализе ценных бумаг, но и при анализе инвестиций в реальные активы.

Как показано в § 20.3, доходность актива является линейной функцией от бета. При увеличении бета доходность увеличивается. Аналогичные рассуждения справедливы также для доходности инвестиционного проекта. Поэтому, так же как и для случая портфеля ценных бумаг, риск реального инвестиционного проекта по отношению к уровню риска рынка в целом оценивают при помощи коэффициента β_{np}, определяемого по формуле

$$\beta_{np} = \frac{\sigma_{np,m}}{\sigma_m^2}, \qquad \textbf{(20.31)}$$

где $\sigma_{np,m}$ — ковариация доходности конкретного проекта и рынка в целом; σ_m — среднее квадратичное отклонение доходности по инвестиционному рынку в целом (при этом считают, что при $\beta_{np} = 1$ уровень риска средний, при $\beta_{np} < 1$ — низкий, при $\beta_{np} > 1$ — высокий).

График доходности инвестиционного проекта от бета представлен на рис. 20.8.

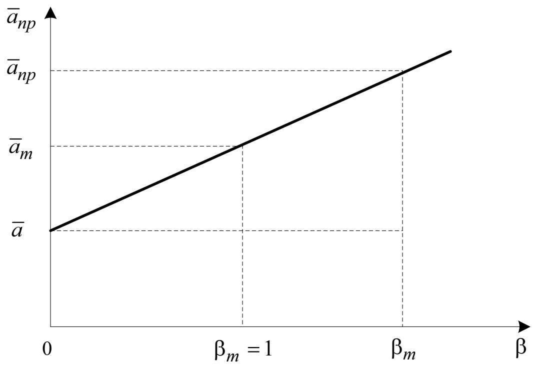


Рис. 20.8. Зависимость доходности инвестиционного проекта от риска

Риск обычно компенсируется премией за риск, которая возрастает пропорционально уровню риска по инвестиционному проекту β_{np} (см. рис. 20.8). Премия за риск $\bar{a}_{\text{P}}$ по рассматриваемому проекту равна $\bar{a}_{\text{P}} = \bar{a}_{np} - \bar{a}$.

Из геометрии рис. 20.8 следует формула для расчета общей доходности проекта $\bar{a}_{np}$ в зависимости от уровня риска по этому проекту β_{np}. Из подобия треугольников находим

$$\frac{\overline{a}_{np} - \overline{a}}{\beta_{np}} = \frac{\overline{a}_m - \overline{a}}{\beta_m},$$

где $\overline{a}$ — доходность безрисковых инвестиций; $\overline{a}_m$ — среднее значение доходности по рынку в целом; β_m — уровень риска по рынку в целом.

Так как средний уровень риска на инвестиционном рынке $\overline{\beta} = \beta_m = 1$, то

$$\overline{a}_{np} = \overline{a} + \left(\overline{a}_m - \overline{a}\right)\beta. \tag{20.32}$$

Как и следовало ожидать, эта формула совпадает с формулой **(20.18)** при $\alpha_p = 0$.

Выражение **(20.32)** называют *формулой ценовой модели капитальных активов* (*Capital Asset Pricing Model*, CAPM).

Для проведения расчетов доходности проекта необходимо провести расчет бета этого проекта. Например, рассматривается вопрос о расширении предприятия. Подобные инвестиции сопряжены примерно с той же степенью риска, что и существующий бизнес. Способ состоит в вычислении бета акций, т.е. в исследовании зависимости доходности акций данного предприятия от доходности всего рынка. Для этих целей в системе координат доходность рынка от доходности акций данного предприятия строят точки для определенных моментов в прошлом. Затем, например, методом наименьших квадратов вычисляют коэффициенты функции регрессии доходности акций предприятия от доходности рынка в целом, являющейся прямой линией. Тангенс угла наклона этой прямой является искомым коэффициентом бета. Необходимо иметь в виду, что коэффициент бета для данного предприятия изменяется во времени. Исследования стабильности коэффициента бета в США было проведено Шарпом и Купером в 1960—1970-е гг. [6]. Они разбили акции на 10 категорий риска. В первую категорию входили акции с самым малым значением бета, в десятую — с самым большим. Затем они проследили, сколько из этих акций осталось в той же категории риска пятью годами позже. Результаты их исследований сведены в табл. 20.6.

Таблица 20.6

Категория риска	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Доля акций в той же категории риска через пять лет	40	21	16	13	14	14	13	16	18	35

Из таблицы видно, что в рассматриваемое время в США существовала заметная тенденция к стабильности акций либо с очень высокими, либо с очень низкими коэффициентами бета.

Упражнения

ТЕСТ 20.1

Выберите правильный вариант ответа.

1. Мерой риска является:

A. Математическое ожидание.
B. Среднее квадратичное отклонение.
C. Ковариация.
D. Коэффициент корреляции.

2. Дисперсия в зависимости от среднего квадратичного отклонения характеризуется:

A. Линейной зависимостью.
B. Квадратичной зависимостью.
C. Кубической зависимостью.

ЗАДАЧИ

20.1. Ожидаемая средняя доходность проекта равна 5% годовых (другой вариант — 9% годовых). Средняя доходность безрискового актива равна 2%, а доходность рынка — 6%. Определить премию за риск и степень риска в виде коэффициента бета.

Глава 21. МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ РИСКАМИ ЗА СЧЕТ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Прогнозирование с заданной вероятностью характеристик временных процессов позволяет снизить степень неопределенности при принятии решений и уменьшить риск. В настоящее время получили распространение компьютерные системы, предназначенные для разработки бизнес-планов и сопутствующих им документов. В частности, для построения прогноза временного ряда применяется компьютерная система «Forecast Expert», в которой используется модель Бокса—Дженкинса. В качестве прогнозируемых величин могут выступать спрос и цена на товар, ценные бумаги, загруженность персонала и т.д. Применение «Forecast Expert» позволяет получить прогноз в виде доверительного интервала при заданной вероятности на период времени, не превосходящий длину исходного ряда. Модель позволяет учитывать влияние сезонных колебаний.

Рассмотрим основные методы, позволяющие строить прогноз по временному ряду.

21.1. Скользящие средние

Метод скользящей средней [35] состоит в вычислении средних уровней показателя его прошлых значений. При этом считают, что ожидаемые значения параметра (например, безрисковой процентной ставки) в следующем периоде (периоде прогноза) равны среднему арифметическому параметру последних n периодов. Это можно записать в виде формулы

$$\overline{y}_t = \frac{1}{n}\sum_{j=t}^{t-n+1} y_j \quad ,$$

где $\overline{y}_t$ — прогнозируемое значение параметра следующего периода; y_j — значения параметра в периоды $t,\ t-1,\ t-2,\ ...,\ t-n+1$.

Так как для периода $t-1$ скользящее среднее равно

$$\overline{y}_{t-1} = \frac{1}{n}\sum_{j=t-1}^{t-n} y_j,$$

то выражение для $\overline{y}_t$ можно записать в виде

$$\overline{y}_t = \overline{y}_{t-1} + \frac{1}{n}(y_t - y_{t-n}).$$

Из последней формулы следует, что значение прогнозируемого параметра отличается от предыдущего на величину $\dfrac{y_t - y_{t-n}}{n}$. В случае стационарного динамического ряда этот прогноз можно использовать не только для следующего периода, но и на несколько периодов вперед. Напомним, что *стационарным динамическим рядом* называется такой ряд, в котором его математическое ожидание не изменяется во времени.

■ **Пример 21.1.** Даны данные по экономическому параметру за 10 дней (табл. 21.1). Дать прогноз по этому параметру на 11-й день.

Таблица 21.1

День, t	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й
y_t	8,9	9,1	8,9	9,08	8,96	8,9	9,0	9,5	9,6	9,56	

Решение.

$$\overline{y}_{10} = \frac{1}{n}\sum_{j=10}^{1} y_j = \frac{1}{10}(9,56+9,6+9,5+9+8,9+8,96+9,08+8,9+9,1+8,9) = 9,15.$$

Ожидаемое значение параметра на 11-й день равно 9,15. □

Как следует из приведенных выше формул, параметрам в различные периоды времени присваивается одинаковый вес, равный $1/n$, т.е. новые данные имеют тот же вес, что и старые. Однако новые данные имеют большее значение для прогнозирования, поэтому в общем случае должны иметь больший вес. Этот недостаток устраняется при использовании экспоненциально взвешенного среднего.

21.2. Экспоненциально взвешенные средние

Экспоненциально взвешенную среднюю представим в виде

$$\overline{y}_t = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^j y_{t-j} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^j y_{t-j},$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots,\quad 0 < \alpha < 1$.

В этом случае веса при параметрах имеют различные значения, причем сумма ряда этих весов равна единице, т.е.

$$\alpha+\alpha(1-\alpha)+\alpha(1-\alpha)^2+...+\alpha(1-\alpha)^j...=\alpha\frac{1}{1-(1-\alpha)}=1,$$

так как эта сумма является бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем $1-\alpha$.

Преобразуем формулу для экспоненциально взвешенной средней к виду

$$\overline{y}_t=\alpha y_t+(1-\alpha)\left[\alpha y_{t-1}+\alpha(1-\alpha)y_{t-2}+\alpha(1-\alpha)^2 y_{t-3}+...\right].$$

Выражение в квадратных скобках является экспоненциально взвешенной средней для последнего периода в ряду параметров, т.е. это $\overline{y}_{t-1}$. Таким образом,

$$\overline{y}_t=\alpha y_t+(1-\alpha)\overline{y}_{t-1}. \qquad \textbf{(21.1)}$$

Из этой формулы следует, что для построения прогноза достаточно задать величину $\overline{y}_{t-1}$. Ее можно получить, например, экспертным методом. Дальнейшее прогнозирование ведется по мере поступления новых данных.

Значение коэффициента α выбирают исходя из конкретных условий. Для его выбора можно воспользоваться, например, данными табл. 21.2.

Таблица 21.2

α	0,05	0,1	0,2	0,3
n	39	19	9	6

Чувствительность экспоненциально взвешенной средней может быть изменена путем изменения α. Чем выше α, тем выше чувствительность; чем ниже α, тем устойчивее экспоненциально взвешенная средняя.

Перепишем формулу **(21.1)** для экспоненциально взвешенной средней в виде

$$\overline{y}_t=\overline{y}_{t-1}+\alpha(y_t-\overline{y}_{t-1}).$$

Разность $y_t-\overline{y}_{t-1}=\varepsilon_t$ является текущим значением ошибки прогноза. Тогда

$$\overline{y}_t=\overline{y}_{t-1}+\alpha\varepsilon_t.$$

Рассмотренные методы скользящей средней и экспоненциально взвешенной средней используются для прогнозирования стационарных процессов, при которых математическое ожидание параметра постоянно во времени.

■ **Пример 21.2.** Используя данные примера 21.1 (первая строка табл. 21.3), определить прогноз на каждый из следующих дней, положив прогноз первого дня равным 9, $\alpha = 0{,}2$.

Решение.

Результаты расчета сведены в табл. 21.3. Обозначения: y_t — значение экономического параметра текущего дня; $\overline{y}_{t-1}$ — прошлый прогноз текущего дня; $\varepsilon_t = y_t - \overline{y}_{t-1}$ — ошибка текущего прогноза. □

Таблица 21.3

День	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й
y_t	8,9	9,1	8,9	9,08	8,96	8,9	9,0	9,5	9,6	9,56	9,5
$\overline{y}_{t-1}$	9,0	8,98	9,0	8,98	9,0	8,99	8,98	8,98	9,08	9,19	9,26
$\varepsilon_t = y_t - \overline{y}_{t-1}$	−0,1	0,12	−0,1	0,1	−0,04	−0,09	0,02	0,502	0,52	0,37	0,24

21.3. Метод сглаживания ошибок

При прогнозировании процесса важно проводить контроль соответствия прогноза адекватности получаемых на практике результатов. Основным препятствием в построении прогнозов служат внезапные скачки. Поэтому важнейшей задачей метода сглаживания ошибок является выявление этих скачков. После выявления скачка проводится анализ причин его возникновения, например, экспертным методом.

Влияние скачка на точность прогноза демонстрируется на рис. 21.1. Из этого рисунка следует, что прогноз в момент скачка и сразу после него не соответствует реальному показателю. Поэтому необходим механизм, говорящий о несоответствии прогноза и реальности.

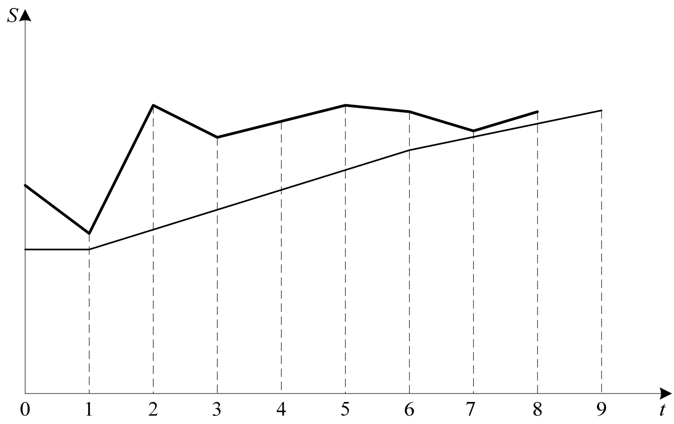


Рис. 21.1. Влияние скачка на точность прогноза

Существуют различные методы контроля адекватности прогноза и реальности. Один из них — метод автоматического контроля Григга. Метод основан на вычислении следящего контрольного сигнала, указывающего с некоторым уровнем статистического доверия на степень неадекватности прогноза реальности. Для определения контрольного сигнала введем ряд понятий.

Средним абсолютным отклонением ошибки называется величина, вычисляемая по формуле

$$\Delta_t = \alpha\left|\varepsilon_t\right| + (1-\alpha)\Delta_{t-1}.$$

Величина $\Delta_t > 0$. Естественно, что среднее абсолютное отклонение связано со среднеквадратичным отклонением ошибки σ_t. Приближенно можно считать, что

$$\sigma_t = 1,25\Delta_t.$$

Экспоненциально взвешенной ошибкой $\overline{\varepsilon}_t$ называется величина, определяемая формулой

$$\overline{\varepsilon}_t = \alpha\varepsilon_t + (1-\alpha)\overline{\varepsilon}_{t-1}.$$

Контрольный сигнал T_t находится из соотношения

$$T_t = \frac{\overline{\varepsilon}_t}{\Delta_t}.$$

Значение контрольного сигнала лежит в интервале

$$-1 < T_t < 1.$$

При отрицательном контрольном сигнале значение прогноза больше реального показателя, и наоборот.

Контрольный сигнал имеет определенные пороговые значения, соответствующие выбранному уровню доверия, которые представлены в табл. 21.4 [35].

Таблица.21.4

Уровень доверия	*Пороговые значения контрольного сигнала*				
	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,3$	$\alpha = 0,4$	$\alpha = 0,5$
70	0,24	0,33	0,44	0,53	0,64
80	0,29	0,4	0,52	0,62	0,73
85	0,32	0,45	0,57	0,67	0,77
90	0,35	0,5	0,63	0,72	0,82
95	0,42	0,58	0,71	0,8	0,88
96	0,43	0,6	0,73	0,82	0,89
97	0,45	0,62	0,76	0,84	0,9
98	0,48	0,66	0,79	0,87	0,92
99	0,53	0,71	0,82	0,92	0,94
100	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Если при заданном α значение следящего контрольного сигнала стало больше указанного в табл. 20.4, то с указанным уровнем доверия прогностическая система становится **неадекватной** реальным изменениям показателя.

■ **Пример 21.3.** Используя данные примеров 21.1 и 21.2, определить контрольный сигнал для каждого дня. Положить экспоненциально взвешенную ошибку дня, стоящего перед первым днем, равной нулю, т.е. $\overline{\varepsilon}_0 = 0$, а среднее абсолютное отклонение дня, стоящего перед первым днем, $\Delta_0 = 0,08$.

Решение.

Результаты расчета сведены в табл. 21.5.

Таблица 21.5

День	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й
δ_t	8,9	9,1	8,9	9,08	8,96	8,9	9,0	9,5	9,6	9,56	9,5
$\overline{\delta}_{t-1}$	9,0	8,98	9,0	8,98	9,0	8,99	8,98	8,98	9,08	9,19	9,26
ε_t	−0,1	0,12	0,1	0,1	−0,04	−0,09	0,02	0,502	0,52	0,37	0,24
$\alpha\varepsilon_t \cdot 10^3$	−20	24	−20,8	19,36	−8,5	−18,9	4,88	104	103	74,6	48
$(1-\alpha)\overline{\varepsilon}_{t-1} \cdot 10^3$	0	−16	6,4	−11,52	6,27	−1,78	−16,5	−9,33	75,7	143	174
$\overline{\varepsilon}_t \cdot 10^3$	−20	8	−11,4	7,84	−2,23	−20,7	−11,67	94,6	178,7	218	222
$\alpha\lvert\varepsilon_t\rvert \cdot 10^3$	20	24	20,8	19,36	8,5	18,9	4,88	104	103	74,6	48
$(1-\alpha)\Delta_{t-1} \cdot 10^3$	64	67,2	73	75,04	75,5	67,2	68,9	59	130	187	209
$\Delta_t \cdot 10^3$	84	91,2	93,8	94,4	84	86,1	73,8	163	233	261	257
$T_t \cdot 10^2$	−24	8,8	−15	8,3	−2,7	−24	−16	58	77	83	86

В этой таблице введены следующие обозначения:

$$\varepsilon_t = \delta_t - \overline{\delta}_{t-1};\quad \overline{\varepsilon}_t = \alpha\varepsilon_t + (1-\alpha)\overline{\varepsilon}_{t-1};\quad \Delta_t = \alpha\lvert\varepsilon_t\rvert + (1-\alpha)\Delta_{t-1};\quad T_t = \overline{\varepsilon}_t / \Delta_t .$$

До седьмого дня величина контрольного сигнала мала. Начиная с восьмого дня величина контрольного сигнала растет: 0,58; 0,77; 0,83; 0,86. Это означает, что значимость *неадекватности* прогноза наблюдаемым значениям в соответствии с таблицей пороговых значений контрольного сигнала равна 95% для контрольного сигнала 0,58, т.е. для восьмого дня. Значимость *неадекватности* прогноза наблюдаемым значениям для девятого, десятого и одиннадцатого дней лежит в интервале от 99 до 100% . Положительное значение контрольного сигнала указывает на то, что цена превышает прогноз. □

21.4. Трендовая модель

Прогноз на будущее, например цен ценных бумаг, можно построить с помощью трендов. Трендовые модели в отличие от скользящей средней позволяют строить прогнозы на отдаленные моменты времени. Данные по экономическим показателям в различные периоды времени являются динамическим рядом, т.е. совокупностью n значений некоторого параметра y, определяемого в различные моменты времени t. *Динамический ряд* можно представить в виде

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t \, , \qquad \textbf{(21.2)}$$

где $f(t) = \hat{y}_t$ — детерминированная функция времени (тренд); ε_t — случайная функция, определяемая действием случайных факторов.

Так как каждое значение y_t является случайной величиной, то значение $f(t)$ в точке t является математическим ожиданием этой случайной величины.

Построить трендовую модель явления (рис. 21.2) — это значит найти детерминированную функцию $\hat{y}_t$ и характеристики случайных отклонений от нее, позволяющие определить доверительный интервал, в границах которого с заданной доверительной вероятностью должна находиться прогнозируемая величина.

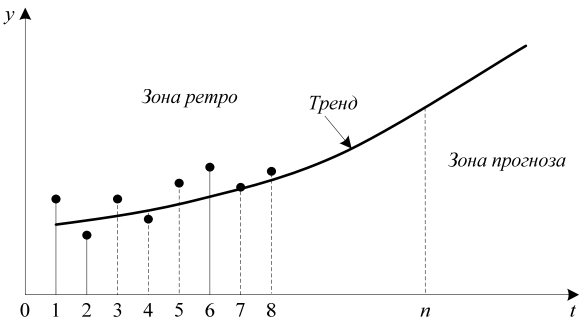


Рис. 21.2. Трендовая модель

При построении трендовой модели прежде всего выбирают форму кривой тренда, затем подбирают параметры этой кривой по какому-либо критерию оптимальности и, наконец, по совокупности критериев оценивают качество подобранной кривой.

В качестве тренда используют линейную функцию, параболу, многочлен n-й степени, гиперболу, экспоненту, логарифмическую функцию и др. Чаще всего модель описывается линейной функцией. При описании модели нелинейной функцией система уравнений для расчета параметров кривой может оказаться достаточно сложной. Поэтому иногда для получения параметров нелинейной функции ее приводят к линейному виду.

Сезонным трендом называют периодические изменения показателя, связанные, например, с сезонными изменениями спроса (одежда, обувь).

Смешанным сезонным трендом называют комбинацию из сезонного и любого другого рассмотренного тренда, например линейного.

Тренды различают также п о т и п у.

Аддитивным трендом называют временную зависимость, в которой значения параметра отклоняются в положительную и отрицательную стороны от тренда в среднем на одну и ту же величину.

Мультипликативным трендом называют временную зависимость, в которой значения параметра отклоняются в положительную и отрицательную стороны от тренда в среднем на одинаковый процент.

21.4.1. КРАТКОСРОЧНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

При краткосрочном прогнозировании модель процесса **(20.2)** можно представить в виде

$$y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t. \tag{21.3}$$

Рассмотрим н е с к о л ь к о м е т о д о в краткосрочного прогнозирования [12].

▶ ***Метод Холта*** основан на оценке степени линейного роста или падения исследуемого показателя во времени. Если прогноз вычисляется на l периодов вперед ($t+l$ — горизонт прогнозирования), то его значение может быть рассчитано по формуле

$$\bar{y}_{t+l} = \bar{y}_t + a_t l, \tag{21.4}$$

где $\bar{y}_t$ — текущее экспоненциально взвешенное среднее исследуемого показателя, определяемого соотношениями:

$$\bar{y}_t = Ay_t + (1-A)(\bar{y}_{t-1} + a_{t-1}); \tag{21.5}$$

$$a_t = B(\bar{y}_t - \bar{y}_{t-1}) + (1-B)a_{t-1}, \tag{21.6}$$

где y_t — значение показателя текущего периода; A и B — коэффициенты, лежащие в пределах от нуля до единицы (см. **(21.8)** и табл. 21.6); a_t — коэффициент, по которому оценивается степень роста коэффициента a_1.

▶ ***Метод Холта с модификациями Муира*** описывает вычисление прогноза на достаточно большой интервал времени l (теоретически — на бесконечно большой). В этом случае **(21.4)** и **(21.5)** приобретают вид

$$\bar{y}_{t+l} = \bar{y}_t + a_t\left(\frac{1}{A} + l - 1\right);$$

$$\bar{y}_t = Ay_t + (1-A)\bar{y}_{t-1},$$

где a_t вычисляется по формуле **(21.6)**.

▶ ***Метод двойного сглаживания Брауна*** основан на доказанном Брауном положении, что в условиях линейного тренда простое экспоненциально взвешенное среднее **(21.1)** всегда меньше линейного тренда на величину $\frac{1-\alpha}{\alpha}a_1$.

Прогноз по этому методу на момент времени $t+l$ определяется формулами

$$\bar{y}_{t+l} = 2\bar{y}_t - \tilde{y}_t + \frac{\alpha}{1-\alpha}(\bar{y}_t - \tilde{y}_t)l;$$

$$\tilde{y}_t = \alpha\bar{y}_t + (1-\alpha)\tilde{y}_{t-1}.$$

Для прогноза на один период ($l=1$) имеем

$$\bar{y}_{t+1} = \frac{(2-\alpha)\bar{y}_t - \tilde{y}_t}{1-\alpha}.$$

▶ ***Метод Бокса—Дженкинса***, заимствованный из теории управления, определяет прогнозируемую величину формулой

$$\bar{y}_t = \bar{y}_{t-1} + \gamma_{-1}\left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}\right) + \gamma_0\varepsilon_t + \gamma_1\sum_{j=t}^{-\infty}\varepsilon_j\,, \qquad \textbf{(21.7)}$$

где $\varepsilon_t = y_t - \bar{y}_t$; γ_1 — интегральный коэффициент управления; γ_{-1} — дифференциальный коэффициент управления (обычно принимают $\gamma_{-1} = 0$); γ_0 — пропорциональный показателю коэффициент управления.

▶ Можно показать, что методы Холта, Брауна и Бокса—Дженкинса являются частными случаями более общей ***модели Варда***. Все коэффициенты этих моделей связаны соотношениями

$$A = \gamma_0 = \alpha\left(2-\alpha\right);\; B = \frac{\alpha}{2-\alpha};\; \gamma_1 = \alpha^2. \qquad \textbf{(21.8)}$$

Эта связь представлена также в табл. 21.6.

Таблица 21.6

α	0,05	0,1	0,2	0,3
$A=\gamma_0$	0,098	0,19	0,35	0,51
B	0,026	0,052	0,111	0,176
γ_1	0,0025	0,01	0,04	0,09
γ_{-1}	0	0	0	0

21.4.2. СРЕДНЕСРОЧНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Одним из наиболее часто применяемых методов для расчета параметров тренда является *метод наименьших квадратов*. Рассмотрим случай линейной функции тренда, т.е.

$$f(t) = \hat{y}\left(t\right) = a_0 + a_1 t.$$

Параметры a_0 и a_1 вычисляются по формулам

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{n\overline{t}\,\overline{y} - \sum\limits_{t=1}^{n} y_t \cdot t}{n\overline{t}^2 - \sum\limits_{t=1}^{n} t^2}; \\ a_0 = \overline{y} - a_1\overline{t}, \end{cases}$$

где $$\overline{t} = \dfrac{\sum\limits_{t=1}^{n} t}{n}; \quad \overline{y} = \dfrac{\sum\limits_{t=1}^{n} y_t}{n}.$$

Иногда эти формулы записывают в виде

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{n(1+n)} \cdot \dfrac{\dfrac{n(1+n)\overline{y}}{2} - \sum y_t t}{\dfrac{1+n}{2} - \dfrac{1+2n}{3}}; \\ a_0 = \overline{y} - \dfrac{1+n}{2} a_1. \end{cases}$$

■ **Пример 21.4.** В табл. 21.7 приведены средние значения экономического параметра за день. Подобрать тренд и рассчитать его параметры.

Таблица 21.7 (*начало*)

День, t	*Цена,* y_t	$y_t \cdot t$	$\hat{y}_t$	ε_t	ε_t^2
1-й	1,5	1,5	1,29545	0,20455	0,04184
2-й	1,75	3,5	1,8409	−0,0909	0,00826
3-й	2,25	6,75	2,38635	−0,13635	0,01859
4-й	2,75	11	2,9318	−0,1818	0,03305
5-й	3,5	17,5	3,47725	0,02275	0,00052
6-й	4	24	4,0227	−0,0277	0,00052
7-й	4,75	33,25	4,56815	0,18185	0,03307
8-й	5,25	42	5,1136	0,1364	0,0186
9-й	5,75	51,75	5,65905	0,009095	0,00827
10-й	6	60	6,2045	0,2045	0,04182
Итого	**37,5**	**251,25**			**0,20454**

Решение.

Анализ приведенного динамического ряда показывает, что экспериментальные точки ряда группируются близко от прямой линии, поэтому в качестве тренда используется уравнение

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t.$$

Определение параметров этого уравнения проводится по результатам расчетов, приведенным в табл. 21.7, в которой приведены также значения тренда в исследуемых точках $\hat{y}_t$, значения остатков $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$ и квадрат остатков, которые потребуются при проведении последующих расчетов:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t}{n} = \frac{37,5}{10} = 3,75;$$

$$a_1 = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{\frac{n(n+1)\bar{y}}{2} - \sum y_t t}{\frac{n+1}{2} - \frac{2n+1}{3}} = \frac{2}{10 \cdot 11} \cdot \frac{\frac{110}{2} 3,75 - 251,25}{5,5 - 7} = 0,54545;$$

$$a_0 = \bar{y} - \frac{n+1}{2} a_1 = 3,75 - 5,5 \cdot 0,54545 = 0,75.$$

Таким образом, уравнение тренда экономического параметра имеет вид

$$\hat{y}_t = 0,75 + 0,54545t. \quad \square \qquad \textbf{(21.9)}$$

При оценке качества тренда проверяется значимость коэффициентов уравнения, степень тесноты взаимосвязи y и t, качество подбора формы кривой. Аналогичный анализ был проведен для случая регрессионной модели в § 20.3.

Для принятых здесь обозначений коэффициент a_i уравнения $\hat{y}_t = f(t)$ считается значимым, если он удовлетворяет t-критерию Стьюдента, т.е.

$$t_{ai} > t_{\alpha},$$

где $t_{ai} = a_i / S_{ai}$; S_{ai} — среднеквадратичное отклонение для коэффициента a_i.

Значение t_{α} выбирается из таблицы t-критерия Стьюдента для доверительной вероятности $F = 1 - \alpha$ и числа степеней свободы $n - m$, где m — количество параметров уравнения.

Для линейной модели тренда

$$S_{a0}^2 = \frac{S_{OCT}^2}{n}; \quad S_{a1}^2 = \frac{S_{OCT}^2}{\sum_{t=1}^{n} (t - \bar{t})^2}; \quad S_{OCT}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2}{n-2},$$

где $n - 2$ — число степеней свободы.

Отсюда следует

$$t_{a0} = \frac{a_0}{S_{OCT} / \sqrt{n}}; \quad t_{a1} = \frac{a_1}{S_{OCT} \Big/ \sqrt{\sum_{t=1}^{n} (t - \bar{t})^2}}.$$

■ **Пример 21.5.** Используя данные примера 21.4, определить значимость коэффициентов тренда.

Решение.

Продолжим табл. 21.7, внеся туда данные для $t-\bar{t}$; $y_t-\bar{y}$; $(t-\bar{t})(y_t-\bar{y})$; $(y_t-\bar{y})^2$; $(\hat{y}_t-\bar{y})^2$; $\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}$.

Окончание табл. 21.7

День, t	$t-\bar{t}$	$y_t-\bar{y}$	$(t-\bar{t})\times$ $\times(y_t-\bar{y})$	$(y_t-\bar{y})^2$	$(\hat{y}_t-\bar{y})^2$	$\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}$
1-й	−4,5	−2,25	10,125	5,0625	6,025	
2-й	−3,5	−2	7	4	3,645	−0,0186
3-й	−2,5	−1,5	3,75	2,25	1,86	0,0124
4-й	−1,5	−1	1,5	1	0,669	0,0248
5-й	−0,5	−0,25	0,125	0,0625	0,074	−0,0041
6-й	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,074	−0,005
7-й	1,5	1	1,5	1	0,669	−0,0041
8-й	2,5	1,5	3,75	2,25	1,86	0,0249
9-й	3,5	2	7	4	3,645	0,0012
10-й	4,5	2,25	10,125	5,0625	6,025	0,0186
Итого			**45,0**	**24,75**	**24,546**	**0,0546**

Используя данные табл. 21.7, получим

$$S_{OCT}^2=\frac{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2}{n-2}=\frac{0,20454}{10-2}=0,0255675;\quad S_{OCT}=0,1599;$$

$$t_{a0}=\frac{a_0}{S_{OCT}/\sqrt{n}}=\frac{0,75}{0,1599/\sqrt{10}}=14,83.$$

Определим

$$\sum_{t=1}^{n}(t-\bar{t})^2=\sum_{t=1}^{n}t^2-2\bar{t}\sum_{t=1}^{n}t+n\bar{t}^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n\bar{t}^2=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-\frac{n+1}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{4n+2-3n-3}{6}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n-1}{6}=\frac{n(n^2-1)}{12}.$$

Тогда $t_{a1}=\dfrac{a_1}{S_{OCT}\Big/\sqrt{\dfrac{n(n^2-1)}{12}}}=\dfrac{0,54545}{0,1599\Big/\sqrt{\dfrac{10\cdot 99}{12}}}=30,98.$

Для числа степеней свободы $n-2=8$, для доверительной вероятности $F=0,99$ (уровень значимости $\alpha=0,01$) по таблице распределения Стьюдента находим $t_{0,01}=3,36$. Откуда $t_{ai}>t_{0,01}$, т.е. коэффициенты уравнения тренда значимы с вероятностью 0,99. □

Тесноту взаимосвязи y и t для линейной модели проверяют при помощи коэффициента корреляции r, а в общем случае — при помощи индекса корреляции R. Заметим, что коэффициент корреляции используется в регрессионном анализе при исследовании взаимосвязей между случайными величинами. В нашем случае одной из величин является время, принимающее целочисленные значения $t = 1, 2, ..., n$ и не являющееся случайной величиной. Однако аппарат корреляционного анализа позволяет установить степень тесноты взаимосвязи между исследуемой случайной величиной и временем, что используется многими авторами при проведении анализа этой взаимосвязи, например в [35].

Коэффициент корреляции определяется формулой

$$r = \frac{\sum_{t=1}^{n}(t-\bar{t})(y_t-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(t-\bar{t})^2 \cdot \sum_{t=1}^{n}(y_t-\bar{y})^2}}. \qquad \textbf{(21.10)}$$

Коэффициент корреляции лежит в пределах $-1 \le r \le 1$. При значении коэффициента корреляции, близком к нулю, связь слабая, а к ± 1 — сильная. Последнее легко показать подстановкой в **(21.10)** уравнения прямой

$$y_t = \hat{y}_t = a_0 \pm a_1 t.$$

Действительно,

$$r = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t t - n\bar{y}\bar{t}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(t-\bar{t})^2 \cdot \sum_{t=1}^{n}(y_t-\bar{y})^2}} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(a_0 \pm a_1 t\right)t - n\left(a_0 \pm a_1\frac{n+1}{2}\right)\frac{n+1}{2}}{\sqrt{\frac{n\left(n^2-1\right)}{12}\sum_{t=1}^{n}\left(a_0 \pm a_1 t - a_0 \mp a_1\frac{n+1}{2}\right)^2}};$$

$$r = \frac{\pm a_1\frac{n\left(n+1\right)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{a_1^2\frac{n\left(n^2-1\right)}{12}\sum_{t=1}^{n}\left(t-\frac{n+1}{2}\right)^2}} = \frac{\pm a_1\frac{n\left(n^2-1\right)}{12}}{\sqrt{a_1^2\frac{n^2\left(n^2-1\right)^2}{12^2}}} = \pm 1.$$

Значимость коэффициента корреляции с доверительной вероятностью $F = 1-\alpha$ определяется с помощью t-критерия Стьюдента по формуле

$$t_r > t_\alpha,$$

где $t_r = r\sqrt{n-2}\big/\sqrt{1-r^2}$.

Количество степеней свободы равно $n - 2$.

Индекс корреляции R и индекс детерминации R^2 для любой формы тренда определяются по формуле

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t - \overline{y})^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})^2}.$$

Если по абсолютной величине коэффициент корреляции r равен индексу корреляции R, то связь между временем и исследуемым показателем линейная.

Значимость индекса детерминации с доверительной вероятностью $F = 1 - \alpha$ (α — уровень значимости) определяется при помощи критерия Фишера по формуле

$$F_R > F_\alpha.$$

Величина F_α находится по таблице распределения Фишера при заданных степенях свободы и уровне значимости. Количество степеней свободы равно $n - m$ и $m - k$, где n — число единиц выборки; m — число коэффициентов уравнения; k — количество уточняемых параметров. Всегда выполняется соотношение

$$k < m.$$

Величина F_R рассчитывается по формуле:

$$F_R = \frac{S_1^2}{S_{OCT}^2},$$

где $S_{OCT}^2 = \dfrac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{n - m}$; $S_1^2 = \dfrac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t - \overline{y})^2}{m - k}$; $\overline{y} = \dfrac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}$.

■ **Пример 21.6.** Используя данные примеров 21.4 и 21.5, определить тесноту взаимосвязи исследуемого параметра и времени при помощи коэффициента корреляции и индекса детерминации.

Решение.

Воспользуемся данными табл. 21.7 и ее продолжением:

$$r = \frac{\sum_{t=1}^{n}(t - \overline{t})(y_t - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(t - \overline{t})^2 \cdot \sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})^2}} = \frac{45}{\sqrt{\frac{n(n^2 - 1)}{12} \cdot 24,75}} = \frac{45}{\sqrt{\frac{10 \cdot 99}{12} \cdot 24,75}} = 0,9959.$$

Значение коэффициента корреляции близко к единице, т.е. связь между ценой и временем тесная. Для определения значимости коэффициента корреляции найдем

$$t_r = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,9959\sqrt{8}}{\sqrt{1-0,9959^2}} = 31,14.$$

Так как табличное значение $t_{0,01} = 3,36$, то $t_r > t_\alpha$, что свидетельствует о значимости коэффициента корреляции.

Индексы детерминации и корреляции:

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} = \frac{24,546}{24,75} = 0,9918; \quad R = 0,996.$$

Индекс корреляции практически равен коэффициенту корреляции, что говорит о линейной зависимости исследуемого параметра от времени.

Для определения значимости индекса корреляции воспользуемся критерием Фишера. Из продолжения табл. 21.7 следует

$$S_1^2 = \sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t - \bar{y})^2 = 24,546; \quad S_{OCT}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{n-2} = 0,0255675;$$

$$F_R = \frac{S_1^2}{S_{OCT}^2} = 960.$$

Из таблицы F-распределения при

$$\alpha = 0,05; \; \nu_1 = m - k = 1; \; \nu_2 = n - m = 8$$

находим $F_R = 5,32$. Так как $F_R > F_\alpha$, то с вероятностью $F = 1 - \alpha = 0,95$ принимается гипотеза о значимости индекса детерминации. □

Так же как и для функции регрессии, качество подбора формы тренда оценивается по критерию Дарбина—Уотсона. Для этого проводится анализ остатков

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t.$$

Если модель тренда адекватна форме подобранной кривой, то остатки должны подчиняться нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, и независимостью соседних значений друг от друга. При использовании метода наименьших квадратов требование к математическому ожиданию выполняется всегда. Простейший способ проверки случайной величины на соответствие нормальному закону состоит в построении гистограммы. Независимость соседних значений друг от друга проверяется с помощью критерия Дарбина—Уотсона:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2} \approx 2 \cdot \left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2}\right).$$

Если ε_t не зависит от ε_{t-1}, то $\sum\limits_{t=2}^{n} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} = 0$ и d = 2. При полной автокорреляции d равен нулю или четырем.

По таблицам Дарбина—Уотсона для заданной доверительной вероятности $F = 1 - \alpha$ определяют критические границы, позволяющие вынести суждения о наличии автокорреляции. Задавшись уровнем значимости α и зная количество наблюдений n, находим из таблицы значения d_n и d_V. При $d_V < d < 4 - d_V$ автокорреляция остатков отсутствует. При $d < d_n$ и $d > 4 - d_n$ автокорреляция имеет место. Если обнаружена существенная автокорреляция остатков, то следует пересмотреть форму выбранной кривой.

■ **Пример 21.7.** Используя данные примеров 21.4—21.6, оценить качество подбора тренда.

Решение.

По таблице Дарбина—Уотсона можно определить значения d_n и d_V только для $n \geq 15$. Значения d_n и d_V для n = 15 приведены на рис. 21.3.

Рис. 21.3

Учитывая, что d_V медленно изменяется при изменении n, будем считать, что наличие автокорреляции остатков не подтверждается. □

Поскольку моделируемый процесс подвержен случайным воздействиям, то прогноз может быть сделан в виде доверительного интервала. Среднее значение прогнозируемой величины определяется по тренду, а ширина доверительного интервала зависит от дисперсии остатков, длины периода прогнозирования и доверительной вероятности, с которой прогнозируемая величина попадет в доверительный интервал.

Выражение для верхней и нижней границ доверительного интервала для линейного тренда имеет вид

$$y = \hat{y}_t \pm t_\alpha S_{OCT} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t - \overline{t})^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} (t - \overline{t})^2}},$$

где t_α — табличное значение t-критерия Стьюдента для доверительной вероятности $F = 1 - \alpha$ и числа степеней свободы n − 2;

$S_{OCT}{}^2 = \dfrac{\sum\limits_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y})^2}{n - 2}$ — дисперсия остатков.

Для знака «плюс» имеем верхнюю границу доверительного интервала, а для знака «минус» — нижнюю (рис. 21.4). Для определения величины доверительного интервала надо для данного значения времени t из верхней границы $y_{\max}$ вычесть нижнюю границу $y_{\min}$, т.е.

$$\Delta y = y_{\max} - y_{\min} = 2t_{\alpha} S_{OCT} \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(t-\bar{t})^2}{\sum\limits_{t=1}^{n}(t-\bar{t})^2}}.$$

На рис. 21.4 зона ретро представлена во временном интервале от 1 до 19 (n = 19). Минимальное значение доверительного интервала достигается при $t=\bar{t}=10$, т.е. наименьшая дисперсия будет наблюдаться в середине данных по t.

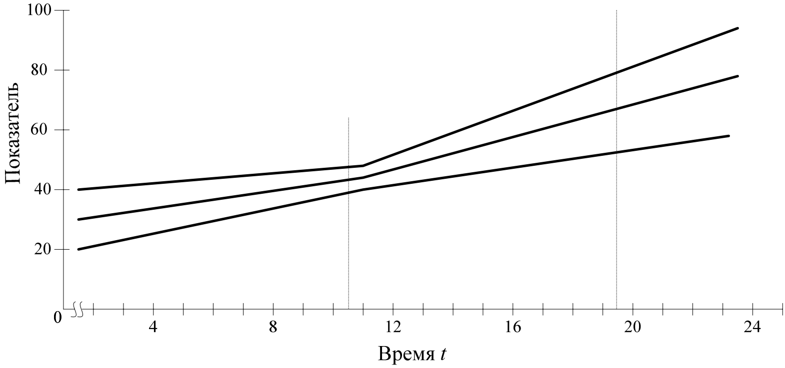


Рис. 21.4

Если мы хотим сделать прогноз на l шагов вперед, то $t=n+l$. Тогда нижняя и верхняя границы доверительного интервала и доверительный интервал для прогнозируемой точки будут определяться по формулам

$$y = \hat{y}_{n+l} \pm t_{\alpha} S_{OCT} \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(n+l-\bar{t})^2}{\sum\limits_{t=1}^{n}(t-\bar{t})^2}};$$

$$\Delta y = 2t_{\alpha} S_{OCT} \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(n+l-\bar{t})^2}{\sum\limits_{t=1}^{n}(t-\bar{t})^2}}.$$

Чем дальше момент прогнозирования, тем шире доверительный интервал (см. рис. 21.4).

■ **Пример 21.8.** Используя данные примеров 21.4—21.7, дать прогноз для 12-го дня и определить доверительный интервал для доверительной вероятности $F = 0{,}95$.

Решение.

Подставляя исходные данные в **(21.9)**, получим $\hat{y}_{12} = 0{,}75 + 0{,}545 \cdot 12 = 7{,}2956$. Табличное значение t-критерия Стьюдента для $n - 2 = 8$ и $\alpha = 0{,}05$ равно $t_\alpha = 2{,}31$. Так как

$$S_{OCT} = 0{,}1599; \quad \bar{t} = 5{,}5; \quad n = 10; \quad \sum_{t=1}^{n} (t - \bar{t})^2 = \frac{n(n^2-1)}{12} = \frac{10 \cdot 99}{12} = 82{,}5, \text{ то}$$

$$y = 7{,}2956 \pm 2{,}31 \cdot 0{,}1599 \sqrt{1 + 0{,}1 + \frac{(12-5{,}5)^2}{82{,}5}} = 7{,}2956 \pm 0{,}469.$$

Таким образом, с доверительной вероятностью 0,95 значение параметра на 12-й день будет находиться в интервале $6{,}83 < \Delta y < 7{,}76$. □

Упражнения

ТЕСТ 21.1

Удается ли, используя метод сглаживания ошибок, прогнозировать скачки динамического ряда?

ЗАДАЧИ

21.1. В таблице приведены данные по цене акции за 6 дней. Определить прогноз на каждый из следующих дней, положив прогноз первого дня равным 123.

День, t	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й
y_t	125	131	124	117	126	129

21.2. Используя данные примера 21.1, определить методом Бокса—Дженкинса прогноз на каждый из следующих дней, положив прогноз первого дня равным 9. Для наглядности табл. 21.1 примера 21.1 приведем здесь же.

День, t	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
y_t	8,9	9,1	8,9	9,08	8,96	8,9	9,0	9,5	9,6	9,56

21.3. Используя данные примеров 21.4—21.8, дать прогноз для 11-го и 14-го дней и определить доверительный интервал для доверительной вероятности $F = 0{,}95$.

Глава 22 МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

22.1. Основные понятия метода Монте-Карло

Для учета влияния неопределенности на эффективность проекта используется также способ имитационного моделирования. Одним из методов этого способа является метод Монте-Карло. Довольно подробно этот метод описан в работе [12].

Впервые описание метода Монте-Карло появилось в 1949 г. Название методу дал известный своими казино город Монте-Карло в княжестве Монако, так как именно рулетка является простейшим механическим генератором процесса получения случайных чисел, используемых в данном методе. При использовании метода Монте-Карло строится математическая модель результирующего показателя как функции от переменных и параметров. Математическая модель пересчитывается при каждом новом имитационном эксперименте, в течение которого значения основных неопределенных переменных выбираются случайным образом на основе генерирования случайных чисел. Результаты всех имитационных экспериментов объединяются в выборку и анализируются с помощью статистических методов в целях получения закона распределения вероятностей результирующего показателя. В отдельных случаях закон распределения не определяют, а ограничиваются моментами, характеризующими статистические параметры объекта.

Для анализа имитационных моделей могут быть использованы современные ЭВМ. Это связано с тем, что расчеты являются очень трудоемкими и их количество велико.

Алгоритм определения закона распределения интересующего показателя, или моментов, этого распределения сводится к следующему:

1. Строится математическая модель результирующего показателя как функции от переменных и параметров. Под *переменными* понимаются величины, которые будут изменяться в процессе компьютерного эксперимента. *Параметры* — это те величины, которые не изменяются во времени.

2. Проводится анализ выбранных переменных. Из их числа выбираются только те, изменение которых существенным образом влияет на результат. Для этих целей можно, например, провести анализ чувствительности исследуемого основного показателя от различных факторов и выбрать те из них, к которым этот показатель является наиболее чувствительным.

3. Определяются законы распределения выбранных переменных и корреляционные связи между ними.

4. Проводится компьютерный эксперимент, состоящий из заданного количества опытов. Количество опытов должно быть достаточным для построения репрезентативной модели.

4.1. Для каждого опыта генерируются случайные числа, являющиеся реализацией каждой случайной переменной.

4.2. Для полученных случайных чисел рассчитывают результирующий показатель. В результате получают выборку, имеющую количество показателей, равное количеству опытов.

4.3. Проводят статистический анализ выборки на предмет определения закона распределения результирующего показателя или для определения моментов этого распределения.

Метод Монте-Карло применим к любому выходному показателю инвестиционного проекта. К таким показателям могут относиться, например, чистый приведенный доход, индекс прибыльности, внутренняя норма доходности и т.д. В работе [12] применение метода Монте-Карло рассмотрено на примере анализа чистого приведенного дохода.

22.2. Математическая модель результирующего показателя

В общем случае исследуемый, или основной, показатель может быть представлен как функция переменных и параметров:

$$F = F\left(A_1, A_2, ..., A_l, ..., A_L, B_1, B_2, ..., B_k, ..., B_K\right), \qquad \textbf{(22.1)}$$

где F — исследуемый показатель инвестиционного проекта; A_l — переменная под номером l; L — общее количество переменных; B_k — параметр под номером k; K — общее количество параметров.

Представленные в функции **(22.1)** переменные удобно выразить через их номинальные значения и относительные переменные. Номинальным значением переменной называют такое ее значение, которое присвоено ей в базисном варианте бизнес-плана. Если основной показатель проекта получен при учете всех номинальных значений переменных, то его также называют *номинальным*. Относительное значение переменной запишем в виде

$$a_l = \frac{A_l}{A_l^0}, \tag{22.2}$$

где A_l^0 — номинальное значение переменной.

Тогда функция переменных и параметров приобретает вид

$$F = f\left(a_1 A_1^0,\ a_2 A_2^0,\ \ldots,\ a_l A_l^0,\ \ldots,\ a_L A_L^0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k,\ \ldots,\ B_K\right). \tag{22.3}$$

Рассмотрим модель на примере внутренней нормы доходности. ***Внутренняя норма доходности*** — это ставка дисконтирования, при которой приведенные доходы равны приведенным расходам. Внутренняя норма доходности находится путем решения приведенного ниже уравнения относительно Q:

$$\sum_{j=1}^{n_1} \frac{K_j}{(1+Q)^j} = \sum_{j=n_1+1}^{n} \frac{E_j}{(1+Q)^j}, \tag{22.4}$$

где K_j — инвестиционные расходы в году под номером j; E_j — инвестиционные доходы в году под номером j; n_1 — срок инвестирования в проект в годах; n — продолжительность инвестиционного проекта в годах.

В уравнении **(22.4)** помимо внутренней нормы доходности Q входит еще пять величин: K_j, $\mathring{A}_j$, n_1, n, j. Номер года j является параметром. Остальные четыре величины могут выступать как параметрами, так и переменными. Срок инвестирования в проект n_1 для типовых инвестиционных проектов не превышает трех лет. Обычно эти сроки выполняются. Поэтому n_1 можно принять в виде параметра. Для инновационных проектов этот срок может доходить до десяти лет, и ввод в строй инновационного объекта является неопределенной задачей. Поэтому срок n_1 в данном случае является переменной величиной.

Срок инвестиционного проекта n также рассматривается либо как параметр, либо как переменная. Например, при очень больших сроках инвестиционного проекта эта величина представляется в виде параметра, так как более поздние платежи оказывают незначительное влияние на исследуемый показатель, т.е. этот показатель слабочувствителен к сроку инвестиционного проекта. Например, для платежа, выплачиваемого через двадцать лет после начала проекта, при ставке дисконтирования 25% годовых дисконтный множитель равен

$$\frac{1}{(1+0,25)^{20}} = 0,009.$$

При платежах, незначительно отличающихся год от года, влияние этого платежа, например, на чистый приведенный доход будет менее 1%.

При небольших сроках инвестиционного проекта, например до 10 лет, и при неопределенности срока жизни продукта этот срок является переменной величиной.

Инвестиционные расходы K_j и инвестиционные доходы E_j принимаются, как правило, переменными величинами. Эти величины, в свою очередь, являются функциями ряда показателей, к которым относятся, в частности, цена сбыта, объем сбыта, ставки налогов, постоянные и переменные издержки, заработная плата и т.д.

22.3. Анализ выбранных переменных

После того как определены переменные, проводится их отбор для модели. С одной стороны, чем больше переменных будет использовано в модели, тем точнее результаты. Однако включение в модель переменных, которые слабо влияют на результат, усложняет модель и, что самое главное, затрудняет ее восприятие. Поэтому отбирают только те переменные, которые существенным образом влияют на результат. Чаще всего для выбора переменных используют чувствительность исследуемого показателя инвестиционного проекта к изменению переменной.

Анализ чувствительности рассмотрен в § 18.6. Показателем чувствительности проекта служит эластичность исследуемого параметра по вариации в точке 100%. Например, эластичность внутренней нормы доходности по объему реализации может быть рассчитана по формуле

$$E_p(Q) \approx \frac{\Delta Q}{Q} \Big/ \frac{\Delta q}{q},$$

где ΔQ — приращение внутренней нормы доходности, соответствующие приращению объема реализации продукции Δq; Δq — приращение объема реализации продукции; q — номинальный объем реализации продукции.

Эластичность внутренней нормы доходности по объему реализации показывает, на сколько процентов относительно номинальной величины изменится внутренняя норма доходности при изменении объема реализации на 1%.

22.4. Законы распределения переменных и их характеристики

После окончательного выбора переменных нужно найти законы их распределений и установить корреляционные связи между этими переменными. Обычно в качестве законов распределения переменных используются наиболее простые, к числу которых можно отнести равномерный, нормальный, треугольный. В работе [12] проведен анализ влияния типа закона распределения и корреляционной связи между переменными на выходные характеристики модели. Там на примере проекта по производству труб исследуются характеристики чистого приведенного дохода при двух переменных: цене сбыта и объеме сбыта. Если переменные являлись независимыми случайными величинами, то математическое ожидание при равномерном распределении превысило математическое ожидание при равнобедренном треугольном распределении на 1,9%, а стандартное отклонение превысило на 61%, т.е. риск проекта существенным образом зависит от закона распределения. При учете корреляционной зависимости между переменными использовался равномерный закон распределения. Функция регрессии объема продаж от цены продаж принималась линейной типа $q = q_0 + \beta \cdot p$, где q — объем продаж; p — цена продаж. Коэффициент регрессии принимался отрицательным и равным $\beta = -0,7$. В этом случае математическое ожидание без учета связи меньше математического ожидания с учетом связи на 0,14%, а стандартное отклонение без учета связи превысило стандартное отклонение с учетом связи на 1532%. Таким образом, учет корреляционной связи необходим при проведении анализа. Заметим при этом, что анализ проводился только при учете двух переменных, что также сказалось на величине ошибки. Учет большего количества переменных снизит этот эффект.

Определить законы распределения переменных и их моменты можно по выборке. При этом необходимо иметь в виду, что соответствующие материалы существуют и они доступны разработчику бизнес-плана. В том случае, если такие материалы отсутствуют, например, при разработке инновационного проекта для вновь изобретенного продукта, для определения законов распределения переменных можно воспользоваться методом аналогий или экспертным методом.

Начнем изучение вопроса с определения отдельных характеристик (моментов) законов распределения. Пусть выборка представлена в виде стационарного динамического ряда. Рассмотрим динамический ряд одной из переменных, например цены продукта, издержек, налога и т.д. Этот ряд представим в виде

$$A_{l,1},\ A_{l,2},\ \ldots,\ A_{l,t},\ \ldots,\ A_{l,T}, \tag{22.5}$$

где A_l — значение переменной под номером l (общее количество переменных равно L); t — номер периода (общее количество периодов равно T).

В каждом динамическом ряду переменная имеет свою размерность. Поэтому при анализе удобнее перейти к относительным безразмерным величинам, характеризующим изменение переменной от периода к периоду:

$$a_{l,t} = \frac{A_{l,t}}{A_l^0}, \tag{22.6}$$

где $A_{l,t}$ — значение переменной под номером l в начале периода t;

A_l^0 — номинальное значение переменной.

Теперь от ряда **(22.5)** можно перейти к ряду

$$a_{l,1},\ a_{l,2},\ \ldots,\ a_{l,t},\ \ldots,\ a_{l,T}. \tag{22.7}$$

Оценка математических ожиданий и ковариаций переменных i-го и j-го типов будем определять по ряду **(22.7)**.

В качестве математического ожидания переменной под номером l можно использовать среднее арифметическое

$$\bar{a}_l = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_{l,t}. \tag{22.8}$$

Для расчета выборочной ковариации i-й и l-й переменных используется формула

$$\sigma_{il} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(a_{i,t} - \bar{a}_i\right)\cdot\left(a_{l,t} - \bar{a}_l\right). \tag{22.9}$$

Дисперсия, среднее квадратичное отклонение и коэффициент корреляции подчиняются соотношениям

$$\sigma_{ll} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(a_{l,t} - \bar{a}_l\right)^2;\quad \sigma_l = \sqrt{\sigma_{ll}}; \tag{22.10}$$

$$r_{il} = \frac{\sigma_{il}}{\sigma_i \sigma_l}. \tag{22.11}$$

Выражение **(22.9)** представляет собой квадратную матрицу ковариаций размером $L \times L$. Главной диагональю этой матрицы являются дисперсии. Для анализа степени связи между переменными следует от матрицы ковариаций σ_{il} перейти к матрице коэффициентов корреляций r_{il} **(22.11)**. Это связано с тем, что коэффициенты корреляций являются нормированными величинами. Их значения изменяются от -1 до $+1$.

При определении закона распределения случайной величины задаются некоторым известным законом распределения и затем проверяют эту гипотезу на значимость, используя выборку.

Простейшим методом проверки гипотезы о законе распределения является визуальный. Он заключается в построении гистограммы по выборке и анализу ее внешнего вида. Метод недостаточно точен, но может быть использован при определении закона распределения в нашем случае. Наиболее полная и точная проверка соответствия выбранного распределения реальному производится с помощью критерия Пирсона, рассмотренного в главе 19.

22.5. Компьютерный эксперимент

После составления модели проводят компьютерный эксперимент, состоящий из ряда опытов. Для каждого опыта генерируются случайные числа, являющиеся реализацией каждой случайной переменной. Если переменные являются независимыми, то числа генерируются независимо друг от друга. Если имеются переменные с существенной корреляционной связью, то эту связь учитывают в генераторе переменных. При этом можно поступить, например, следующим образом. Рассмотрим случай корреляционной зависимости друг от друга только двух переменных. Подход может быть обобщен для любого количества переменных.

Пусть существует корреляционная связь между переменными a_l и a_i. Тогда зависимость между этими переменными при линейной функции регрессии можно представить в виде

$$a_{lt} = \hat{a}_l + \varepsilon_{lt} = a_{l0} + a_{l1} a_i + \varepsilon_{lt}, \tag{22.12}$$

где $\hat{a}_l = a_{l0} + a_{l1} a_i$ — функция регрессии; ε_{lt} — возмущение переменной a_l, являющееся случайной переменной, в опыте под номером t (значение этой переменной изменяется для каждого наблюдения a_i).

Коэффициенты регрессии рассчитываются по данным выборки. При этом используются формулы

$$\left.\begin{aligned} a_{l1} &= \frac{\overline{a_l a_i} - \overline{a}_l \cdot \overline{a}_i}{\overline{a_i^2} - \overline{a}_i^2}; \\ a_{l0} &= \overline{a}_l - a_{l1}\overline{a}_i, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(22.13)}$$

где $\overline{a_l a_i} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_{jt} a_{lt}$; $\overline{a}_l = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_{lt}$; $\overline{a}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_{it}$; $\overline{a_i^2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_{it}^2$.

Таким образом, в эксперименте под номером t генерируется число a_{it} и возмущение ε_{lt}. Эти два числа подставляются в формулу **(22.12)** и рассчитывается a_{lt}. Затем числа a_{it} и a_{lt} подставляются в модель наряду с другими значениями переменных и рассчитывается значение результирующего показателя под номером *t*.

Количество опытов в компьютерном эксперименте должно быть достаточным для построения репрезентативной модели. Например, для определения количества опытов весь диапазон полученных в результате этих опытов значений делят на интервалы. Количество интервалов следует выбирать более десяти. Минимальное значение частот в интервале не должно быть меньше 5—10.

И наконец, проводят статистический анализ выборки, при этом определяют либо моменты распределения, либо вид закона распределения результирующего показателя. Для этих целей используются материалы главы 19.

Упражнения

ЗАДАЧИ

22.1. Составить модель для внутренней нормы доходности при условии, что переменными модели являются инвестиционные доходы и расходы, а также продолжительность инвестиционного проекта.

22.2. В результате проведенного анализа чувствительности чистого приведенного дохода инвестиционного проекта получены результаты, представленные в таблице.

Показатель	Цена продукта	Объем продаж	Стоимость оборудования	Ставка налога	Заработная плата	Постоянные издержки
Чувствительность	20	15	−2	−6	−3	−9

Отобрать из перечисленных показателей четыре переменные модели.

22.3. Проведено обследование 12 цен продаж и объемов продаж товара исследуемого проекта. Полученная выборка представлена в таблице. Определить ковариацию и коэффициент корреляции, построить регрессионную функцию модели для номинальной цены продаж, равной 20, и номинального объема продаж, равного 7000, а также ряд возмущений объема продаж.

Номер месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Цена продаж	19	23	17	20	27	26	16	19	25	15	29	18
Объем продаж	7597	6839	8006	6548	6123	6034	8032	7783	6389	8120	5890	7658

ТЕСТ 22.1

Укажите правильный ответ.

Корреляционная зависимость между переменными:

- слабо влияет на характеристики модели;
- сильно влияет на характеристики модели.

Глава 23 УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ

23.1. Основы управления рисками

Управление рисками является частью процесса управления проектом, описанного в § 3.4. Так же как и при управлении проектом, при управлении рисками в качестве функций управления выступают *планирование*, *контроль*, *контроллинг*, *принятие решения*.

Планирование рисков — это упорядоченный процесс обработки информации в целях выявления возможных рисков и установления показателей для преодоления последствий неблагоприятных ситуаций.

После идентификации возможных рисков анализируется степень их влияния на характеристики проекта. Планы составляются с учетом минимизации влияния рисков на эффекты и эффективности проекта.

Важным этапом в планировании рисков является поиск альтернатив. Поиск альтернатив позволяет на этапе планирования рассмотреть все возможные альтернативы преодоления последствий влияния рисков на характеристики проекта и выбрать наиболее эффективные из этих альтернатив.

При планировании рисков рассматриваются не только отдельные риски, но также устанавливаются их взаимосвязи и анализируется совокупный эффект от их воздействия.

На основе проведенного анализа строятся прогнозы. *Прогнозы* — это предсказания о будущем положении дел, составленные на основе практического опыта и теоретических знаний. В качестве методов прогнозирования можно использовать экспертный метод или математико-статистические методы, рассмотренные в главе 21.

Функция контроля рисков является систематически протекающим процессом обработки информации. Эта функция предназначена для проверки соответствия плановых и реальных показателей, полученных в результате завершения тех или иных этапов реализации проекта.

Контроллинг представляет собой координацию общей системы управления рисками.

Решение — это выбор, который должен сделать руководитель при наступлении неблагоприятных ситуаций. Для принятия решения используется информация, получаемая в результате планирования, контроля и контроллинга. На основе этой информации создается модель принятия решения.

Важнейшим элементом модели принятия решений являются альтернативы. Например, при снижении цены на продукт можно увеличить объем сбыта, уменьшить издержки, отказаться от данного направления в бизнесе и т.д.

Поскольку многие показатели инвестиционного проекта являются случайными величинами, то их изменение может привести как к негативным, так и к позитивным последствиям. Поэтому при принятии решения руководителю необходимо использовать результаты прогнозирования рисков. В случае благоприятных для проекта возможностей при рыночном изменении показателей необходимо принять решение о наилучшем использовании ситуации для предприятия.

23.2. Методы снижения последствий рисковых событий

Обычно рассматривают следующие *методы снижения последствий риска*:

- диверсификацию рисков;
- страхование рисков;
- распределение рисков;
- резервирование средств.

Диверсификация (размывание, распределение) рисков основана на выборе некоррелированных друг с другом процессов. Связь между такими процессами мала или вовсе отсутствует. Рассматривают, в частности, следующие *формы распределения риска* в процессе создания инвестиционного проекта:

- диверсификацию видов деятельности, товаров и услуг;
- диверсификацию потребителей;
- диверсификацию поставщиков;
- диверсификацию участников проекта.

Страхование рисков, или уклонение от рисков, представляет собой способ снижения рисков за счет передачи этих рисков страховой компании за вознаграждение. Зарубежная практика страхования использует полное страхование инвестиционных проектов. Российское законодательство позволяет пока только частично страховать риски проекта: здания, оборудование, персонал. При этом применяются обычно имущественное страхование и страхование от несчастных случаев.

Имущественное страхование принимает следующие формы, например, для крупного строительства:

- страхование риска подрядного строительства, предназначенное для защиты незавершенного строительства от риска материальных потерь или ущерба;
- страхование грузов, предназначенное для защиты перевозимых морским или воздушным транспортом грузов от риска материальных потерь или ущерба;
- страхование оборудования, принадлежащего подрядчикам и субподрядчикам, предназначенное для защиты от риска материальных потерь.

Страхование от несчастных случаев:

- страхование общей гражданской ответственности, предназначенное для защиты генерального подрядчика, если в результате его деятельности «третья сторона» потерпит телесные повреждения, личный ущерб или повреждение имущества;
- страхование материальной ответственности для защиты генерального подрядчика в случае недоработок в подготовке архитектурного или технического проекта, управления проектом и т.д.

Распределение риска между участниками проекта реализуется при разработке финансового плана и контрактных документов. Распределение риска может быть качественным и количественным.

При качественном распределении риска участники проекта принимают решения, которые либо увеличивают степень риска тех или иных участников проекта, либо понижают ее. При этом чем большую степень риска возлагают, например, на инвесторов, тем труднее этих инвесторов привлечь к проекту.

При количественном распределении риска применяются рассмотренные выше методы, например, дерево решений, используемое для установления последовательности этапов проекта. На каждом из этапов участвуют, по крайней мере, две стороны: покупатель — продавец, заказчик — исполнитель. Заказчик стремится уменьшить стоимость контракта при выполнении требований к срокам и качеству, а исполнитель — получить максимальную прибыль. Степень риска должна уравнять ту и другую стороны.

Компенсация рисков предусматривает создание резервов. Резервирование средств на покрытие непредвиденных расходов является методом борьбы со сбоями в выполнении проекта.

При резервировании средств определяют:

- необходимые суммы на покрытие непредвиденных расходов;
- структуру резерва на покрытие непредвиденных расходов (например, резервы, оговоренные контрактом, резервы по категориям затрат);

• цели использования установленных резервов (например, для вновь выявленной работы по проекту, компенсации непредвиденных изменений трудозатрат и т.д.).

Финансовые резервы создаются путем выделения дополнительных средств на покрытие непредвиденных расходов. В российских условиях финансовые резервы должны составлять около 20% затрат на реализацию проекта, за рубежом — около 5%.

Материальные запасы означают создание специального резерва, например сырья и материалов, для обеспечения бесперебойного производства в течение определенного времени без дополнительных поставок.

В качестве информационных резервов можно рассматривать приобретение дополнительной информации. Целью такого приобретения являются уточнение параметров, повышение уровня надежности и эффективности проекта.

Упражнения

ТЕСТ 23.1

Укажите правильный ответ.

Страхование рисков представляет собой:
- выбор некоррелированных друг с другом процессов;
- передачу рисков страховой компании за вознаграждение;
- создание резервов;
- распределение риска между участниками проекта.

ТЕСТ 23.2

Укажите правильный ответ.

В функцию контроллинга входит:
- планирование;
- контроль;
- принятие решений;
- координация общей системы управления.

ТЕСТ 23.3

Укажите правильный ответ.

Контроль рисков предназначен:
- для проверки соответствия плановых и реальных показателей;
- для принятия решений;
- для поиска альтернатив.

ТЕСТ 23.4

Перечислите функции управления рисками.

Часть 6

ИНВЕСТИЦИОННЫЕ КАЧЕСТВА ЦЕННЫХ БУМАГ

Глава 24 ДОХОДНОСТЬ И РИСК В ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЦЕННЫХ БУМАГ

24.1. Введение в финансовый рынок

Торговля ценными бумагами происходит, как правило, на биржевом рынке. Фондовая биржа представляет собой здание с операционным залом, где заключаются сделки с ценными бумагами. Электронная биржа — это компьютерная сеть, к которой подключены терминалы компаний — членов биржи. Эти терминалы могут быть вынесены в офисы данных компаний.

Листинг — это процедура включения ценной бумаги эмитента в котировальный список данной биржи.

Участниками фондового рынка являются:

- государство;
- фирмы;
- индивидуальные инвесторы;
- страны.

В работе фондовых бирж могут принимать участие как профессионалы, так и юридические и физические лица, выходящие на фондовый рынок в целях временного размещения свободных денежных средств.

Участниками фондовой биржи являются продавцы, покупатели и посредники. К посредникам относятся брокер и дилер.

Брокер — работник биржи, получающий за свои услуги комиссионные и действующий от своего имени или от имени клиента. В отдельных случаях он получает заработную плату.

Дилер — физическое или юридическое лицо, занимающееся перепродажей ценных бумаг от своего имени. Доход дилера складывается за счет разницы в ценах покупки и продажи.

Инвестиционные фонды — любые акционерные общества открытого или закрытого типа, привлекающие средства за счет эмиссии собственных акций и инвестирующие средства в ценные бумаги других эмитентов.

24.2. Технический и фундаментальный анализ

Различные методы инвестиционного анализа позволяют определить характеристики ценных бумаг, их динамику и принять правильное инвестиционное решение. На Западе интенсивное развитие анализа ценных бумаг началось после выхода в свет книги американских ученых Грэхема и Додда «Security Analysis» в 1934 г. Книга посвящена исследованию фондового рынка и ценных бумаг. Развитие исследований характеристик ценных бумаг привело к формированию таких научных школ, как технический и фундаментальный анализ. До 1970-х гг. эти школы развивались параллельно. С середины 1970-х гг. начинается взаимное использование научных результатов.

Сторонники школы технического анализа в основу анализа характеристик ценных бумаг положили динамику их биржевых курсов [14]. При этом считается, что вся необходимая информация о финансовом состоянии корпорации отражается в этих биржевых курсах. Техническая школа занимается прежде всего изучением рынка ценных бумаг, спросом и предложением на эти ценные бумаги. На основе анализа биржевых курсов строятся модели цен различных ценных бумаг, по которым делаются прогнозы на будущее и даются рекомендации о принятии того или иного инвестиционного решения.

Сторонники школы фундаментального анализа придерживаются следующих основных концепций [7; 40]:

- изучение балансов, отчетов о прибылях и убытках и других финансовых документов, публикуемых корпорациями;
- изучение показателей финансовой деятельности компаний (доходы, объем продаж, активы и пассивы, норма прибыли на собственный капитал и пр.);
- анализ состояния рынков, на которые данная компания выходит со своей продукцией;
- сравнение рыночной цены акций с их действительной стоимостью;
- принятие инвестиционного решения о покупке или продаже акций.

24.2.1. ТЕХНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Классический технический анализ предусматривает прежде всего построение системы графиков цен, спроса и предложения (объема продаж) в зависимости от времени. Эти графики называют *чартами* (от *англ.* chart).

Различают чарты:

- линейные;
- гистограммы;
- крестики-нолики;
- японские свечи.

В зависимости от масштаба времени по оси абсцисс рассматривают следующие чарты:

- тики (отражают каждое изменение цены);
- поминутные;
- почасовые;
- дневные;
- понедельные;
- помесячные;
- погодовые.

Пример линейного графика, построенного в ежедневном масштабе, представлен на рис. 24.1 (зависимость курса доллара от времени). При помощи линейного графика можно изображать временные зависимости цены, объема сделок и т.д.

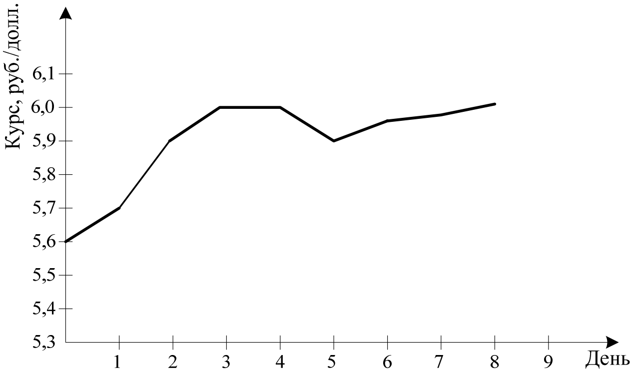


Рис. 24.1. Пример линейного графика

Зависимость цены акции или другой ценной бумаги можно представить также при помощи гистограмм (рис. 24.2) или «японских свеч» (рис. 24.3).

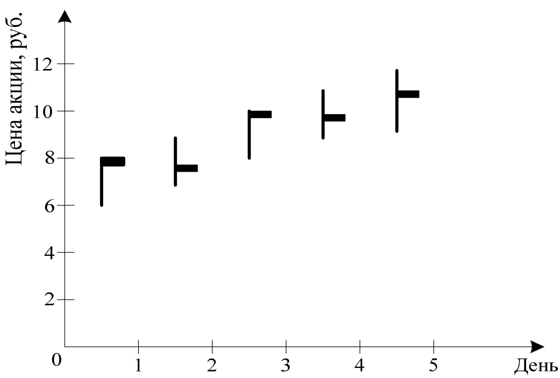


Рис. 24.2. Гистограмма цены акции

Верхняя и нижняя координаты каждого столбика обозначают высшую и низшую цены за рассматриваемый период. «Отросток» справа обозначает цену закрытия. Если на графике представлен также «отросток» слева, то он обозначает цену открытия.

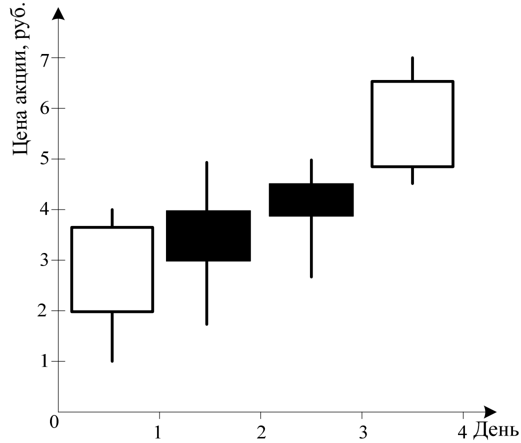


Рис. 24.3. Представление цены акции при помощи «японских свеч»

Прямоугольник называется *телом свечи*, вертикальные палочки сверху и снизу — *тенями*. Верхняя и нижняя координаты теней обозначают высшую и низшую цены за рассматриваемый период. Верхняя координата белого тела обозначает цену закрытия, нижняя координата — цену открытия, а верхняя координата черного тела обозначает цену открытия, нижняя координата — цену закрытия.

Тенденцией называется ломаная линия, проведенная через точки, соответствующие ценам закрытия. При этом получается осциллирующая функция, у которой на медленные изменения накладываются быстрые колебания (рис. 24.4).

На рис 24.5 представлен график в виде «крестиков-ноликов». Если цена меньше предыдущей, то ее отмечают нулем (первый столбик). Так происходит до тех пор, пока цена не станет больше предыдущей. В этом случае начинают строить следующий столбик, а цену отмечают крестом (второй столбик) до тех пор, пока цена не станет меньше предыдущей. Затем начинают строить столбик из нулей и т.д.

Ценовой тренд — это отрезок прямой, показывающий направление движения цен. Движение цен на бирже диктуется спросом и предложением. Если спрос превышает предложение, то цены растут, и наоборот. Различают следующие т и п ы трендов:

а) *бычий* — цена возрастает во времени;

б) *медвежий* — цена падает во времени;

в) *боковой* — цена колеблется относительно постоянного значения.

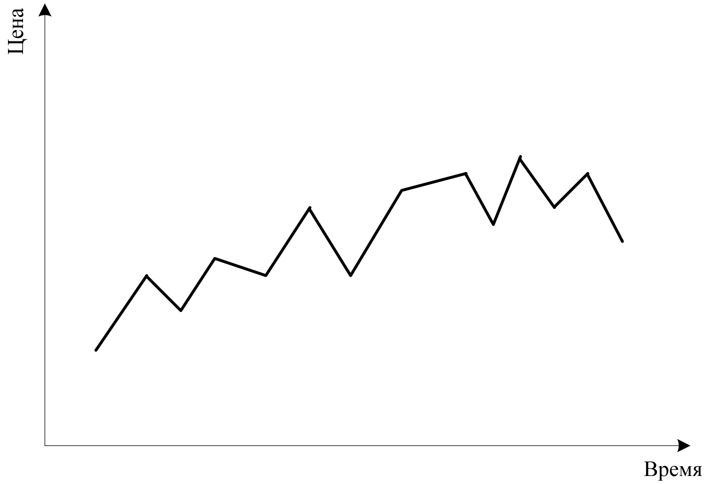


Рис. 24.4. Тенденция

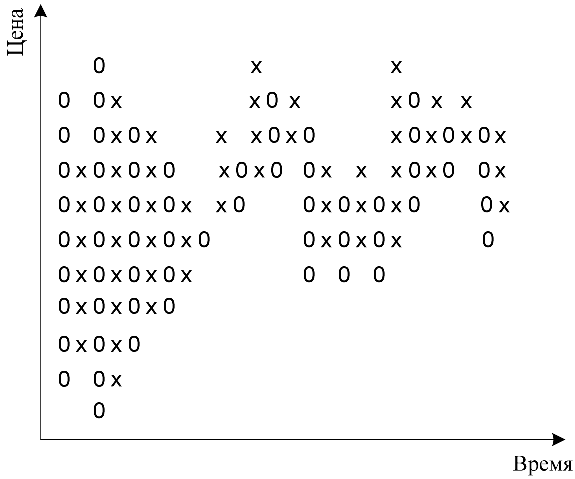


Рис. 24.5. График в виде «крестиков-ноликов»

При бычьем тренде цена в тот или иной момент перестает возрастать, как бы наталкиваясь на некоторое препятствие, называемое *уровнем сопротивления*, а при медвежьем тренде цена в тот или иной момент перестает убывать, как бы наталкиваясь на некоторое препятствие, называемое *уровнем поддержки*.

Пример бычьего тренда показан на рис. 24.6, а пример медвежьего тренда — на рис. 24.7.

Сложность при построении тренда заключается в выборе точек, через которые проводится линия. Подробные и оригинальные методы построения особых точек для проведения линии тренда рассмотрены в работе [14]. Автор этой книги Демарк пользуется в основном дневными графиками цен. Он предлагает строить линии трендов не слева направо, а, наоборот, справа налево, так как движение цен в настоящий момент гораздо важнее, чем движение рынка в прошлом.

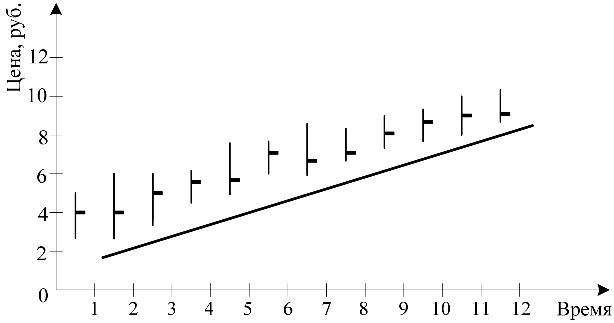


Рис. 24.6. Бычий тренд

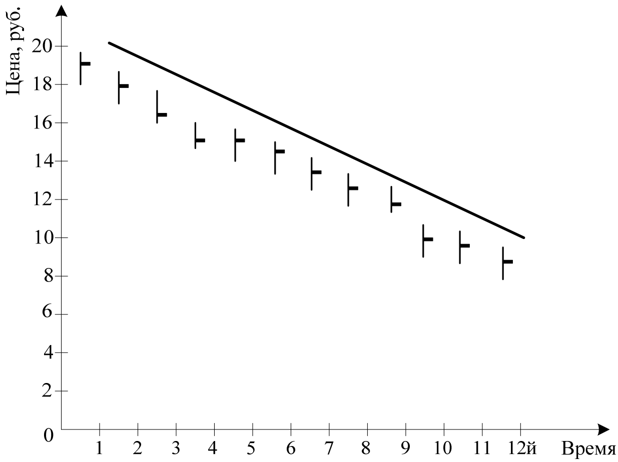


Рис. 24.7. Медвежий тренд

Интересными являются предложенные Демарком [14] *методы определения моментов ценовых прорывов.* Перед ожидаемым прорывом вверх инвесторы покупают ценные бумаги. Если же цены, несмотря на ожидания, продолжают падать, то эти инвесторы терпят убытки.

Рассмотрим одну из предложенных Демарком методик, позволяющую предусмотреть прорыв вверх. Ее смысл поясняется рис. 24.8.

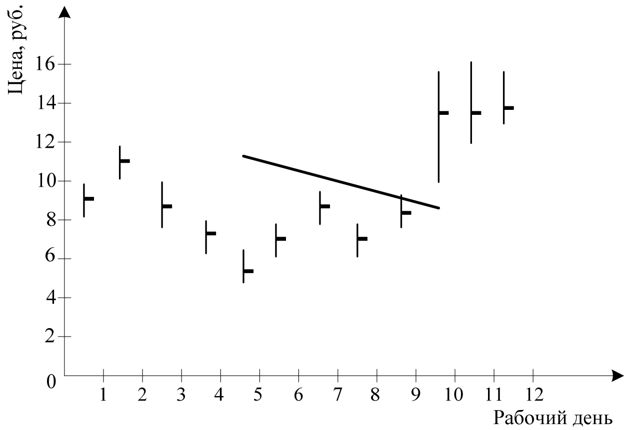


Рис. 24.8. Метод определения моментов ценовых прорывов

На девятый день цены несколько поднялись по сравнению с ценами предыдущего дня, и тренд пересекает столбик девятого дня. Можно ли на следующий (десятый) день ожидать внутридневного прорыва? Демарк утверждает, что вероятность прорыва велика, так как цена закрытия накануне прорыва вверх (восьмой день) ниже, чем в предыдущий (седьмой) день. В этом случае можно рекомендовать покупать ценные бумаги при внутридневном пересечении линии тренда.

Помимо тренда технический анализ использует ряд других широко используемых на фондовом рынке методов. К ним прежде всего относятся [14]:

- скользящие средние;
- осцилляторы;
- волновая теория Элиота;
- теория циклов;
- коррекции.

24.2.2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Основная идея фундаментального анализа состоит в вычислении некоторых показателей предприятия, характеризующих его платежеспособность и финансовую устойчивость. К числу таких показателей относятся коэффициенты ликвидности, деловой активности, устойчивости, рентабельности, инвестиционные коэффициенты.

Для определения основных факторов, отражающих текущее состояние предприятия, рассмотрим формулу для современной цены акции. Цена акции определяется двумя факторами. Во-первых, в цену акции входит часть капитала предприятия, равная $\frac{K_0}{N}$, где K_0 —

капитал предприятия на момент оценки, N — количество обыкновенных акций. Во-вторых, цена акции предприятия во многом зависит от его дивидендной политикой и от альтернативной доходности каптала. Под альтернативной доходностью понимают доходность, которую инвестор может получить, вкладывая свой капитал в другие финансовые операции. Таким образом, при разработке формулы для цены акции следует учесть современную стоимость всех будущих дивидендов.

Пусть дивиденды выплачиваются раз в году, доходность капитала предприятия составляет a_k, современный капитал предприятия равен K_0. Чистая прибыль предприятия за первый период будет равна

$$\Pi_1 = a_k K_0.$$

Если долю чистой прибыли, выделяемой на дивиденды (дивидендная политика предприятия), обозначить через $g\Pi_1$, а количество обыкновенных акций — через N, то на каждую акцию приходится

$$d_1 = \frac{g a_k K_0}{N}.$$

После выплаты дивидендов в конце первого периода капитал фирмы составит

$$K_1 = K_0 + (1-g)\Pi_1 = K_0\left[1+(1-g)a_k\right].$$

Будем считать, что продуктивность капитала предприятия и его дивидендная политика не меняются. Тогда его прибыль за второй период будет равна

$$\Pi_2 = a_k K_1.$$

Дивиденд на каждую акцию к концу второго периода

$$d_2 = \frac{g\cdot\Pi_2}{N} = \frac{g\cdot a_k\cdot K_0}{N}\left[1+(1-g)\cdot a_k\right].$$

Капитал в конце второго периода

$$K_2 = K_1 + (1-g)\Pi_2 = K_1\left[1+(1-g)a_k\right] = K_0\left[1+(1-g)a_k\right]^2.$$

Для третьего периода имеем

$$\Pi_3 = \frac{j_k}{m}K_2; \qquad d_3 = \frac{g\Pi_3}{N} = \frac{g a_k K_0}{N}\left[1+(1-g)a_k\right]^2.$$

Для произвольного периода под номером t имеем

$$d_t = \frac{g \cdot a_k \cdot K_0}{N}\left[1+(1-g)\cdot a_k\right]^{t-1}, \quad K_t = K_0\left[1+(1-g)a_k\right]^t .$$

Современная стоимость всех будущих дивидендов, дисконтированных по альтернативной ставки, определяется по формуле

$$A_d = \sum_{t=1}^{n} \frac{d_t}{(1+a)^t},$$

где n — срок существования бизнеса, a — альтернативная процентная ставка, по которой владелец акций сможет разместить свой капитал. Эта ставка является альтернативной ставке a_k, выражающей доходность капитала исследуемого предприятия. Подставив сюда формулу для дивиденда, получаемого в произвольный период под номером t, получим соотношение для расчета цены акции.

$$A_d = \sum_{t=1}^{n} \frac{g a_k K_0}{N(1+a)}\left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a}\right]^{t-1} = \frac{g a_k K_0}{N(1+a)} \frac{\left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a}\right]^n - 1}{\frac{1+(1-g)a_k}{1+a} - 1} =$$

$$= \frac{K_0}{N} \cdot g \cdot \frac{1-\left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a}\right]^n}{g+\frac{a}{a_k}-1}.$$

Таким образом, цена акции определяется соотношением

$$A = \frac{K_0}{N} + A_d = \frac{K_0}{N} + \frac{K_0}{N} \cdot g \cdot \frac{1-\left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a}\right]^n}{g+\frac{a}{a_k}-1} =$$

$$= \frac{K_0}{N}\left(1+g \cdot \frac{1-\left[\frac{1+(1-g)a_k}{1+a}\right]^n}{g+\frac{a}{a_k}-1}\right). \tag{24.1}$$

Как следует из этой формулы, цена акции будет зависеть от отношения ставок a_k и a, а также от доли чистой прибыли, направляемой на дивиденды g. Рассмотрим три случая: $a_k > a$, $a_k = a$ и $a_k < a$. Для первого случая в формуле для цены акции знаменатель дроби может быть как положительный, так и отрицательный. Для третьего случая этот знаменатель всегда положительный. При выполнении равенства $a_k = a$ формула для цены акции приобретает вид

$$A = \frac{K_0}{N} \cdot \left(2 - \left[\frac{1 + (1-g)a_k}{1 + a_k} \right]^n \right). \qquad \textbf{(24.2)}$$

■ **Пример 24.1.** Собственный капитал предприятия составляет 10 млн руб., количество обыкновенных акций равно 10 млн шт. Предполагается, что доходность капитала предприятия составит 15% годовых. Срок существования бизнеса — 10 лет (100 лет). Построить графики цены акции от доли дивидендов, выделяемых из чистой прибыли, для следующих альтернативных процентных ставках: 1) $a = 12\%$; 2) $a = 15\%$; 3) $a = 18\%$.

Решение. Для альтернативной ставки, равной 12% годовых, формула для цены акции приобретает вид

$$A = \frac{K_0}{N} \left(1 + g \cdot \frac{1 - \left[\frac{1 + (1-g)a_k}{1 + a} \right]^n}{g + \frac{a}{a_k} - 1} \right) = 1 + g \cdot \frac{1 - \left[\frac{1 + (1-g)0,15}{1 + 0,12} \right]^{10}}{g - 0,2}.$$

Для альтернативной ставки 15% годовых получим следующую формулу для цены акции:

$$A = \frac{K_0}{N} \cdot \left(2 - \left[\frac{1 + (1-g)a_k}{1 + a_k} \right]^n \right) = 2 - \left[\frac{1 + (1-g)0,15}{1,15} \right]^{10}.$$

Для альтернативной ставки, равной 18% годовых, формулу для цены акции запишем в виде

$$A = \frac{K_0}{N} \left(1 + g \cdot \frac{1 - \left[\frac{1 + (1-g)a_k}{1 + a} \right]^n}{g + \frac{a}{a_k} - 1} \right) = 1 + g \cdot \frac{1 - \left[\frac{1 + (1-g)0,15}{1 + 0,18} \right]^{10}}{g + 0,2}.$$

На рис. 11.7 приведены графики для всех альтернативных ставок при сроке существования бизнеса 10 лет. Верхний график соответствует альтернативной ставки $a = 12\%$, средний график — $a = 15\%$, а нижней — $a = 18\%$. Таким образом, чем выше альтернативная ставка, тем ниже цена акции.

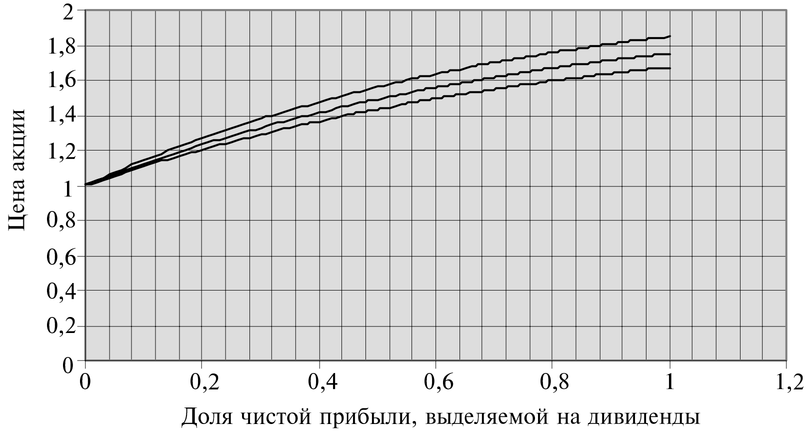


Рис. 24.9. Зависимость цены акции от доли чистой прибыли, n = 10 лет

На рис. 11.8 представлено семейство графиков для срока существования бизнеса 100 лет. Их расположение в зависимости от величины альтернативной ставки то же, что и в предыдущем случае.

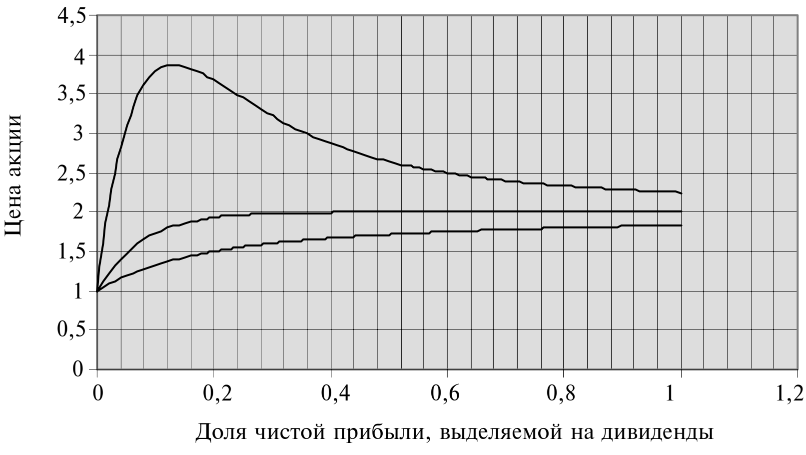


Рис. 24.10. Зависимость цены акции от доли чистой прибыли, n = 100 лет

Из графика для альтернативной ставки 12% годовых следует, что при доле чистой прибыли, идущей на дивиденды, равной 13%, стоимость акции становится максимальной и равной 3,865 руб. Другими словами, рыночная цена акции превысила стоимость части капитала предприятия на одну акцию, соответствующую моменту оценки, в 3,865 раза. □

Анализ результатов рассмотренного примера позволяет предположить, что существует доля чистой прибыли, выделяемой на дивиденды, при которой цена акции будет иметь максимальное значение. Причем этот максимум возможен только при превышении доходности собственного капитала бизнеса над альтернативной доходностью и при больших сроках существования этого бизнеса.

24.3. Риск и ограничение риска

Инвестиционный риск на фондовом рынке связан с возможным обесцениванием портфеля ценных бумаг.

Финансовая операция называется *рискованной*, если ее доходность неизвестна в момент заключения сделки. Это может быть связано, например, с финансовой несостоятельностью должника и его неспособностью вернуть долги, с изменением курсовой стоимости ценных бумаг и т.д.

Риск на фондовом рынке подразделяют на системный и диверсифицируемый [9].

Системный риск связан с падением всех обращающихся на фондовом рынке ценных бумаг. Возможные потери из-за системного риска связаны с инфляцией, кризисами, законодательными изменениями и т.д. Системный риск не диверсифицируется.

Диверсифицируемый риск связан с особенностями каждой ценной бумаги. Это позволяет, например, снижать риск за счет формирования портфеля ценных бумаг, доходности которых не коррелированы.

При оценке риска инвестор принимает решения, проводя сравнение прогноза эффективности с эффективностью безрискового вклада.

24.3.1. ХЕДЖИРОВАНИЕ

Использование инвестором методов, позволяющих исключить или ограничить риск финансовых операций, называются ***хеджированием***.

В качестве примера рассмотрим снижение риска при помощи страхования. Пусть инвестор имеет сумму P, часть из которой, равную P_1, он предоставляет в долг другому лицу по сложной процентной ставке $i\%$ годовых. Оставшуюся часть, равную $P-P_1$, инвестор расходует на покупку страхового полиса, гарантирующего выплату в случае неплатежеспособности должника с коэффициентом q страхового возмещения цены полиса. В том случае, если инвестор получит наращенную сумму долга, доходность вклада будет зависеть от полученной суммы без затраченной суммы P, т.е.

$$a_1 = \frac{(1+i)^n P_1 - P}{P} = (1+i)^n \frac{P_1}{P} - 1\,,$$

где n — срок долга.

Если же должник окажется несостоятельным, то эффективность вклада будет зависеть от суммы, полученной от страховой компании, без затраченной суммы *P*, т.е.

$$a_2 = \frac{q\left(P - P_1\right) - P}{P} = q - q\frac{P_1}{P} - 1.$$

Такой подход хеджирования полностью исключает риск, если окажется состоятельным либо должник, либо страховое общество. Для того чтобы эффективности первого и второго вариантов были равными, надо положить $a_1 = a_2 = a.$ Подставляя сюда полученные выше значения для a_1 и a_2 и решая уравнение, найдем

$$\frac{P_1}{P} = \frac{q}{\left(1+i\right)^n + q}. \qquad \textbf{(24.3)}$$

Для снижения риска портфельных инвестиций используются также производные финансовые инструменты, к числу которых относятся форвардные, фьючерсные и опционные контракты. Эти инструменты будут рассмотрены ниже.

■ **Пример 24.2.** Инвестор вкладывает деньги по сложной процентной ставке 20% годовых на срок, равный одному году. Коэффициент страхового возмещения цены полиса $q = 20$.

Определить, какую часть имеющихся денег инвестор должен потратить на приобретение страхового полиса, а также эффективность операции.

Решение.

Подставив данные примера в формулу **(24.3)**, получим

$$\frac{P_1}{P} = \frac{q}{\left(1+i\right)^n + q} = \frac{20}{1 + 0,2 + 20} = 0,94339622.$$

Часть денег, потраченных на приобретение страхового полиса, равна

$$1 - \frac{P_1}{P} = 1 - 0,94339622 = 0,0566038, \text{ или около } 5,66\%.$$

Доходность операции

$$a = \left(1+i\right)^n \frac{P_1}{P} - 1 = 1,2 \cdot 0,94339622 - 1 = 0,1132, \text{ или } 13,2\%.$$

Полученные результаты показывают, что хеджирование, повышая надежность, снижает эффективность (в рассматриваемом примере с 20 до 13,2%). □

24.3.2. МЕРА РИСКА

Обычно эффективность ценной бумаги, определяемая некоторой процентной ставкой наращения, является реализацией случайной величины доходности. Это связано с тем, что будущая цена этой ценной бумаги неизвестна, т.е. является случайной величиной. Поэтому эффективность ценной бумаги описывается некоторыми моментами случайной доходности, а именно:

- математическим ожиданием;
- дисперсией;
- стандартным (средним квадратичным) отклонением;
- ковариацией случайных доходностей двух ценных бумаг;
- коэффициентом корреляции.

Так же как и для доходности инвестиционного проекта в реальные активы, мерой риска доходности ценной бумаги может служить среднее квадратичное отклонение.

■ **Пример 24.3.** Сравнить проекты по степени риска:

1) $a_1 = a_2$; $\sigma_1 > \sigma_2$; 2) $a_1 > a_2$; $\sigma_1 = \sigma_2$; 3) $a_1 > a_2$; $\sigma_1 > \sigma_2$.

Решение:

1) выбираем проект a_2, σ_2, так как его ожидаемый доход равен ожидаемому доходу первого проекта, а риск меньше;

2) выбираем проект a_1, σ_1, так как его ожидаемый доход больше ожидаемого дохода второго проекта при равных рисках;

3) выбор зависит от склонности инвестора к риску. □

24.4. Индексы деловой активности

24.4.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНДЕКСОВ

Индексы деловой активности используются для изучения ситуации в реальном секторе экономики и на фондовом рынке [13]. В качестве таких индексов используются средние величины. *Каждый индекс характеризуется*:

- совокупностью компаний, рыночные цены акций которых входят в расчет индекса;
- методом усреднения;
- видом весов при применении взвешенной средней;
- начальным значением индекса, т.е. его значением в базисном году.

При формировании совокупности компаний учитывается торговая активность по данной акции, репрезентативность и надежность предприятия. Торговая активность определяется по среднему количеству совершенных сделок за торговый день в течение длительного периода времени. Репрезентативность предполагает вхождение в совокупность тех предприятий, которые представляют основные отрасли экономики, а цены на акции этих предприятий отражают колебания цен в этих отраслях или рынка в целом.

При усреднении могут быть использованы методы арифметической или геометрической средней. Усреднение может быть простое и взвешенное.

В качестве веса может быть использовано, например, количество акций данного предприятия, находящихся в обращении.

Начальное значение индекса выбирается из удобства пользования этим индексом. Для этих целей выбирается, как правило, целое число, кратное десяти, например 10, 50, 100 и т.д.

24.4.2. ТИПЫ ИНДЕКСОВ

Примером индекса, рассчитанного по простой арифметической средней, является промышленный индекс Доу-Джонса (DJIA, *Dow Dones Industrial Average*), публикуемый с 1898 г. Совокупность компаний для этого индекса равна 30. Все эти компании котируются на Нью-Йоркской фондовой бирже [13]. За время действия этого индекса совокупность компаний существенно изменялась: с 12 в 1898 г. до 30 в 1928 г. Компании, подвергшиеся реорганизации или банкротству, а также компании, торговая активность которых существенно снижалась, заменялись компаниями с высокой торговой активностью. Методика расчета этого индекса соблюдает условие сопоставимости индексов при изменении совокупности компаний. С самого начала при совокупности компаний, равной n, индекс Доу-Джонса рассчитывается по формуле

$$I_{\mathrm{DJIA}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k}{n},$$

где $k = 1, 2, ..., n$; n — количество компаний совокупности; p_k — цена акции компании под номером k в начальный момент времени.

Для любого другого момента времени после начального и до первого изменения совокупности компаний индекс Доу-Джонса будет определяться этой формулой. Для момента первого изменения совокупности формулу перепишем в виде

$$I_{\mathrm{DJIA},1} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{k,1}}{n}.$$

Рассматриваемая временная граница принадлежит как первому интервалу времени от начального момента до первого изменения совокупности компаний, так и второму интервалу от первого изменения совокупности до второго. В любой момент второго интервала индекс Доу—Джонса будет определяться соотношением

$$I_{\mathrm{DJIA}} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{N} p_l}{D}, \qquad \textbf{(24.4)}$$

где $D = \dfrac{\sum\limits_{l=1}^{N} p_{l,1}}{I_{\mathrm{DJIA},1}}$; $\sum\limits_{l=1}^{N} p_{l,1}$ является суммой цен $p_{l,1}$ акций новой совокупности компаний в начале второго периода (в конце первого), $l = 1, 2, ..., N$; N — количество компаний в новой совокупности.

При втором изменении совокупности предприятий знаменатель D необходимо пересчитать по той же методике, положив

$$D = \frac{\sum\limits_{m=1}^{M} p_{m,2}}{I_{\mathrm{DJIA},2}},$$

где $\sum\limits_{m=1}^{M} p_{m,2}$ — сумма цен $p_{m,2}$ акций третьей совокупности компаний в начале третьего периода (в конце второго), $m = 1, 2, ..., M$; M — количество компаний в третьей совокупности; $I_{\mathrm{DJIA},2}$ — индекс, рассчитанный по формуле **(24.4)**, для момента второго изменения совокупности.

В любой момент третьего интервала индекс Доу-Джонса будет определяться соотношением, имеющим ту же структуру, что и предыдущая формула, т.е.

$$I_{\mathrm{DJIA}} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{M} p_m}{D}.$$

Недостатком индексов, рассчитанных по простой арифметической средней, являются различные изменения значений этих индексов от изменения цен акций, имеющих до изменения значительно разнящиеся рыночные цены. Действительно, пусть совокупность состоит из двух акций с рыночными ценами p_1 и p_2, причем $p_1 > p_2$. Тогда индекс, рассчитанный по простой арифметической средней, будет равен

$$I = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

Если цена первой акции увеличится в b раз, то индекс будет равен

$$I_1 = \frac{p_1 b + p_2}{2}.$$

Если цена второй акции увеличится в то же количество раз b, то индекс

$$I_2 = \frac{p_1 + p_2 b}{2}.$$

Индекс I_1 возрос сильнее, чем индекс I_2, несмотря на то что цена каждой акции увеличилась в одно и то же количество раз. Действительно,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{p_1 b + p_2}{p_1 + p_2 b} = \frac{\frac{p_1}{p_2} b + 1}{\frac{p_2}{p_1} b + 1} > 1, \text{ так как } \frac{p_1}{p_2} > 1.$$

При расчете индекса по взвешенной арифметической средней в качестве веса принимается количество акций каждой компании, входящей в совокупность, находящихся в обращении. Для расчета индекса используется формула

$$I_t = I_0 \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{k,t} q_{k,0}}{\sum_{k=1}^{n} p_{k,0} q_{k,0}},$$

где I_0 — начальное значение индекса; $p_{k,0}$, $p_{k,t}$ — цены акций компании под номером k в начальный (базисный) момент и в момент t соответственно, $k = 1, 2, ..., n$; n — количество компаний совокупности; $q_{k,0}$ — количество акций в обращении компании под номером k.

Произведение цены акций компании и количества акций, находящихся в обращении, называется *рыночной капитализацией компании*. Поэтому индексы, взвешенные по количеству находящихся в обращении акций компаний, называют также *индексами*, *взвешенными по объемам рыночной капитализации*.

Пусть в момент $t + 1$ изменилась совокупность компаний или изменилось количество акций, находящихся в обращении, хотя бы одной компании совокупности. Тогда расчет индекса по взвешенной арифметической средней для этого и любого последующего момента проводится по формуле

$$I_{t+1} = I_t \frac{\sum_{l=1}^{N} p_{l,t+1} q_{l,1}}{\sum_{l=1}^{N} p_{l,t} q_{l,1}},$$

где I_t — значение индекса в момент, предшествующий изменению совокупности; $p_{l,t+1}$, $p_{l,t}$ — цены акций компании под номером l в момент изменения совокупности компаний и в момент, предшествующий изменению совокупности, соответственно $l = 1, 2, ..., N$; N — количество компаний новой совокупности; $q_{l,1}$ — количество акций в обращении компании под номером l в момент $t + 1$.

По формуле взвешенной средней арифметической рассчитывается *ряд широко применяемых индексов*:

1) **Standard & Poor's 500** имеет совокупность компаний, равную 500, базисный момент — конец 1943 г., начальное значение — 10;

2) **NYSE Composite Index** (индекс Нью-Йоркской фондовой биржи) имеет совокупность компаний более 1500 (все котируемые на этой бирже акции), базисный момент — 1965 г., начальное значение — 50;

3) **Индекс РТС** (индекс Российской торговой системы) имеет совокупность компаний, равную 24, базисный момент — 01.09.1995 г., начальное значение — 100;

4) **Индекс АК&М** (сводный) имеет совокупность компаний, равную 50, базисный момент — 1 сентября 1993 г., начальное значение — 1;

5) **Индекс Интерфакса** (сводный) имеет совокупность компаний равную 65, базисный момент — 1 декабря 1995 г., начальное значение — 100;

6) **MT-Index** (Moscow Times) имеет совокупность компаний, равную 50, базисный момент — 1 сентября 1994 г., начальное значение — 100.

К недостаткам индексов, взвешенных по объемам рыночной капитализации, следует отнести наиболее сильное влияние на их значение компаний с большими объемами рыночной капитализации.

Фондовые индексы используются для определения динамики среднего уровня цен на рынке. Для правильно построенных индексов их временные изменения будут слабо отличаться друг от друга.

Упражнения

ТЕСТ 24.1

Выберите правильный вариант ответа.

Рассчитанным по простой арифметической средней является индекс:

A. Standard & Poor's 500.
B. Индекс РТС.
C. Индекс Нью-Йоркской фондовой биржи.
D. Индекс Доу-Джонса.
E. Индекс Интерфакса.

ТЕСТ 24.2

Лицо, стремящееся получить прибыль за счет разницы в курсах финансовых инструментов, которая возникает во времени, называется:

- спекулянт;
- хеджер;
- арбитражер.

ТЕСТ 24.3

Если на графике цена акции падает во времени, то тренд называется:

- бычьим;
- медвежьим;
- боковым.

ЗАДАЧА

24.1. Инвестор вкладывает 100 тыс. руб. на срок, равный одному году, и покупает страховой полис за 6 тыс. руб. Коэффициент страхового возмещения цены полиса составляет $q = 20$. Доходности от вложения денег и от покупки полиса предполагаются равными друг другу. Определить доходность операции, а также годовую процентную ставку наращения.

Глава 25

ИНВЕСТИЦИОННЫЕ КАЧЕСТВА АКЦИЙ

25.1. Первичный рынок акций

На первичном рынке эмитентами продаются акции их первым владельцам — инвесторам. Первая эмиссия ценных бумаг осуществляется при учреждении акционерного общества и при увеличении размеров его уставного капитала путем выпуска акций.

Первичная эмиссия акций осуществляется в форме:

- *открытого* (публичного) размещения акций среди неограниченного круга инвесторов с публичным объявлением о выпуске акций, проведением рекламной кампании и регистрацией проспекта эмиссии;
- *закрытого* (частного) размещения акций (без публичного объявления, без проведения рекламной кампании) среди заранее известного ограниченного круга инвесторов (до 500 включительно) или на сумму не более 50 тыс. минимальных размеров оплаты труда.

В момент учреждения акционерного общества первичная эмиссия акций осуществляется только в форме закрытого размещения.

Практика показывает, что даже крупное акционерное общество не может решать весь комплекс вопросов, связанных с выпуском и обращением своих ценных бумаг. Участие профессионалов фондового рынка в размещении выпусков ценных бумаг на первичном рынке называется андеррайтингом.

Андеррайтинг — покупка или гарантирование покупки ценных бумаг при их первичном размещении для продажи публике.

Андеррайтер — инвестиционный институт, обслуживающий и гарантирующий эмитенту первичное размещение ценных бумаг на рынке за вознаграждение. Андеррайтерами являются инвестиционные и коммерческие банки, брокерские фирмы, инвестиционные и финансовые компании.

Допуск ценных бумаг к биржевым торгам проводится при помощи процедуры листинга. После проверки ценные бумаги включаются в котировальный лист, являющийся главным ориентиром для всех потенциальных инвесторов.

Котировальный лист на данную дату может содержать следующие графы.

1. Наименование эмитента, номинальная стоимость акции.

2. Максимальная цена покупки.

3. Минимальная цена покупки.

4. Сделка при закрытии биржи, т.е. последняя сделка дня.

5. Объем продаж.

6. Дивиденд, т.е. последний дивиденд в процентах от номинальной стоимости акции без учета налога.

7. Отношение сделки при закрытии биржи к балансовой стоимости акции.

8. Отношение сделки при закрытии биржи к величине дохода на одну акцию, где за величину дохода на одну акцию принимается отношение балансовой прибыли к количеству обыкновенных акций.

9. Изменение цены сделки на текущих торгах по сравнению с предыдущими.

10. Изменение цены сделки на текущих торгах по сравнению с предыдущими, выраженное в процентах.

Процедура допуска иностранных компаний на западные рынки довольно сложна. Поэтому в США, например, начинают обращаться не акции, а американские депозитарные расписки, которые выпускаются американскими банками на приобретенные этими банками иностранные акции. Владелец такой расписки получает дивиденды и может выиграть от прироста курсовой стоимости.

25.2. Доходность акции

Акции приобретаются для того, чтобы получить доход в виде дивидендов и разнице в ценах покупки и продажи. Доходность акции за заданный период времени определяется по формуле

$$a = \frac{A_1 - A + d}{A}, \qquad \textbf{(25.1)}$$

где A — цена покупки; A_1 — цена продажи; d — дивиденды, полученные за исследуемый период.

■ **Пример 25.1.** Номинальная цена купленной за 158 руб. акции составляет 100 руб. Через некоторое время акция была продана за 173 руб.

Определить доходность финансовой операции, если за время владения акцией: *a*) дивиденды не были получены, *b*) были получены дивиденды в размере 14% номинала.

Решение.

Доходность определяется по формуле

$$a)\ a = \frac{A_1 - A + d}{A} = \frac{173 - 158 + 0}{158} = 0{,}0949, \text{ или } 9{,}49\%;$$

$$b)\ a = \frac{173 - 158 + 100 \cdot 0{,}14}{158} = 0{,}1835, \text{ или } 18{,}35\%.$$

Таким образом, дивиденды существенно увеличили доходность акций. □

Дивиденды выплачиваются акционерным обществом по решению собрания акционеров. Даже при наличии прибыли собрание может принять решение о невыплате дивидендов, тем более если контрольный пакет акций сосредоточен в одних руках. Однако если конкретное акционерное общество не выплачивает дивидендов, то при выпуске новых акций разместить их будет крайне трудно.

Качество акции может оценить сам акционер, используя несложные показатели. Одним из таких показателей является *годовая ставка дивиденда*, равная отношению дивидендов за год к рыночной стоимости акции, т.е.

$$a_d = \frac{d}{A}, \qquad \textbf{(25.2)}$$

где A — рыночная стоимость акции; d — дивиденды, полученные за год.

Эта формула является частным случаем предыдущей при длительном пользовании акцией одним акционером.

Другим показателем является *коэффициент ликвидности*, характеризующий способность акции быстро и без потерь быть проданной. Первый коэффициент ликвидности является отношением общего объема предложений рассматриваемых акций к их общему объему продаж по результатам отдельных торгов или за заданный период. Ликвидность акций повышается с уменьшением коэффициента ликвидности. Второй коэффициент ликвидности — это отношение спрэда (разность между минимальной ценой предложения и максимальной ценой спроса) к максимальной цене спроса. Наиболее ликвидными являются акции, у которых эта величина не превышает 3%.

■ **Пример 25.2.** Минимальная цена предложения на акцию равна 152 руб., максимальная цена спроса — 148 руб.

Определить ликвидность акции.

Решение.

Найдем коэффициент ликвидности:

$$K = \frac{152 - 148}{148} = 0{,}027, \text{ или } 2{,}7\%.$$

Так как $K < 3\%$, то акции являются ликвидными. □

Третьим показателем качества акций служит ее *срок окупаемости*. В общем случае при расчете срока окупаемости необходимо сравнивать приведенные величины денежного потока. Однако для приблизительных оценок иногда пользуются формулой $n_{ok} = \frac{A}{d}$, где A — рыночная стоимость акции; d — дивиденды, полученные за год.

Более квалифицированный анализ качества акций на Западе проводят и публикуют аналитические компании. При этом акции присваивается рейтинг, например, по семизначной системе. Чем выше рейтинг, тем надежнее и качественнее акция. Например, компания «Standard & Poor's» использует следующие обозначения рейтинга акций: $A+$ — высший; A — высокий; $A-$ — выше среднего; $B+$ — средний; B — ниже среднего; $B-$ — низкий, C — очень низкий. От рейтинга, естественно, зависит отношение к акции инвесторов. «*Голубые фишки*» — это акции крупных предприятий с высоким кредитным рейтингом.

25.3. Оценка обыкновенных акций

Одной из целей анализа финансового рынка является выявление неверно оцененных акций. Для правильной оценки акций могут быть использованы методы фундаментального анализа. Если стоимость неверно оцененных акций будет в конце концов скорректирована рынком, то операция с этой акцией принесет дополнительную доходность. Истинную цену акции обычно вычисляют как сумму всех дисконтированных дивидендов по этой акции. В настоящее время широкое распространение получила трехэтапная модель дисконтирования дивидендов. В этом случае дисконтирование осуществляется на стадии роста, переходного периода и стадии зрелости развития и жизни предприятия. В общем случае формула для расчета цены акции по трехэтапной модели имеет вид [44]

$$A = \sum_{t=1}^{n_1} \frac{g_t \Pi_t}{(1+r)^t} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{g_j \Pi_j}{(1+r)^{n_1+j}} + \sum_{k=1}^{n_3} \frac{g_k \Pi_k}{(1+r)^{n_1+n_2+k}}, \qquad \textbf{(25.3)}$$

где n_1, n_2, n_3 — длительности в годах стадии роста, переходного периода и стадии зрелости соответственно; $n_1 + n_2 + n_3 = n$, n — время жизни предприятия; r — годовая ставка дисконтирования; g_t, g_j, g_k — доля чистой прибыли, выделяемой на дивиденды, в годы под номером t, j, k стадии роста, переходного периода и стадии зрелости соответственно; Π_t, Π_j, Π_k — чистая прибыль на одну акцию, в годы под номером t, j, k стадии роста, переходного периода и стадии зрелости соответственно.

Обычно чистая прибыль на одну акцию и доля прибыли на дивиденды возрастают год от года с темпом прироста b и c соответственно. Это связано с тем, что на стадии роста при большом объеме продаж и высоких прибылях на одну акцию доля выплаты дивидендов невелика из-за возможности высокорентабельных инвестиций. Во время переходного периода инвестиционные возможности сокращаются, и предприятие начинает выплачивать бо́льшую часть прибыли. В стадии зрелости инвестиционные возможности позволяют получить лишь небольшую доходность на инвестиции, и в этот период доля выплат постепенно стабилизируется. Пример зависимостей чистой прибыли на одну акцию и дивидендов от времени представлен на рис. 25.1.

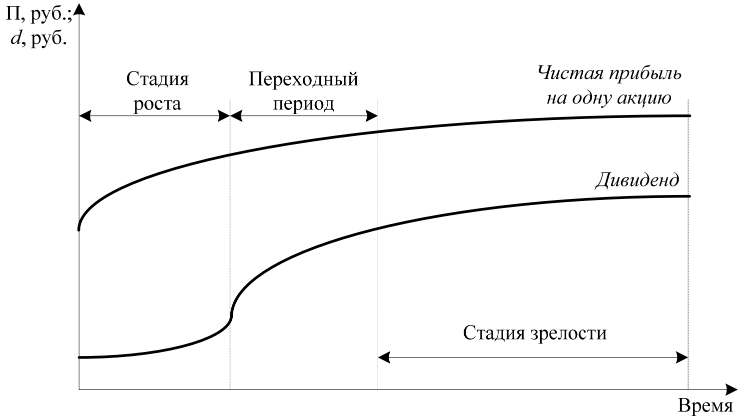


Рис. 25.1. Стадии жизни продукта

Таким образом, величина дивиденда:

- для первого года

$$d_1 = g_1\Pi_1 = g_0\left(1+c_1\right)\Pi_0\left(1+b_1\right);$$

- для второго года

$$d_2 = g_2\Pi_2 = g_1\left(1+c_2\right)\Pi_1\left(1+b_2\right) = g_0\left(1+c_1\right)\left(1+c_2\right)\Pi_0\left(1+b_1\right)\left(1+b_2\right);$$

$$\ldots$$

- для года под номером t

$$d_t = g_t\Pi_t = g_0\Pi_0\cdot\prod_{m=1}^{t}\left(1+b_m\right)\left(1+c_m\right).$$

Здесь Π_0, g_0 — опорные значения чистой прибыли на одну акцию и доли чистой прибыли (для действующего предприятия — чистая прибыль на одну акцию и доля чистой прибыли за прошедший год), а знак $\prod_{m=1}^{t}$ означает произведение стоящих под ним величин.

В соответствии со сказанным формулу **(25.3)** можно записать в виде

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}} = g_{0,1}\sum_{t=1}^{n_1}\frac{\prod\limits_{m=1}^{t}(1+b_m)(1+c_m)}{(1+r)^t} + \frac{g_{0,2}\Pi_{0,2}}{\Pi_{0,1}}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{\prod\limits_{m=1}^{j}(1+b_m)(1+c_m)}{(1+r)^{n_1+j}} + \frac{g_{0,3}\Pi_{0,3}}{\Pi_{0,1}}\sum_{k=1}^{n_3}\frac{\prod\limits_{m=1}^{k}(1+b_m)(1+c_m)}{(1+r)^{n_1+n_2+k}}, \quad \textbf{(25.4)}$$

где $\Pi_{0,1}, \Pi_{0,2}, \Pi_{0,3}, g_{0,1}, g_{0,2}, g_{0,3}$ — опорные значения чистой прибыли на одну акцию и доли чистой прибыли первой, второй и третьей стадий развития бизнеса соответственно.

Отношение $\frac{A}{\Pi_{0,1}}$, рассчитываемое по формуле **(25.4)**, называют *нормальным отношением Цена/Прибыль для акции.*

Рассмотрим несколько частных случаев.

25.3.1. ПОСТОЯННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЧИСТОЙ ПРИБЫЛИ И ДОЛИ ЧИСТОЙ ПРИБЫЛИ

Рассмотрим первый случай, когда значения чистой прибыли на одну акцию и доли чистой прибыли, выделяемой на дивиденды, — величины постоянные для каждой из трех стадий, но изменяющиеся от стадии к стадии. Графически такая зависимость представлена на рис. 25.2. В этом случае темпы роста дивидендов и доли прибыли внутри стадий равны нулю, т.е. $b = c = 0$.

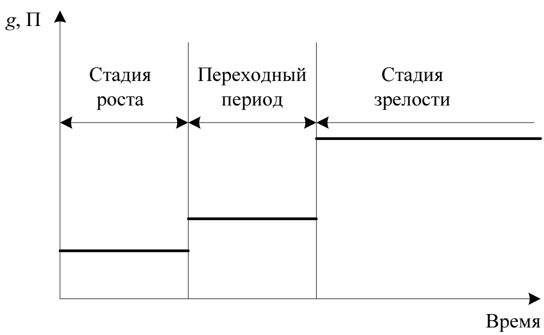


Рис. 25.2. График зависимости чистой прибыли на одну акцию и доли чистой прибыли, выделяемой на дивиденды

Выражение **(25.4)** для рассматриваемого варианта можно записать в виде

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}} = g_{0,1}\frac{1-(1+r)^{-n_1}}{r} + \frac{\Pi_{0,2}}{\Pi_{0,1}}\frac{g_{0,2}}{(1+r)^{n_1}}\frac{1-(1+r)^{-n_2}}{r} + \\ + \frac{\Pi_{0,3}}{\Pi_{0,1}}\frac{g_{0,3}}{(1+r)^{n_1+n_2}}\frac{1-(1+r)^{n_3}}{r}. \qquad \textbf{(25.5)}$$

■ **Пример 25.3.** Предполагается, что в акционерном обществе чистая прибыль на стадии роста в течение 5 лет составит 100 тыс. руб./год, доля чистой прибыли для выплаты дивидендов — 40%, во время переходного периода в течение 3 лет чистая прибыль будет равна 160 тыс. руб./год, а доля чистой прибыли для выплаты дивидендов — 55%, на стадии зрелости в течение 12 лет чистая прибыль — 190 тыс. руб./год, а доля чистой прибыли для выплаты дивидендов — 70%. Количество выпущенных акционерным обществом акций равно 10 000.

Определить нормальное отношение Цена/Прибыль для акции и ее стоимость для ставки дисконтирования 12% годовых.

Решение.

Определим значение чистой прибыли на одну акцию в течение каждой из трех стадий:

$$\Pi_{0,1} = \frac{100\ 000}{10\ 000} = 10 \text{ руб.};\quad \Pi_{0,2} = \frac{160\ 000}{10\ 000} = 16 \text{ руб.};\quad \Pi_{0,3} = \frac{190\ 000}{10\ 000} = 19 \text{ руб.}$$

Нормальное отношение Цена/Прибыль для акции определяется соотношением **(25.5)**:

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}} = 0,4\frac{1-1,12^{-5}}{0,12} + \frac{16}{10}\cdot\frac{0,55}{1,12^5}\cdot\frac{1-1,12^{-3}}{0,12} + \frac{19}{10}\cdot\frac{0,7}{1,12^8}\cdot\frac{1-1,12^{-12}}{0,12} = 5,969.$$

Стоимость акции $A = 5,969\cdot 10 = 59,69$ руб. □

25.3.2. ПОСТОЯННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ГОДОВОГО ТЕМПА ПРИРОСТА ЧИСТОЙ ПРИБЫЛИ ПРИ ПОСТОЯННОЙ ДОЛЕ ЧИСТОЙ ПРИБЫЛИ, ВЫДЕЛЯЕМОЙ НА ДИВИДЕНДЫ

Значения чистой прибыли в зависимости от времени в каждой стадии изменяются так, что в пределах стадии годовой темп прироста чистой прибыли на одну акцию b остается постоянной величиной, причем зависимость чистой прибыли от времени непрерывна (рис. 25.3). Доли чистой прибыли g_t, g_j, g_k, выделяемой на дивиденды, так же как и в предыдущем случае, — величины постоянные для каждой из трех стадий (см. рис. 25.2) , т.е. $c = 0$.

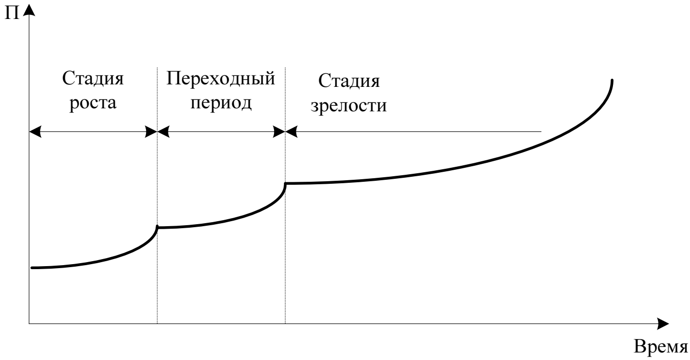


Рис. 25.3. Непрерывная функция чистой прибыли

Подставив исходные данные в выражение **(25.4)**, получим

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}} = g_{0,1}\sum_{t=1}^{n_1}\frac{(1+b_1)^t}{(1+r)^t} + \frac{g_{0,2}\Pi_{0,2}}{(1+r)^{n_1}\,\Pi_{0,1}}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(1+b_2)^j}{(1+r)^j} + \tag{25.6}$$

$$+\frac{g_{0,3}\Pi_{0,3}}{(1+r)^{n_1+n_2}\,\Pi_{0,1}}\sum_{k=1}^{n_3}\frac{(1+b_3)^k}{(1+r)^k}.$$

Так как функция чистой прибыли от времени непрерывна, то ее опорные значения связаны соотношениями

$$\Pi_{0,2} = \Pi_{0,1}\cdot\prod_{t=1}^{n_1}(1+b_1) = \Pi_{0,1}(1+b_1)^{n_1}; \tag{25.7}$$

$$\Pi_{0,3} = \Pi_{0,2}\cdot\prod_{j=1}^{n_2}(1+b_2) = \Pi_{0,1}(1+b_1)^{n_1}(1+b_2)^{n_2}. \tag{25.8}$$

Подставив **(25.7)** и **(25.8)** в **(25.6)**, получим

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}} = g_{0,1}\sum_{t=1}^{n_1}\frac{(1+b_1)^t}{(1+r)^t} + g_{0,2}\frac{(1+b_1)^{n_1}}{(1+r)^{n_1}}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{1+b_2}{1+r}\right)^j +$$

$$+g_{0,3}\frac{(1+b_1)^{n_1}(1+b_2)^{n_2}}{(1+r)^{n_1+n_2}}\sum_{k=1}^{n_3}\left(\frac{1+b_3}{1+r}\right)^k.$$

При выполнении условия $\frac{1+b}{1+r}<1$ найдем

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}}=g_{0,1}\frac{1-\left(\frac{1+b_1}{1+r}\right)^{n_1}}{\frac{1+r}{1+b_1}-1}+g_{0,2}\left(\frac{1+b_1}{1+r}\right)^{n_1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1+b_2}{1+r}\right)^{n_2}}{\frac{1+r}{1+b_2}-1}+$$

$$+g_{0,3}\left(\frac{1+b_1}{1+r}\right)^{n_1}\left(\frac{1+b_2}{1+r}\right)^{n_2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1+b_3}{1+r}\right)^{n_3}}{\frac{1+r}{1+b_3}-1}. \qquad \textbf{(25.9)}$$

■ **Пример 25.4.** Предполагается, что в акционерном обществе на стадии роста, имеющей длительность 5 лет, опорное значение чистой прибыли на одну акцию составит 10 руб., годовой темп прироста чистой прибыли — 8%, доля чистой прибыли для выплаты дивидендов — 40%. Во время переходного периода длительностью 3 года темп прироста чистой прибыли будет равен 6%, а доля чистой прибыли для выплаты дивидендов — 55%. На стадии зрелости длительностью 12 лет темп прироста чистой прибыли — 2%, а доля чистой прибыли для выплаты дивидендов — 70%.

Определить нормальное отношение Цена/Прибыль для акции и ее стоимость для ставки дисконтирования 12%.

Решение.

Нормальное отношение Цена/Прибыль для акции находим по формуле **(25.9)**:

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}}=0,4\cdot\frac{1-\left(\frac{1+0,08}{1+0,12}\right)^{5}}{\frac{1+0,12}{1+0,08}-1}+0,55\cdot\left(\frac{1+0,08}{1+0,12}\right)^{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{1+0,06}{1+0,12}\right)^{3}}{\frac{1+0,12}{1+0,06}-1}+$$

$$+0,7\cdot\left(\frac{1+0,8}{1+0,12}\right)^{5}\left(\frac{1+0,6}{1+0,12}\right)^{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1+0,02}{1+0,12}\right)^{12}}{\frac{1+0,12}{1+0,02}-1}=0,4\cdot 9,49+$$

$$+0,55\cdot 0,8337\cdot 2,69+0,7\cdot 0,8337\cdot 0,8477\cdot 6,88=6,433.$$

Стоимость акции $A=6,433\cdot 10=64,33$ руб. □

25.3.3. ПОСТОЯННЫЕ ТЕМПЫ ПРИРОСТА ДОЛИ ЧИСТОЙ ПРИБЫЛИ НА ДИВИДЕНДЫ ПРИ ПОСТОЯННОЙ ЧИСТОЙ ПРИБЫЛИ

Темп прироста доли прибыли на дивиденды в зависимости от времени в пределах каждой стадии — величина постоянная, т.е. $c=\text{const}$. Функция доли чистой прибыли, выделяемой на дивиденды, от времени непрерывна (рис. 25.4). Чистая прибыль на одну акцию — величина постоянная для каждой из трех стадий (см. рис. 25.2), т.е. $b=0$.

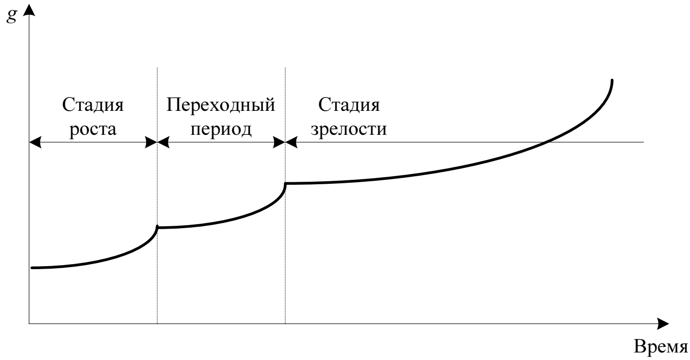


Рис. 25.4. Непрерывная функция доли чистой прибыли, выделяемой на дивиденды

Подставив исходные данные в выражение **(25.4)**, получим

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}} = g_{0,1}\sum_{t=1}^{n_1}\frac{(1+c_1)^t}{(1+r)^t} + \frac{g_{0,2}\Pi_{0,2}}{(1+r)^{n_1}\,\Pi_{0,1}}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(1+c_2)^j}{(1+r)^j} + \qquad \textbf{(25.10)}$$

$$+\frac{g_{0,3}\Pi_{0,3}}{(1+r)^{n_1+n_2}\,\Pi_{0,1}}\sum_{k=1}^{n_3}\frac{(1+c_3)^k}{(1+r)^k}.$$

Так как функция доли чистой прибыли от времени непрерывна, то ее опорные значения связаны соотношениями

$$g_{0,2} = g_{0,1}\cdot\prod_{t=1}^{n_1}(1+c_1) = g_{0,1}(1+c_1)^{n_1}; \qquad \textbf{(25.11)}$$

$$g_{0,3} = g_{0,2}\cdot\prod_{j=1}^{n_2}(1+c_2) = g_{0,1}(1+c_1)^{n_1}(1+c_2)^{n_2}. \qquad \textbf{(25.12)}$$

Подставив **(25.11)** и **(25.12)** в **(25.10)**, получим

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}} = g_{0,1}\cdot\left[\sum_{t=1}^{n_1}\left(\frac{1+c_1}{1+r}\right)^t + \frac{\Pi_{0,2}}{\Pi_{0,1}}\frac{(1+c_1)^{n_1}}{(1+r)^{n_1}}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{1+c_2}{1+r}\right)^j + \right.$$

$$\left. + \frac{\Pi_{0,3}}{\Pi_{0,1}}\frac{(1+c_1)^{n_1}(1+c_2)^{n_2}}{(1+r)^{n_1+n_2}}\sum_{k=1}^{n_3}\left(\frac{1+c_3}{1+r}\right)^k\right].$$

При выполнении условия $\frac{1+c}{1+r} < 1$ найдем

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}} = g_{0,1} \cdot \left[\begin{array}{l} \dfrac{1-\left(\dfrac{1+c_1}{1+r}\right)^{n_1}}{\dfrac{1+r}{1+c_1}-1} + \dfrac{\Pi_{0,2}}{\Pi_{0,1}}\left(\dfrac{1+c_1}{1+r}\right)^{n_1} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1+c_2}{1+r}\right)^{n_2}}{\dfrac{1+r}{1+c_2}-1} + \\ + \dfrac{\Pi_{0,3}}{\Pi_{0,1}}\left(\dfrac{1+c_1}{1+r}\right)^{n_1}\left(\dfrac{1+c_2}{1+r}\right)^{n_2} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1+c_3}{1+r}\right)^{n_3}}{\dfrac{1+r}{1+c_3}-1} \end{array} \right]. \quad \mathbf{(25.13)}$$

■ **Пример 25.5.** Предполагается, что в акционерном обществе на стадии роста длительностью 5 лет значение чистой прибыли на одну акцию составит 10 руб., опорное значение доли чистой прибыли на одну акцию — 40%, темп прироста доли чистой прибыли — 8%. Во время переходного периода длительностью 3 года темп прироста доли чистой прибыли будет равен 6%, а значение чистой прибыли на одну акцию — 16 руб. На стадии зрелости длительностью 12 лет темп прироста доли чистой прибыли — 2%, а значение чистой прибыли на одну акцию — 19 руб.

Определить нормальное отношение Цена/Прибыль и стоимость акции для ставки дисконтирования 12% годовых.

Решение.

Нормальное отношение Цена/Прибыль для акции находим по формуле **(25.13)**:

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}} = 0,4 \cdot \left[\begin{array}{l} \dfrac{1-\left(\dfrac{1+0,08}{1+0,12}\right)^{5}}{\dfrac{1+0,12}{1+0,08}-1} + \dfrac{16}{10}\left(\dfrac{1+0,08}{1+0,12}\right)^{5} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1+0,06}{1+0,12}\right)^{3}}{\dfrac{1+0,12}{1+0,06}-1} + \\ + \dfrac{19}{10}\left(\dfrac{1+0,8}{1+0,12}\right)^{5}\left(\dfrac{1+0,6}{1+0,12}\right)^{3} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1+0,02}{1+0,12}\right)^{12}}{\dfrac{1+0,12}{1+0,02}-1} \end{array} \right] =$$

$$= 0,4 \cdot \left(4,49 + 1,6 \cdot 0,8337 \cdot 2,69 + 1,9 \cdot 0,8337 \cdot 0,8477 \cdot 6,88\right) = 6,926.$$

Стоимость акции $A = 6,926 \cdot 10 = 69,26$ руб. □

25.3.4. ПОСТОЯННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ГОДОВОГО ТЕМПА ПРИРОСТА ЧИСТОЙ ПРИБЫЛИ И ДОЛИ ЧИСТОЙ ПРИБЫЛИ, ВЫДЕЛЯЕМОЙ НА ДИВИДЕНДЫ

Значения чистой прибыли на одну акцию и доли чистой прибыли на дивиденды в зависимости от времени в пределах каждой стадии изменяются так, что коэффициенты b и c остаются постоянными, т.е. $b = \text{const}$ и $c = \text{const}$, причем эти функции от времени непрерывны (см. рис. 25.3 и 25.4). Подставив эти исходные данные, а также **(25.7)**, **(25.8)**, **(25.11)** и **(25.12)** в выражение **(25.4)**, получим

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}g_{0,1}}=\sum_{t=1}^{n_1}\left(\frac{(1+b_1)(1+c_1)}{1+r}\right)^t+\left(\frac{(1+b_1)(1+c_1)}{1+r}\right)^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{(1+b_2)(1+c^2)}{1+r}\right)^j+$$

$$+\left(\frac{(1+b_1)(1+c_1)}{1+r}\right)^{n_1}\left(\frac{(1+b_2)(1+c_2)}{1+r}\right)^{n_2}\sum_{k=1}^{n_3}\left(\frac{(1+b_3)(1+c_3)}{1+r}\right)^k.$$

Суммы, стоящие в этом выражении, при выполнении условия $\frac{(1+b)(1+c)}{1+r}<1$ вычисляются по формуле

$$\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{(1+b)(1+c)}{1+r}\right)^t=\frac{1-\left(\frac{(1+b)(1+c)}{1+r}\right)^n}{\frac{1+r}{(1+b)(1+c)}-1}.$$

Подставив это соотношение в предыдущее выражение, найдем

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}g_{0,1}}=\frac{1-\left(\frac{(1+b_1)(1+c_1)}{1+r}\right)^{n_1}}{\frac{1+r}{(1+b_1)(1+c_1)}-1}+$$

$$+\left(\frac{(1+b_1)(1+c_1)}{1+r}\right)^{n_1}\cdot\frac{1-\left(\frac{(1+b_2)(1+c_2)}{1+r}\right)^{n_2}}{\frac{1+r}{(1+b_2)(1+c_2)}-1}+$$

$$+\left(\frac{(1+b_1)(1+c_1)}{1+r}\right)^{n_1}\cdot\left(\frac{(1+b_2)(1+c_2)}{1+r}\right)^{n_2}\cdot\frac{1-\left(\frac{(1+b_3)(1+c_3)}{1+r}\right)^{n_3}}{\frac{1+r}{(1+b_3)(1+c_3)}-1}\cdot\mathbf{(15.14)}$$

■ **Пример 25.6.** Предполагается, что в акционерном обществе на стадии роста длительностью 5 лет опорное значение чистой прибыли на одну акцию составит 10 руб., опорное значение доли чистой прибыли на одну акцию — 40%, темп прироста чистой прибыли и доли чистой прибыли — 4%. Во время переходного периода длительностью 3 года темп роста чистой прибыли и доли чистой прибыли будет равен 3%. На стадии зрелости длительностью 12 лет темп роста чистой прибыли и доли чистой прибыли — 1%.

Определить нормальное отношение Цена/Прибыль и стоимость акции для ставки дисконтирования 12% годовых.

Решение.

Подставим исходные данные примера в формулу **(25.14)**:

$$\frac{A}{0,4\cdot\Pi_{0,1}}=\frac{1-\left(\dfrac{1,04\cdot 1,04}{1,12}\right)^5}{\dfrac{1,12}{1,04\cdot 1,04}-1}+\left(\frac{1,04\cdot 1,04}{1,12}\right)^5\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1,03\cdot 1,03}{1,12}\right)^3}{\dfrac{1,12}{1,03\cdot 1,03}-1}+$$

$$+\left(\frac{1,04\cdot 1,04}{1,12}\right)^5\left(\frac{1,03\cdot 1,03}{1,12}\right)^3\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1,01\cdot 1,01}{1,12}\right)^{12}}{\dfrac{1,12}{1,01\cdot 1,01}-1}=$$

$$=5,5086+0,84\cdot\left(2,694+0,85\cdot 6,883\right)=11,68.$$

Отсюда следует значение нормального отношения Цена/Прибыль для акции:

$$\frac{A}{\Pi_{0,1}}=0,4\cdot 11,685417=4,672.$$

Стоимость акции $A=4,672\cdot 10=46,72$ руб. □

25.3.5. ОДНОЭТАПНАЯ МОДЕЛЬ

Формулы для расчета характеристик двухэтапной и одноэтапной моделей следуют из полученных выше соотношений при использовании только двух или одной стадий развития и жизни предприятия соответственно. Таким образом, в полученных соотношениях следует использовать либо два, либо одно слагаемое. Для одноэтапной модели при постоянных значениях годового темпа прироста чистой прибыли и доли чистой прибыли, выделяемой на дивиденды, формулу для нормального отношения Цена/Прибыль акции можно получить из соотношения **(25.14)**:

$$\frac{A}{\Pi_0}=g_0\frac{1-\left(\dfrac{(1+b)(1+c)}{1+r}\right)^n}{\dfrac{1+r}{(1+b)(1+c)}-1}. \qquad \textbf{(25.15)}$$

Так как в модели остался только один этап, то индекс у показателей снят. Для проектов с больши́ми сроками, когда $n\to\infty$, формула **(25.15)** приобретает вид

$$\frac{A}{\Pi_0}=g_0\frac{(1+b)(1+c)}{1+r-(1+b)(1+c)}=g_0\frac{1+(b+c+bc)}{r-(b+c+bc)}. \qquad \textbf{(25.16)}$$

■ **Пример 25.7.** Предполагается, что в акционерном обществе опорное значение чистой прибыли на одну акцию составит 10 руб., опорное значение доли чистой прибыли на одну акцию — 40%, темп роста чистой прибыли и доли чистой прибыли — 4%.

Определить нормальное отношение Цена/Прибыль и стоимость акции для ставки дисконтирования 12% годовых.

Решение.

Поскольку срок не оговорен, считаем, что $n \to \infty$. Нормальное отношение Цена/Прибыль для акции находим по формуле **(25.16)**:

$$\frac{A}{\Pi_0} = g_0 \frac{1+(b+c+bc)}{r-(b+c+bc)} = 0,4 \cdot \frac{1+0,04+0,04+0,04 \cdot 0,04}{0,12-0,04-0,04-0,04 \cdot 0,04} = 11,26666.$$

Стоимость акции $A = 11,267 \cdot 10 = 112,67$ руб. □

Опыт зарубежных аналитиков показал [44], что оценка стоимости акций методом дисконтированных дивидендов является весьма надежным и доступным для многих инструментом. Однако при использовании метода требуется наличие у аналитика высокого мастерства и квалификации, а также умения анализировать и сортировать исходные данные, необходимые для проведения расчетов.

Упражнения

ТЕСТ 25.1

Акции котируются на бирже, если они:

- имеют высокий рейтинг;
- включены в котировальный лист.

ЗАДАЧИ

25.1. Акция куплена за 28 руб. и продана за 34 руб. Номинальная цена акции составляет 20 руб. Через некоторое время акция была продана за 173 руб. Доходность операции составила 30% за время этой операции. Определить ставку дивиденда, который был получен во время нахождения акции у владельца.

25.2. В акционерном обществе опорное значение чистой прибыли на одну акцию составит 20 руб., опорное значение доли чистой прибыли, выделяемой на дивиденды, равно 45%. Чистая прибыль и доля величины чистой прибыли на дивиденды постоянные. Срок жизни продукта предполагается равным 15 годам. Определить нормальное отношение Цена/Прибыль и стоимость акции для ставки дисконтирования 15% годовых.

Глава 26 ИНВЕСТИЦИОННЫЕ КАЧЕСТВА ОБЛИГАЦИЙ

26.1. Основные понятия

Облигация — это срочная ценная долговая бумага, удостоверяющая отношение займа между ее владельцем (кредитором) и эмитентом (заемщиком). Платежи по облигациям осуществляются эмитентом перед платежами по акциям.

К основным характеристикам облигаций относятся:

- номинальная цена (номинал);
- выкупная цена или правило ее определения, если она отличается от номинала;
- дата погашения;
- купонная процентная ставка;
- дата выплат по купонам.

Купонные облигации могут иметь фиксированную или плавающую купонную ставку. В последнем случае ставка зависит от уровня ссудного процента. Бывают облигации с возрастающей купонной ставкой. Эти облигации выпускаются обычно во время инфляции.

По отношению к конкретной облигации аналитические компании формируют рейтинг. *В США считаются надежными рейтинги*, полученные, например, компанией «Standard & Poor's». Рейтинги облигаций этой компании имеют следующие обозначения:

AAA — высший;
AA — очень высокий;
A — высокий;
BBB — приемлемый;
BB — немного спекулятивный;

B — спекулятивный;
CCC — ненадежный;
CC — высокоспекулятивный;
C — проценты не выплачиваются;
Д — банкротство.

26.2. Определение цены облигации

Рыночная цена облигации чаще всего отличается от номинальной. Рыночная цена облигации характеризуется ее курсом. ***Курсом*** называется отношение рыночной цены к номиналу, выраженное в процентах. Таким образом, курс рассчитывается по формуле

$$K = \frac{B}{N}, \qquad \textbf{(26.1)}$$

где B — рыночная цена облигации; N — номинал облигации.

■ **Пример 26.1.** Номинальная цена облигации равна 500 руб., ее рыночная стоимость — 480 руб.

Определить курс.

Решение.

$$K = \frac{B}{N} = \frac{480}{500} = 0{,}96, \text{ или } 96\%. \quad \square$$

Расчет цены проводится в целях определения продажной цены облигации и выявления неверно оцененных рынком облигаций. При этом чаще всего используется метод дисконтированных доходов, состоящих из периодически получаемых по купонам процентов и номинала, выплачиваемого в конце срока. Например, если проценты выплачиваются p раз в году в конце периода в течение n лет, ставка дисконтирования равна r процентов годовых, а номинал — N, то цена облигации равна современной стоимости всех платежей p-срочной ренты и номинала:

$$A = R\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+r)^{1/p}-1\right]} + \frac{N}{(1+r)^n}, \qquad \textbf{(26.2)}$$

где R — годовая выплата процентов ($C = R/p$ — разовая выплата процентов).

Если купонная годовая ставка по облигации составляет u процентов от номинала, то **(26.2)** можно представить как расчетный курс облигации:

$$k = \frac{A}{N} = u\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+r)^{1/p}-1\right]} + \frac{1}{(1+r)^n}, \qquad \textbf{(26.3)}$$

где $u = R/N$ (если расчетный курс совпадает с рыночным, то $k = K$ и $A = B$).

■ **Пример 26.2.** Облигация со сроком 7 лет, проценты по которой выплачиваются ежеквартально в размере 100 руб. (125 руб.), имеет номинал 5 тыс. руб.

Рассчитать курс и цену облигации при ставке 10% годовых.

Решение.

Для первого варианта:

предварительно определяем купонную годовую ставку

$$u = R/N = Cp/N = 4 \cdot 100/5000 = 0{,}08;$$

расчетный курс находится по формуле **(26.3)**:

$$k = 0{,}08\frac{1-1{,}1^{-7}}{4\left(1{,}1^{1/4}-1\right)}+\frac{1}{1{,}1^{7}} = 0{,}91694674, \text{ или} \approx 91{,}69\%.$$

Цена облигации $A = 5000 \cdot 0{,}91694674 = 4584{,}73$ руб.

Для второго варианта:

$$u = 4 \cdot 125/5000 = 0{,}1;$$

$$k = 0{,}1\frac{1-1{,}1^{-7}}{4\left(1{,}1^{1/4}-1\right)}+\frac{1}{1{,}1^{7}} = 1{,}0178939, \text{ или} \approx 101{,}79\%;$$

$$A = 5000 \cdot 1{,}0178939 = 5089{,}47 \text{ руб.} \ \square$$

Ставка дисконтирования r, которая использовалась выше при расчете цены, в общем случае является номинальной (брутто-ставкой), в которую входит инфляция. Если инфляционные эффекты учитываются отдельно, то задаются реальной (желаемой) ставкой a, рассчитывают брутто-ставку r (см. § 2.3 «Учет инфляции»), а затем определяют цену облигации.

■ **Пример 26.3.** Облигация со сроком 7 лет, проценты по которой выплачиваются ежеквартально в размере 100 руб., имеет номинал 5 тыс. руб. Инвестор желает получить доходность 6% годовых.

Рассчитать курс облигации и ее цену при ожидаемом ежегодном темпе инфляции 3% (30%).

Решение.

Предварительно определяем купонную годовую ставку

$$u = R/N = Cp/N = 4 \cdot 100/5000 = 0{,}08.$$

Для первого варианта брутто-ставка:

$$r = (1+a)\sqrt[n]{I_p} - 1 = (1+a)I_{p,1} - 1 = 1{,}06 \cdot 1{,}03 - 1 = 0{,}0918, \text{ или } 9{,}18\%.$$

Расчетный курс облигации

$$k = 0{,}08\frac{1-1{,}0918^{-7}}{4\left(1{,}0918^{1/4}-1\right)}+\frac{1}{1{,}0918^{7}} = 0{,}9544926, \quad \text{или} \ \approx 95{,}45\%.$$

Цена облигации $A = 5000 \cdot 0{,}9544924 = 4772{,}46$ руб.

Для второго варианта:

$$r = 1{,}06 \cdot 1{,}3 - 1 = 0{,}378, \text{ или } 37{,}8\%;$$

$$k = 0{,}08 \frac{1 - 1{,}378^{-7}}{4 \cdot \left(1{,}378^{1/4} - 1\right)} + \frac{1}{1{,}378^7} = 0{,}320229, \text{ или } \approx 32{,}02\%;$$

$$A = 5000 \cdot 0{,}320229 = 1601{,}14 \text{ руб.}$$

Таким образом, инфляция довольно сильно влияет на цену облигации. □

Если выплаты процентов производятся один раз в году (годовая рента), то формула **(26.3)** приобретает вид

$$k = u \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} + \frac{1}{(1+r)^n}. \qquad \textbf{(26.4)}$$

Для бессрочных облигаций расчетный курс определяется из **(26.4)** при $n \to \infty$:

$$k = \frac{u}{p\left[(1+r)^{1/p} - 1\right]}. \qquad \textbf{(26.5)}$$

При выплатах процентов по купонам один раз в году

$$k = \frac{u}{r}. \qquad \textbf{(26.6)}$$

■ **Пример 26.4.** Бессрочная облигация, проценты по которой выплачиваются ежеквартально (раз в году), имеет номинал 5 тыс. руб. Купонная ставка равна 8% годовых.

Рассчитать курс и цену облигации при ставке дисконтирования 10% годовых.

Решение.

Для первого варианта расчетный курс облигации находим по формуле **(26.5)**:

$$k = \frac{0{,}08}{4 \cdot \left(1{,}1^{1/4} - 1\right)} = 0{,}829424, \text{ или } \approx 82{,}94\%.$$

Цена облигации $A = 5000 \cdot 0{,}829424 = 4147{,}02$ руб.

Для второго варианта расчетный курс облигации находим по формуле **(26.6)**:

$$k = \frac{0{,}08}{0{,}1} = 0{,}8, \text{ или } \approx 80\%.$$

Цена облигации $A = 5000 \cdot 0{,}8 = 4000$ руб. □

Для облигаций, по которым купонные проценты по ставке u и номинал выплачиваются в конце срока, цену и курс определяют по формулам

$$A = \left(\frac{1+u}{1+r}\right)^n N; \quad k = \left(\frac{1+u}{1+r}\right)^n. \qquad \textbf{(26.7)}$$

■ **Пример 26.5.** Облигация со сроком 7 лет, проценты и номинал по которой выплачиваются в конце срока, имеет номинал 5 тыс. руб. Купонные проценты начисляются по ставке 8% годовых.

Рассчитать курс и цену облигации при ставке дисконтирования 10% годовых.

Решение.

Расчетный курс находим по формуле **(26.7)**:

$$k = \left(\frac{1+u}{1+r}\right)^n = \left(\frac{1+0,08}{1+0,1}\right)^7 = 0,8794624, \text{ или} \approx 87,95\%.$$

Цена облигации A = 5000 · 0,8794624 = 4397,31 руб. □

Для облигаций, по которым в конце срока выплачивается только номинал (бескупонные облигации), цена и курс находятся из соотношений

$$A = \frac{N}{(1+r)^n}; \quad k = \frac{1}{(1+r)^n}. \tag{26.8}$$

■ **Пример 26.6.** Бескупонная облигация со сроком 7 лет имеет номинал 5 тыс. руб.

Рассчитать курс и цену облигации при ставке дисконтирования 10% годовых.

Решение.

Расчетный курс находим по формуле **(26.8)**:

$$k = \frac{1}{1,1^7} = 0,513158, \text{ или} \approx 51,32\%.$$

Цена облигации A = 5000 · 0,513158 = 2565,79 руб. □

26.3. Доходность облигаций

Доходность облигаций (***ставка помещения***) — это эффективная годовая ставка сложных процентов, сумма дисконтированных доходов и расходов по которой равняется рыночной цене облигации.

Для облигации с выплатой процентов p раз в году в течение n лет, имеющей номинал N и курс K, доходность определяется решением уравнения **(26.3)** относительно r при подстановке в него вместо расчетного курса облигации k рыночного курса K, т.е.

$$K - u\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+r)^{1/p}-1\right]} - \frac{1}{(1+r)^n} = 0. \tag{26.9}$$

Решить это уравнение можно, например, методом Ньютона—Рафсона. Для этих целей преобразуем его, положив

$$1+r = x \tag{26.10}$$

и умноживв левую и правую части этого уравнения на

$$\left(x^{1/p}-1\right)x^n.$$

В результате получим

$$Kx^{n+\frac{1}{p}}-\left(K+\frac{u}{p}\right)x^n-x^{\frac{1}{p}}+1+\frac{u}{p}=0.$$

В качестве искомой функции принимаем

$$f\left(x\right)=Kx^{n+\frac{1}{p}}-\left(K+\frac{u}{p}\right)x^n-x^{\frac{1}{p}}+1+\frac{u}{p};$$

$$f'\left(x\right)=\left(n+\frac{1}{p}\right)Kx^{n+\frac{1}{p}-1}-n\left(K+\frac{u}{p}\right)x^{n-1}-\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}.$$

■ **Пример 26.7.** Облигация со сроком 7 лет, купонные проценты по которой выплачиваются ежеквартально по годовой купонной ставке 8%, продается на рынке по курсу 85%.

Определить номинальную доходность вложений в облигации, а также реальную доходность при ожидаемом ежегодном темпе инфляции 3%.

Решение.

▸Для первой итерации положим $x_1 = 1{,}1$;

$$f\left(x_1\right)=0{,}85\cdot 1{,}1^{7{,}25}-0{,}87\cdot 1{,}1^{7}-1{,}1^{0{,}25}+1+0{,}02=-0{,}0031459;$$

$$f'\left(x_1\right)=7{,}25\cdot 0{,}85\cdot 1{,}1^{6{,}25}-7\cdot 0{,}87\cdot 1{,}1^{6}-0{,}25\cdot 1{,}1^{-0{,}75}=0{,}15894;$$

$$x_2=x_1-\frac{f\left(x_1\right)}{f'\left(x_1\right)}=1{,}1-\frac{-0{,}0031459}{0{,}15894}=1{,}119793.$$

▸Вторая итерация:

$$f\left(x_2\right)=0{,}0009945;\quad f'\left(x_2\right)=0{,}2618693;$$

$$x_3=1{,}119793-\frac{0{,}0009945}{0{,}2618698}=1{,}1159953.$$

▸Третья итерация:

$$f\left(x_3\right)=0{,}0000399;\quad f'\left(x_3\right)=0{,}2409694;$$

$$x_4=1{,}1159953-\frac{0{,}0000399}{0{,}2409694}=1{,}1158297.$$

Проверка.

Подставим результат в **(26.9)**:

$$0{,}85-0{,}08\cdot\frac{1-x_4^{-7}}{4\cdot\left(x_4^{0{,}25}-1\right)}-x_4^{-7}=-1{,}2\cdot 10^{-7}.$$

Так как эта величина близка к нулю, то решение найдено правильное. В соответствии с **(26.10)** находим $r = 0{,}1158297$, или $\approx 11{,}58\%$.

Реальная доходность определяется по формуле

$$a = \frac{1+r}{\sqrt[n]{I_p}} - 1 = \frac{1+r}{I_{p,1}} - 1 = \frac{1{,}1158297}{1{,}103} - 1 = 0{,}0833298, \text{ или } \approx 8{,}33\%. \quad \square$$

Для облигаций с выплатой по купонам один раз в году уравнение для определения доходности **(26.9)** запишем в виде

$$K - u\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} - (1+r)^{-n} = 0.$$

Для бессрочных облигаций с выплатами по купонам p раз в году уравнение **(26.9)** можно представить в виде формулы для расчета доходности. В пределе при n, стремящемся к бесконечности, **(26.9)** приобретает вид

$$K = \frac{u}{p\left[(1+r)^{1/p} - 1\right]}.$$

Решая это уравнение относительно r, получим

$$r = \left(1 + \frac{u}{pK}\right)^p - 1. \qquad \textbf{(26.11)}$$

При выплате по купонам один раз в году имеем

$$r = \frac{u}{K}. \qquad \textbf{(26.12)}$$

■ **Пример 26.8.** Бессрочная облигация с номиналом 5000 руб., проценты по которой выплачиваются ежеквартально (раз в году), приобретена за 3950 руб. Купонная ставка равна 8% годовых.

Определить курс облигации и ее доходность.

Решение.

Курс облигации определяется по формуле **(26.1)**:

$$K = \frac{B}{N} = \frac{3950}{5000} = 0{,}79, \text{ или } 79\%.$$

▸Для первого варианта доходность определяют по формуле **(26.11)**:

$$r = \left(1 + \frac{0{,}08}{4 \cdot 0{,}79}\right)^4 - 1 = 0{,}1105177, \text{ или } \approx 11{,}05\%.$$

▸Для второго варианта доходность рассчитывают по формуле **(26.12)**:

$$r = \frac{0{,}08}{0{,}79} = 0{,}1012658, \text{ или } \approx 10{,}13\%. \quad \square$$

Если проценты по купонной ставке и и номинал выплачиваются в конце срока, то доходность такой облигации определяется из уравнения **(26.7)**, которое можно представить в виде

$$\frac{1+u}{1+r}=\sqrt[n]{K}.$$

Отсюда находим

$$r=\frac{1+u}{\sqrt[n]{K}}-1. \tag{26.13}$$

■ **Пример 26.9.** Бескупонная облигация со сроком 7 лет, проценты и номинал по которой выплачиваются в конце срока, куплена за 3950 руб. Номинал облигации равен 5 тыс. руб. Купонные проценты начисляются по ставке 8% годовых.

Определить доходность инвестиций.

Решение.

Подставив исходные данные задачи в формулу **(26.13)**, получим

$$r=\frac{1+u}{\sqrt[n]{\frac{B}{N}}}-1=\frac{1{,}08}{\sqrt[7]{\frac{3950}{5000}}}-1=0{,}116988,\ \text{или}\ \ 11{,}7\%. \ \square$$

Курс бескупонной облигации, по которой в конце срока выплачивается только номинал, определяется из соотношения **(26.8)**. Решив это уравнение относительно r, находим доходность бескупонной облигации

$$r=\frac{1}{\sqrt[n]{K}}-1. \tag{26.14}$$

■ **Пример 26.10.** Бескупонная облигация со сроком 7 лет куплена по курсу 79%.

Определить доходность инвестиций.

Решение.

Доходность определяем по формуле **(26.14)**:

$$r=\frac{1}{\sqrt[7]{0{,}79}}-1=0{,}034248,\ \text{èëè}\ \ \approx 3{,}42\%. \ \square$$

26.4. Учет налогов и комиссионных платежей при определении доходности облигаций

Рассмотренные методы для определения доходностей различных типов облигаций не учитывают расходов, связанных с налогами и комиссионными платежами. Если рыночная цена облигации равна B, то инвестор, с учетом комиссионных по ставке l, заплатит за нее $B(1 + l)$. Поэтому в правую часть формулы для расчета цены облигации **(26.2)** вместо расчетной цены *A* надо подставить истинные затраты инвестора, т.е. $B(1+l)$. С другой стороны, с купонных процентов взимается налог по ставке *g*. Поэтому за год инвестор получит проценты, равные $uN(1-g)$, а не uN. С учетом сказанного соотношение для цены облигации **(26.2)** можно переписать в виде

$$B(1+l)=uN(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}+\frac{N}{(1+r)^{n}}\cdot \qquad \textbf{(26.15)}$$

Отсюда находим формулу для определения рыночного курса:

$$K=\frac{B}{N}=\frac{1}{(1+l)}\left\{u(1-g)\frac{1-(1+r)^{-n}}{p\left[(1+r)^{1/p}-1\right]}+(1+r)^{-n}\right\}\cdot \qquad \textbf{(26.16)}$$

Решая это уравнение относительно *r*, определяют доходность инвестиций. При решении **(26.16)** методом Ньютона—Рафсона преобразуем его с учетом замены **(26.10)** к виду

$$K(1+l)x^{n+\frac{1}{p}}-\left[K(1+l)+\frac{u(1-g)}{p}\right]x^{n}-x^{1/p}+1+\frac{u(1-g)}{p}=0.$$

В качестве искомой функции принимаем

$$f(x)=K(1+l)x^{n+\frac{1}{p}}-\left[K(1+l)+\frac{u(1-g)}{p}\right]x^{n}-x^{1/p}+1+\frac{u(1-g)}{p};$$

$$f'(x)=\left(n+\frac{1}{p}\right)K(1+l)x^{n+\frac{1}{p}-1}-n\left[K(1+l)+\frac{u(1-g)}{p}\right]x^{n-1}-\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}.$$

■ **Пример 26.11.** Облигация со сроком 7 лет, купонные проценты по которой выплачиваются ежеквартально по годовой купонной ставке 8%, продается на рынке по курсу 85%. При ее покупке инвестор заплатил комиссионные в размере 3% номинала.

Определить доходность вложений в облигации при взимании налога с купонных процентов по ставке 30%.

Решение.

▸Для первой итерации положим $x_1=1{,}1$;

$$f(x_1)=0{,}8755\cdot1{,}1^{7{,}25}-0{,}8895+1{,}1^{7}-1{,}1^{0{,}25}+1{,}014=0{,}0037447;$$

$$f'(x_1)=6{,}347375\cdot1{,}1^{6{,}25}-6{,}2265\cdot1{,}1^{6}-0{,}25\cdot1{,}1^{-0{,}75}=0{,}252537;$$

$$x_2=1{,}1-\frac{0{,}0037447}{0{,}252537}=1{,}0851717.$$

▸Вторая итерация:

$$f(x_2) = 0,0005757; \quad f'(x_2) = 0,1762466;$$

$$x_3 = 1,0851717 - \frac{0,0005757}{0,1762466} = 1,0819053.$$

▸Третья итерация:

$$f(x_3) = 0,0000257; \quad f'(x_3) = 0,16051338;$$

$$x_4 = 1,0819053 - \frac{0,0000257}{0,16051338} = 1,0817452.$$

Проверка.

Подставим результат в **(26.16)**:

$$0,85 - \frac{1}{1,03}\left[0,08(1-0,7)\frac{1-x_4^{-7}}{4\cdot\left(x_4^{0,25}-1\right)} + x_4^{-7}\right] = 3,22\cdot 10^{-6}.$$

Так как эта величина близка к нулю, то найденное решение верно. В соответствии с **(26.10)** принимаем $r = 0,0817452$, или $\approx 8,17\%$. □

Для курса бескупонной облигации уравнение **(26.16)** можно записать в виде

$$K = \frac{1}{(1+l)(1+r)^n}.$$

Решив его относительно r, получим

$$r = \frac{1}{\sqrt[n]{K(1+l)}} - 1. \qquad \textbf{(26.17)}$$

■ **Пример 26.12.** Бескупонная облигация со сроком 7 лет куплена по курсу 79%. При ее приобретении инвестор заплатил 3% номинала в виде комиссионных.

Определить доходность инвестиций.

Решение.

Доходность определяем по формуле **(26.17)**:

$$r = \frac{1}{\sqrt[7]{0,79\cdot 1,03}} - 1 = 0,02989, \text{ или } \approx 2,99\%. \ \square$$

При выплате купонных процентов p раз в году по бессрочной облигации уравнение **(26.16)** приобретает вид

$$K = \frac{u(1-g)}{(1+l)\,p\left[(1+r)^{1/p} - 1\right]}.$$

Отсюда находим

$$r = \left[1 + \frac{u(1+g)}{pK(1+l)}\right]^p - 1. \tag{26.18}$$

При выплате купонных процентов один раз в году по бессрочной облигации уравнение **(26.18)** можно записать в виде

$$r = \frac{u(1+g)}{pK(1+l)}. \tag{26.19}$$

■ **Пример 26.13.** Бессрочная облигация, проценты по которой выплачиваются ежеквартально (раз в году) по годовой купонной ставке 8%, приобретена по курсу 0,79%. При ее приобретении инвестор заплатил комиссионные в размере 3% рыночной цены облигации. На купонные проценты начисляется налог по ставке 30%.

Определить доходность инвестиций.

Решение.

▸Для первого варианта доходность определяют по формуле **(26.18)**:

$$r = \left(1 + \frac{0,08 \cdot 0,7}{4 \cdot 0,79 \cdot 1,03}\right)^4 - 1 = 0,070618, \text{ или } \approx 7,06\%.$$

▸Для второго варианта доходность рассчитывают по формуле **(26.19)**:

$$r = \frac{0,08 \cdot 0,7}{0,79 \cdot 1,03} = 0,06882143, \text{ или } \approx 6,88\%.$$ □

26.5. Государственные и корпоративные облигации

Государственные ценные бумаги являются финансовыми инструментами, обслуживающими государственный внутренний долг, и представляют собой облигации и векселя Министерства финансов РФ. Рынок государственных ценных бумаг является исключительно важным элементом экономической структуры страны с рыночной экономикой. Для государства он представляет собой механизм привлечения инвестиционных ресурсов, а для инвесторов является выгодным направлением вложения денежных средств.

Федеральными государственными ценными бумагами признаются бумаги, выпущенные от имени Российской Федерации. Денежные средства, привлекаемые в результате размещения государственных ценных бумаг, и порядок их расходования определяются федеральными законами и законами субъектов Российской Федерации.

Эмитентом на рынке государственных ценных бумаг выступает государство в лице Министерства финансов РФ. Первичное размещение и погашение ценных бумаг осуществляется Центральным банком РФ по поручению Министерства финансов РФ.

Инвестором на рынке государственных ценных бумаг может быть любое юридическое или физическое лицо, резиденты и нерезиденты.

Контролирующим органом на рынке государственных ценных бумаг является Центральный банк РФ.

Существенную долю в структуре внутреннего государственного долга занимают государственные краткосрочные облигации (ГКО) и облигации федерального займа (ОФЗ), которые используются для покрытия дефицита федерального бюджета.

Значительное развитие среди государственных ценных бумаг получил сегмент рынка, связанный с обращением государственных краткосрочных бескупонных облигаций. Эти облигации выпускаются в обращение как именные государственные ценные бумаги. Размещение ГКО происходит с дисконтом, а погашение осуществляется в безналичной форме по номинальной стоимости.

Облигации государственного федерального займа с переменным купонным доходом (ОФЗ-ПК) являются именными государственными ценными бумагами и выпускаются в бездокументарной форме. Владелец облигации имеет право на получение номинальной стоимости и на купонный доход при погашении выпуска. Поэтому рыночная стоимость ОФЗ-ПК определяется номинальной стоимостью облигации и накопленным купонным доходом. Процентная ставка купонного дохода определяется как средневзвешенная доходность по тем выпускам ГКО, погашение которых будет произведено в период от 30 дней до даты выплаты очередного купонного дохода. Величина купонного дохода рассчитывается отдельно для каждой выплаты купонного дохода. Проценты по первому купону исчисляются с момента выпуска облигации до даты погашения. Проценты по другим купонам, включая последний, начисляются с даты выплаты предшествующего купонного дохода до даты погашения.

Облигации государственного федерального займа с постоянным купонным доходом (ОФЗ-ПД) являются ценными именными государственными бумагами. Номинальная стоимость облигации равна 1000 руб. Величина купонного дохода является постоянной. Проценты по первому купону исчисляются с момента выпуска облигации до даты его выплаты. Проценты по другим купонам начисляются с момента выплаты предшествующего купонного дохода до даты выплаты этого дохода.

Облигации государственного сберегательного займа (ОГСЗ) предназначены для активного привлечения средств населения в российскую экономику. ГКО и ОФЗ с переменным купоном предназначены для физических и юридических лиц. Однако в силу специфики их выпуска и обращения участие физических лиц в операциях с этими ценными бумагами весьма затруднительно. Это связано с тем, что облигации выпущены в обращение в бездокументарной форме, их учет ведется в специализированном депозитарии, операции купли-продажи ценных бумаг проводятся только через биржевые торги, к участию в которых допущены уполномоченные дилеры, а дилеру выгодно работать только с крупными суммами. Поэтому для частных лиц выпущены ОГСЗ с номинальной стоимостью 500 руб. Облигации выпускаются в документарной форме со сроком обращения 1—2 года и регулярной выплатой дохода по купонам. Купонный период составляет 3 месяца. Купонный доход определяется по аналогии с доходом по ОФЗ и привязан к среднему уровню доходности по ГКО. При этом обычно устанавливается премия к расчетному среднему уровню доходности. Реализация облигаций осуществляется через уполномоченные банки, которым эмитент продает выпущенные облигации на аукционе. С ОГСЗ можно совершать сделки купли-продажи в течение срока их обращения.

Ценными муниципальными бумагами называются ценные бумаги, выпущенные от имени муниципального образования. Решение об эмитенте ценных муниципальных бумаг РФ принимает Правительство РФ. Эмитентом ценных муниципальных бумаг выступает исполнительный орган местного самоуправления, действующий на основе устава муниципального образования. В 1992 г. в России были зарегистрированы первые муниципальные займы.

Корпоративная облигация — это ценная бумага, удостоверяющая право владельца требовать ее погашения в установленные сроки. Облигация может выпускаться под залог имущества, под обеспечение третьих лиц и без обеспечения, но только на третий год после учреждения акционерного общества и двух лет его безупречной работы. Сумма номиналов выпущенных облигаций не должна превышать уставный капитал или величину предоставленного обеспечения.

Облигации могут быть *именными* и *на предъявителя*. При выпуске именных облигаций акционерному обществу следует позаботиться о ведении реестра их владельцев. При наступлении срока погашения облигации оплачиваются деньгами или иным имуществом сериями или единовременно.

При ликвидации акционерного общества на первом этапе происходит выплата денежных средств кредиторам, к которым относятся также владельцы облигаций. На втором этапе после удовлетворения требований кредиторов удовлетворяются требования акционеров.

Проценты по облигациям должны выплачиваться независимо от результатов хозяйственной деятельности общества. Дивиденды по акциям могут совсем не выплачиваться.

26.6. Дюрация и изгиб

Цена облигации со сроком n_T, с купонными ежегодными выплатами R_t (где T — общее количество выплат; t — номер выплаты) и с номиналом N определяется суммой всех выплат, дисконтированных по ставке *r*, и является функцией этой ставки. Таким образом, зависимость цены облигации от ставки можно представить в виде соотношения

$$A(r)=\sum_{t=1}^{T}\frac{R_t}{(1+r)^{n_t}}+\frac{N}{(1+r)^{n_T}}\cdot \qquad \textbf{(26.20)}$$

Обычно по условиям экономических задач всегда $r>-1$. Поскольку инвестор получает суммы R_t и N, то их считают положительными величинами, т.е. $R_t>0$ и $N>0$. Из поставленных условий следует, что $A>0$, т.е. всегда является величиной положительной. Первая производная цены облигации по ставке дисконтирования определяется выражением

$$\frac{dA}{dr}=-\frac{1}{1+r}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{n_t R_t}{(1+r)^{n_t}}+\frac{n_T N}{(1+r)^{n_T}}\right]. \qquad \textbf{(26.21)}$$

Эта производная при поставленных выше условиях — величина всегда отрицательная. Отсюда следует, что функция $A(r)$ является убывающей. Вторая производная цены по ставке

$$\frac{d^2A}{dr^2}=\sum_{t=1}^{T}\frac{n_t(n_t+1)R_t}{(1+r)^{n_t+2}}+\frac{n_T(n_T+1)N}{(1+r)^{n_T+2}}. \qquad \textbf{(26.22)}$$

Как следует из **(26.22)**, вторая производная всегда положительна. Поэтому исследуемая кривая всегда имеет выпуклость, обращенную вниз (рис. 26.1).

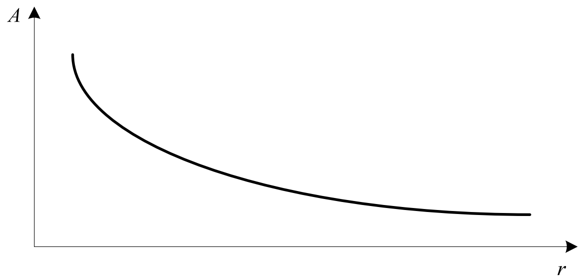


Рис. 26.1. Графическая зависимость цены облигации от ставки

Разложим функцию $A(r)$ в ряд Тейлора в точке $r=r_0$, ограничившись первыми тремя членами:

$$A(r)=A(r_0)+f'(r_0)(r-r_0)+\frac{f''(r_0)}{2}(r-r_0)^2, \qquad \textbf{(26.23)}$$

где $f'(r_0)$, $f''(r_0)$ — первая **(26.21)** и вторая **(26.22)** производные от цены облигации по ставке дисконтирования в точке $r=r_0$.

Разделим левую и правую части **(26.23)** на $A_0 = A(r_0)$ и введем замену:

$$\Delta A = A(r) - A(r_0); \quad \Delta r = r - r_0. \qquad \textbf{(26.24)}$$

В результате получим

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{f'(r_0)}{A_0}\Delta r + \frac{f''(r_0)}{2A_0}(\Delta r)^2. \qquad \textbf{(26.25)}$$

Подставим формулы **(26.21)** и **(26.22)** в **(26.25)**. В результате найдем

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -\frac{1}{A_0}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{n_t R_t}{(1+r_0)^{n_t}} + \frac{n_T N}{(1+r_0)^{n_T}}\right]\frac{\Delta r}{1+r_0} +$$

$$+\frac{1}{2A_0}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{n_t(n_t+1)R_t}{(1+r_0)^{n_t+2}} + \frac{n_T(n_T+1)N}{(1+r_0)^{n_T+2}}\right](\Delta r)^2. \qquad \textbf{(26.26)}$$

Входящие в это выражение величины называются *дюрацией*

$$D = \frac{1}{A_0}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{n_t R_t}{(1+r_0)^{n_t}} + \frac{n_T N}{(1+r_0)^{n_T}}\right] \qquad \textbf{(26.27)}$$

и *изгибом*

$$C = \frac{1}{2A_0}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{n_t(n_t+1)R_t}{(1+r_0)^{n_t+2}} + \frac{n_T(n_T+1)N}{(1+r_0)^{n_T+2}}\right]. \qquad \textbf{(26.28)}$$

Используя эти выражения, перепишем **(26.26)** в виде

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -D\frac{\Delta r}{1+r_0} + C\cdot(\Delta r)^2. \qquad \textbf{(26.29)}$$

Подставив в **(26.29)** введенные выше обозначения **(26.24)**, получим

$$A = A_0\left[1 - D\frac{\Delta r}{1+r_0} + C\cdot(\Delta r)^2\right]. \qquad \textbf{(26.30)}$$

Если пренебречь изгибом, то зависимость для цены акции будет иметь вид

$$A = A_0\left[1 - D\frac{\Delta r}{1+r_0}\right]. \qquad \textbf{(26.31)}$$

Полученные зависимости в виде графиков представлены на рис. 26.2.

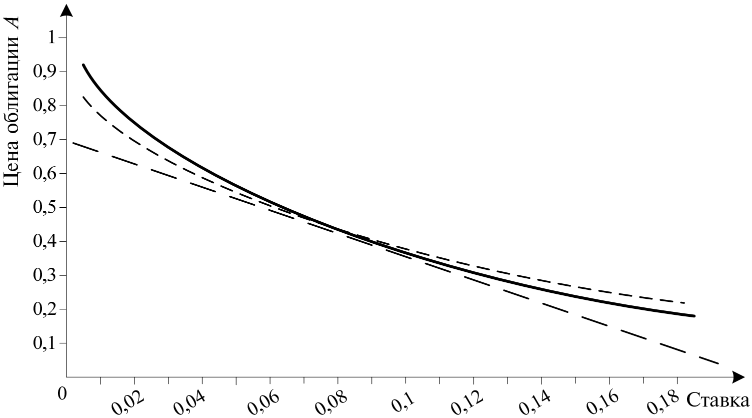


Рис. 26.2. Определение дюрации:

——— истинная цена; – – – – цена с учетом дюрации;
--------- цена с учетом дюрации и изгиба

Сплошная линия — это цена облигации, рассчитанная по формуле **(26.20)**. Кривая, представленная точками, — это график цены облигации с учетом дюрации и изгиба. Эта линия соответствует функции **(26.30)**. Прямая пунктирная линия соответствует соотношению **(26.31)**, в котором учтена только дюрация. Все три линии пересекаются в точке (r_0, A_0). Сплошная линия и пунктирная прямая касаются в этой точке.

Таким образом, при известных дюрации и изгибе по формуле **(26.29)** легко определить изменение цены облигации ΔA при незначительном изменении ставки дисконтирования Δr. При увеличении модуля Δr ошибка расчета величины изменения цены облигации увеличивается. Если в формуле **(26.29)** отбросить последнее слагаемое, то изменение цены облигации при изменении ставки дисконтирования будет определяться только дюрацией, т.е.

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -D\frac{\Delta r}{1+r_0}. \qquad \textbf{(26.32)}$$

В этом случае ошибка рассчитываемого изменения цены будет возрастать.

Как следует из формулы **(26.27)**, дюрация — это взвешенное среднее моментов платежа. Весами являются дисконтированные платежи, деленные на современную стоимость всех платежей. Единицей измерения дюрации является единица измерения времени (год).

■ **Пример 26.14.** Бескупонная облигация, имеющая номинал 5 тыс. руб., будет погашена через два года. Определить цену облигации, дюрацию и изгиб для ставки дисконтирования 10% годовых (точка разложения).

Найти изменение цены облигации при изменении ставки дисконтирования на ±2% для трех случаев:

- истинное (формула **(26.20)**);
- при учете только дюрации и изгиба;
- при учете только дюрации.

Найти методические ошибки расчета цены при учете дюрации и изгиба, а также только дюрации.

Решение.

Для определения истинной цены облигации используется формула **(26.20)**, которая для бескупонной облигации имеет вид

$$A_0 = \frac{N}{\left(1+r_0\right)^{n_T}} = \frac{5000}{\left(1+0,1\right)^2} = 4132,23 \text{ руб.}$$

Дюрация определяется по формуле **(26.27)**, преобразовав которую получим

$$D = \frac{1}{A_0} \cdot \frac{n_T N}{\left(1+r_0\right)^{n_T}} = n_T. \qquad \mathbf{(26.33)}$$

Таким образом, дюрация для сосредоточенного платежа равна сроку его выплаты, для нашего случая

$$D = 2 \text{ года.}$$

Изгиб рассчитывается по формуле **(26.28)**:

$$C = \frac{1}{2A_0} \cdot \frac{n_T\left(n_T+1\right)N}{\left(1+r_0\right)^{n_T+2}} = \frac{n_T\left(n_T+1\right)}{2\left(1+r_0\right)^2} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 1,1^2} = 2,48.$$

Истинное изменение цены облигации при изменении ставки дисконтирования на величину Δr определяется соотношением

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A(r)-A_0}{A_0} = \frac{\dfrac{N}{\left(1+r_0+\Delta r\right)^{n_T}} - \dfrac{N}{\left(1+r_0\right)^{n_T}}}{\dfrac{N}{\left(1+r_0\right)^{n_T}}} = \left(\frac{1+r_0}{1+r}\right)^{n_T} - 1.$$

Для условий примера $r = r_0 \pm \Delta r = 10\% \pm 2\%$. Подставив эти значения в полученную формулу, найдем

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \left(\frac{1+0,1}{1+0,1+0,02}\right)^2 - 1 = -0,0354, \text{ или } -3,54\%;$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \left(\frac{1+0,1}{1+0,1-0,02}\right)^2 - 1 = -0,03738, \text{ или } -3,738\%.$$

Изменение цены облигации при учете дюрации и изгиба определяется по формуле **(26.29)**:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -2\frac{0,02}{1,1} + 2,48 \cdot 0,02^2 = -0,03537, \text{ или } -3,537\%;$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -2\frac{-0,02}{1,1} + 2,48 \cdot \left(-0,02^2\right) = -0,03736, \text{ или } -3,736\%.$$

Изменение цены облигации при учете только дюрации определяется по формуле **(26.32)**:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -2\frac{(\pm 0,02)}{1,1} = \mp 0,03636, \text{ или } \mp 3,636\%.$$

Результаты расчета сведены в табл. 26.1.

Таблица 26.1

Δr, %	*Истинное изменение цены, %*	*Изменение цены при учете дюрации и изгиба, %*	*Ошибка расчета изменения цены при учете дюрации и изгиба, %*	*Изменение цены при учете только дюрации, %*	*Ошибка расчета изменения цены при учете только дюрации, %*
+0,02	−3,54	−3,538	−0,002	−3,636	0,096
−0,02	3,738	3,736	0,002	3,636	0,102

Из табл. 26.1 следует, что учет изгиба снижает ошибку расчета. □

26.7. Учет дюрации при хеджировании портфеля облигаций

Дюрация широко используется при хеджировании портфеля облигаций. Пусть создается портфель облигаций как альтернатива потока платежей, являющихся долгом. Очевидно, что в момент создания портфеля облигаций его приведенная стоимость должна равняться приведенной стоимости потока платежей долга. Но одного этого условия для хеджирования недостаточно, так как при изменении процентной ставки приведенная величина долга может оказаться больше приведенной стоимости портфеля. Действительно, как следует из геометрии рис. 26.3, на котором показаны возможные зависимости приведенной стоимости портфеля и долга от величины ставки, для $r > r_0$ стоимость портфеля превышает долг, а для $r < r_0$ стоимость долга больше стоимости портфеля. Чтобы стоимость портфеля всегда превышала или хотя бы равнялась стоимости долга, нужно следующим образом сформировать портфель облигаций:

1) функции приведенной стоимости портфеля и долга должны касаться друг друга в точке (r_0, A_0), т.е. дюрации этих функций должны быть равны друг другу, а касательные в этой точке совпадать;

2) функция стоимости портфеля должна быть больше стоимости долга в окрестности точки (r_0, A_0), т.е. изгиб функции портфеля должен быть больше изгиба функции долга в этой точке (рис. 26.4).

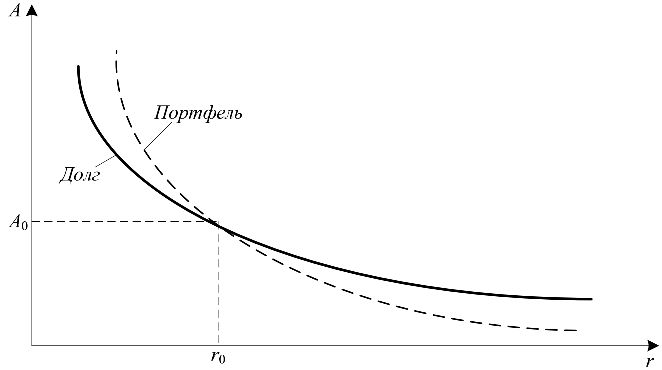


Рис. 26.3. Зависимость стоимости портфеля и долга от ставки

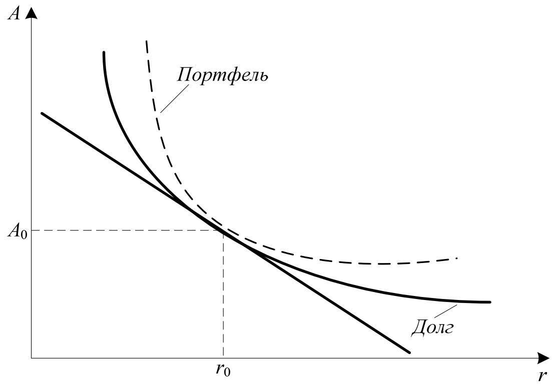


Рис. 26.4. Зависимость стоимости портфеля и долга от ставки при хеджировании

Способ хеджирования портфеля облигаций при помощи подбора дюрации называется *иммунизацией.*

■ **Пример 26.15.** Альтернативой долга в 5 тыс. руб., который должен быть выплачен через 1,5 года, является портфель из двух типов бескупонных облигаций. Причем облигации первого типа погашаются через 1 год, а облигации второго типа — через два года.

Определить состав хеджированного портфеля для опорной ставки дисконтирования 10% годовых.

Решение.

Дюрация долга равна его сроку $D_D = n_D = 1{,}5$ года. Приведенная стоимость долга

$$A_{0,D} = \frac{R_D}{(1+r_0)^{n_D}} = \frac{5000}{1{,}1^{1{,}5}} = 4333{,}92 \text{ руб.}$$

Приведенная стоимость и дюрация портфеля облигаций для рассматриваемого случая определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{R_1}{1+r_0} + \frac{R_2}{(1+r_0)^2}; \\ D &= \frac{1}{A_0}\left(\frac{R_1}{1+r_0} + \frac{2R_2}{(1+r_0)^2}\right). \end{aligned}\right\}$$

Так как дюрация и приведенная стоимость долга должны быть равны дюрации и приведенной стоимости портфеля, то для определения выплат по облигациям надо решить полученную систему из двух уравнений относительно R_1 и R_2. Для этих целей умножим второе уравнение на A_0, вычтем из второго первое и проведем необходимые преобразования. В результате получим

$$R_2 = A_0(D-1)(1+r_0).$$

Подставив это выражение в первое уравнение системы, найдем

$$R_1 = A_0(2-D)(1+r_0).$$

Используя исходные и полученные выше данные, рассчитаем R_1 и R_2:

$$R_1 = 4333{,}92 \cdot (2-1{,}5)(1+0{,}1) = 2383{,}66 \text{ руб.};$$

$$R_2 = 4333{,}92 \cdot (1{,}5-1)(1+0{,}1)^2 = 2622{,}02 \text{ руб.}$$

Современная стоимость этих выплат, т.е. стоимость облигаций на момент формирования портфеля:

$$A_1 = \frac{R_1}{1+r_0} = \frac{2383{,}66}{1{,}1} = 2166{,}96 \text{ руб.};$$

$$A_2 = \frac{R_2}{(1+r_0)^2} = \frac{2622{,}02}{1{,}1^2} = 2166{,}96 \text{ руб.}$$

Сумма современных стоимостей облигаций $A_1 + A_2 = 4333{,}92$ руб., т.е., как и следовало ожидать, равна современной стоимости долга.

По формуле **(26.28)** определяем изгиб для долга и для портфеля:

$$C_D = \frac{1}{2A_{0,D}} \cdot \frac{n_D(n_D+1)R_D}{(1+r_0)^{n_D+2}} = \frac{1{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 5000}{2 \cdot 4333{,}92 \cdot 1{,}1^{3{,}5}} = 1{,}55;$$

$$C=\frac{1}{2A_{0,D}}\left(\frac{n_1(n_1+1)R_1}{(1+r_0)^{n_1+2}}+\frac{n_2(n_2+1)R_2}{(1+r_0)^{n_2+2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 4333,92}\left(\frac{2\cdot 2383,66}{1,1^3}+\frac{6\cdot 2622,02}{1,1^4}\right)=1,653.$$

Так как $C > C_D$, то стоимость портфеля при любом изменении ставки будет больше стоимости долга. Результаты расчета стоимости долга и портфеля при различных ставках представлены в табл. 26.2.

Таблица 26.2

Ставка дисконтирования, %	8	9	10	11	12
Приведенная стоимость долга, %	4454,86	4393,7	4333,92	4275,49	4218,35
Приведенная стоимость портфеля, %	4455,05	4393,75	4333,92	4275,53	4218,53

□

Упражнения

ЗАДАЧИ

26.1. Бессрочная облигация с номиналом 25 000 руб., проценты по которой выплачиваются раз в полгода (раз в году), приобретена за 19 000 руб. Купонная ставка равна 10% годовых. Определить курс облигации и ее доходность.

26.2. Бескупонная облигация со сроком 7 лет, проценты и номинал по которой выплачиваются в конце срока, куплена за 12 500 руб. Номинал облигации равен 15 тыс. руб. Купонные проценты начисляются по ставке 10% годовых. Определить доходность инвестиций.

26.3. Бескупонная облигация со сроком 5 лет куплена по курсу 85%. Определить доходность инвестиций.

26.4. По купонной облигации проценты выплачиваются ежегодно в конце года по 1 тыс. руб.; срок облигации — 2 года, номинал — 5 тыс. руб. Определить цену облигации для ставки дисконтирования 10% и при ее изменении на ±2%, используя дюрацию и изгиб, а также только дюрацию.

Глава 27 ИНВЕСТИЦИОННЫЕ КАЧЕСТВА ФОРВАРДНЫХ КОНТРАКТОВ

27.1. Производные финансовые инструменты

Производные финансовые инструменты, к числу которых относятся форвардные, фьючерсные и опционные контракты, предназначены для борьбы с финансовыми рисками. Часто эти инструменты используются для игры на бирже.

Контракты заключаются на условиях либо немедленной поставки актива, либо поставки актива в будущем. Под *активом* в данном случае понимается товар, лежащий в основе контракта. К активам можно отнести акции, облигации, векселя, банковские депозиты, валюту, предметы труда и т.д.

Если сделки заключаются на немедленную поставку актива, то их называют *кассовыми*, или *спотовыми*. Рынок таких сделок называется *кассовым* (*спотовым*), а цена в результате их заключения — *кассовой* (*спотовой*).

Если сделки заключаются на поставку актива в будущем, то их называют *срочными*. Срочный контракт относится к разновидности производных финансовых инструментов. В срочном контракте оговариваются все условия соглашения. Срочные контракты подразделяются на твердые и условные. *Твердые сделки*, к которым относятся форвардные и фьючерсные контракты, обязательны для исполнения. *Условные сделки* опционных контрактов не обязательны для исполнения одной стороной контракта.

27.2. Понятие форвардного контракта

Форвардный контракт — это соглашение между двумя сторонами о будущей поставке предмета контракта, которое заключается вне биржи.

Заключение форвардного контракта не требует от сторон каких-либо расходов (за исключением накладных расходов). Форвардный контракт — это твердая сделка, обязательная для исполнения. Сторона, которая обязуется поставить актив по контракту, открывает короткую позицию, т.е. продает форвардный контракт. Сторона, которая приобретает актив по контракту, открывает длинную позицию, т.е. покупает форвардный контракт. Форвардный контракт страхует поставщика или покупателя от неблагоприятного изменения цены. При этом какая-то из сторон выигрывает, а какая-то — теряет.

■ **Пример 27.1.** Сторона A (короткая позиция) заключила со стороной B (длинная позиция) форвардный контракт на поставку стороне B через некоторое время 50 облигаций по цене 10 тыс. руб. за каждую. В момент поставки рыночная цена облигаций составила 12 тыс. руб.

Определить проигравшую сторону и величину потерь.

Решение.

Стоимость облигаций в момент поставки составляет

$$S = 12 \cdot 50 = 600 \text{ тыс. руб.}$$

Сторона A поставила облигации за

$$S_{\text{пост}} = 10 \cdot 50 = 500 \text{ тыс. руб.}$$

Потери стороны A составили

$$\Delta S = S - S_{\text{пост}} = 600 - 500 = 100 \text{ тыс. руб.} \quad \square$$

Форвардный контракт является твердой сделкой, но тем не менее существует риск его неисполнения. Поэтому при заключении сделки стороны должны быть уверены в добросовестности и платежеспособности друг друга. Это является недостатком форвардного контракта. Другим его недостатком является практическое отсутствие вторичного рынка, так как трудно найти третью сторону, интересам которой в точности соответствуют условия форвардного контракта.

Рассмотрим типы цен, характеризующих форвардный контракт.

Цена поставки — это цена, по которой сделка будет исполнена. Она определяется в первоначальный момент заключения контракта и не изменяется в течение всего времени его действия. Если первоначальный момент времени обозначить через 0 (рис. 27.1), а время действия контракта — через n, то актив по цене поставки будет поставлен в момент n. Здесь t — текущее время.

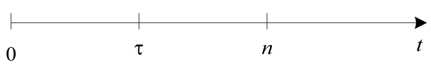


Рис. 27.1. Схема финансовой операции

Форвардная цена — это цена поставки, которая была бы зафиксирована при заключении форвардного контракта с теми же характеристиками, но в момент времени, отличный от первоначального момента, например в момент времени τ (см. рис. 27.1).

■ **Пример 27.2.** *Продолжение примера 27.1.* Через время τ, прошедшее с момента заключения первоначального форвардного контракта, был заключен другой форвардный контракт на те же 50 облигаций, поставляемых в момент времени *n*, но по цене поставки 11 тыс. руб.

Определить цену поставки и форвардную цену первоначального форвардного контракта для момента времени τ.

Решение.

Цена поставки — 10 тыс. руб., форвардная цена — 11 тыс. руб. □

Цена форвардного контракта — это сумма, которую может получить одна из сторон, продав контракт третьему лицу. Ясно, что в первоначальный момент цена форвардного контракта равна нулю, так как стороны при его заключении не несут расходов. С того момента времени, когда форвардная цена начнет отличаться от цены поставки, контракт приобретает цену.

27.3. Цена форвардного контракта на активы, не выплачивающие дивидендов

Моменты реализации операций представлены на рис. 27.1. Пусть форвардный контракт заключается в момент времени $t=0$. Цена поставки актива S_0, безрисковая сила роста δ, являющаяся функцией будущего времени *t*, и современная стоимость актива для момента времени $t=0$ (цена спот) P_0 связаны соотношением **(2.41)**. В новых обозначениях

$$S_0 = P_0 e^{\int_0^n \delta dt}. \qquad \mathbf{(27.1)}$$

При заключении форвардного контракта в момент времени $t=\tau$ форвардная цена *S*, безрисковая сила роста δ и приведенная стоимость актива *P* для момента времени $t=\tau$ определяются выражением

$$P = S e^{-\int_\tau^n \delta dt}. \qquad \mathbf{(27.2)}$$

С другой стороны, при известном ходе безрисковой силы роста во времени стоимость на момент $t=\tau$ вычисляется по формуле

$$P = P_0 e^{\int_0^\tau \delta dt}.$$

Приравняв два последних выражения друг другу, находим формулу для форвардной цены:

$$S = P_0 e^{\int_0^n \delta dt}.$$

Сравнив эту формулу с **(27.1)**, можно сделать вывод, что при известной безрисковой силе роста $\delta(t)$ форвардная цена равна цене поставки для любого момента времени и, следовательно, цена форвардного контракта всегда равна нулю. Отсюда следует вывод о возможности прогнозирования цены форвардного контракта. Для этих целей необходимо иметь хороший прогноз безрисковой силы роста $\delta(t)$.

Реально для любого, как угодно хорошего прогноза, эта функция безрисковой силы роста $\delta(t)$ будущего времени неизвестна. Поэтому при заключении форвардного контракта принимают $\delta = \delta_0$, где δ_0 — сила роста спот на момент заключения договора $t = 0$. Тогда формулу **(27.1)** можно записать в виде

$$S_0 = P_0 e^{\delta_0 n}.$$

Определим цену рассматриваемого форвардного контракта в момент времени $t = \tau$. Для этого найдем форвардную цену S из **(27.2)**, положив $\delta = \delta_\tau = \text{const}$, равной реальной форвардной силе роста или значению силы роста спот в наступившей момент $t = \tau$:

$$P = S e^{-\delta_\tau (n-\tau)} = S e^{-\delta_\tau T},$$

где $T = n - \tau$.

Теперь форвардная цена не равна цене поставки. Поэтому форвардный контракт приобретает цену. Можно составить еще одно уравнение для приведенной стоимости P актива в точке $t = \tau$, состоящей из современной цены форвардного контракта F и актива по цене поставки S_0, записанной в первоначальном контракте:

$$P = F + S_0 e^{-\delta_\tau T}.$$

Современные стоимости двух последних соотношений должны быть равны друг другу, так как в противном случае возможно совершение арбитражной сделки. Приравняв эти стоимости друг другу, находим цену форвардного контракта для момента $t = \tau$:

$$F = (S - S_0) e^{-\delta_\tau T}. \qquad \textbf{(27.3)}$$

Таким образом, цена форвардного контракта на актив, не выплачивающий дивиденды, равна приведенной стоимости от разности между текущей форвардной ценой и ценой поставки, дисконтированной по реальной форвардной силе роста (сила роста спот в наступивший момент времени $t = \tau$).

Точно так же по формуле **(27.3)** определяется цена форвардных контрактов на активы, выплачивающие дивиденды, на активы, выплачивающие дивиденды по ставке процента (силе роста), а также на валюту.

■ **Пример 27.3.** Инвестор покупает форвардный контракт (открывает длинную позицию) на приобретение бескупонной облигации через два года. Цена поставки облигации равна 27 тыс. руб. Сила роста спот через полгода ($\tau = 0{,}5$) равна 20%.

Определить цену форвардного контракта через 0,5 года после его заключения при форвардной цене 30 тыс. руб. и 25 тыс. руб.

Решение:

$$F_1 = (30 - 27) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2 \cdot 1{,}5} = 2{,}22 \text{ тыс. руб.};$$

$$F_2 = (25 - 27) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2 \cdot 1{,}5} = -1{,}48 \text{ тыс. руб.}$$

В первом случае цена имеет знак плюс, т.е. инвестор сможет продать контракт за 2,22 тыс. руб. Во втором случае цена имеет знак минус, т.е. инвестор контракт продать не сможет. Поэтому в момент приобретения актива, при условии, что форвардная цена не изменится за полтора года и будет равна 25 тыс. руб., инвестор переплатит за облигацию 27 − 25 = 2 тыс. руб. □

Таким образом, чтобы избежать потерь при приобретении форвардного контракта, необходимо предвидеть поведение функции силы роста от времени. Для этих целей могут быть использованы методы прогнозирования.

27.4. Форвардный контракт на валюту

Курс поставки валюты — это цена, по которой будет продана единица иностранной валюты в момент поставки.

Найдем формулу для расчета курса поставки валюты. Цена поставки валюты S_0 определяется соотношением

$$S_0 = VK_{\text{пост}}, \qquad \textbf{(27.4)}$$

где V — количество единиц иностранной валюты, поставляемой по окончании контракта; $K_{\text{пост}}$ — курс поставки.

Из формулы **(27.4)** следует, что продавец контракта получит прибыль, если рыночный курс K_n в момент поставки $t = n$ будет меньше объявленного в контракте курса поставки $K_{\text{пост}}$, так как при продаже валюты по рыночному курсу продавец контракта получит меньшую сумму.

При известной силе роста наращения национальной валюты δ цену поставки в национальной валюте можно рассчитать по формуле

$$S_0 = P_0 \mathrm{e}^{\int_0^n \delta dt}, \qquad \textbf{(27.5)}$$

где P_0 — цена спот поставляемой иностранной валюты (современная стоимость актива в национальной валюте для момента времени $t = 0$).

При известной силе роста наращения иностранной валюты Δ приведенной стоимости иностранной валюты, поставляемой по окончании контракта, к моменту заключения контракта Q_0 можно рассчитать по формуле

$$Q_0 = V \mathrm{e}^{-\int_0^n \Delta dt}. \qquad \textbf{(27.6)}$$

Современная стоимость иностранной валюты в национальной валюте для момента времени $t = 0$ определяется соотношением:

$$P_0 = K_0 Q_0 = K_0 V \mathrm{e}^{-\int_0^n \Delta dt}, \qquad \textbf{(27.7)}$$

где K_0 — курс иностранной валюты в момент заключения контракта при $t = 0$.

Подставив **(27.7)** в **(27.5)**, получим

$$S_0 = K_0 V \mathrm{e}^{\int_0^n (\delta - \Delta) dt}. \qquad \textbf{(27.8)}$$

Сопоставив **(27.8)** с **(27.4)**, найдем формулу для расчета курса поставки:

$$K_{\text{пост}} = K_0 \mathrm{e}^{\int_0^n (\delta - \Delta) dt}. \qquad \textbf{(27.9)}$$

Если в **(27.9)** подставить известные в момент заключения контракта силы роста спот для национальной валюты $\delta_{0,n}$ и иностранной валюты $\Delta_{0,n}$, то получим

$$K_{\text{пост}} = K_0 \mathrm{e}^{(\delta_{0,n} - \Delta_{0,n})n}. \qquad \textbf{(27.10)}$$

Удобно цену форвардного контракта **(27.3)** выразить через курс и силу роста иностранной валюты. Для этого выразим слагаемое $S\mathrm{e}^{-\delta_\tau T}$ в соотношении **(27.3)** через указанные параметры. Соотношение для форвардной цены в национальной валюте в момент времени τ, следующее из **(27.2)**, запишем в виде

$$S = Pe^{\int_{\tau}^{n} \delta dt} = Pe^{\delta_\tau T}, \qquad \textbf{(27.11)}$$

где P — приведенная стоимость V единиц иностранной валюты в национальной валюте к моменту $t = \tau$; δ_τ — форвардная сила роста национальной валюты к моменту $t = \tau$, $T = n - \tau$.

При силе роста наращения иностранной валюты Δ_τ к моменту $t = \tau$ приведенную стоимость Q_τ иностранной валюты, поставляемой по окончании контракта, к моменту $t = \tau$ можно рассчитать по формуле

$$Q_\tau = Ve^{-\Delta_\tau T}.$$

Приведенная стоимость V единиц иностранной валюты в национальной валюте к моменту $t = \tau$:

$$P = K_\tau Q_\tau = K_\tau V e^{-\Delta_\tau T}, \qquad \textbf{(27.12)}$$

где K_τ — курс иностранной валюты в наступивший момент $t = \tau$.

Подставив **(27.12)** в **(27.11)**, получим

$$S = K_\tau V e^{(\delta_\tau - \Delta_\tau)T}. \qquad \textbf{(27.13)}$$

Слагаемое $Se^{-\delta_\tau T}$ в соотношении **(27.3)** после подстановки туда **(27.13)** принимает вид

$$Se^{-\delta_\tau T} = K_\tau V e^{(\delta_\tau - \Delta_\tau)T} \cdot e^{-\delta_\tau T} = K_\tau V e^{-\Delta_\tau T}.$$

Заменив в **(27.3)** форвардную цену S на последнее соотношение, найдем формулу для расчета цены форвардного контракта:

$$F = K_\tau V e^{-\Delta_\tau T} - S_0 e^{-\delta_\tau T}. \qquad \textbf{(27.14)}$$

Эта формула удобна тем, что при расчете цены форвардного контракта на валюту позволяет использовать характеристики этой валюты.

27.5. Влияние динамики паритета ставок и цен на характеристики форвардного контракта

Обычно характеристики форвардного контракта определяются исходя из паритета процентных ставок национальной и исследуемой иностранной валюты, который утверждает, что инвестор должен получить одинаковый доход от размещения средств под процент без риска как в национальной, так и в иностранной валюте. При нарушении паритета ставок и цен характеристики форвардного контракта будут изменяться.

На основе введенной в § 2.5 взаимосвязи спотовой и форвардной ставок со ставкой наращения можно оценить целесообразность покупки валюты по форвардному контракту или на рынке в зависимости от типа нарушения паритета.

Пусть инвестор собирается через некоторый промежуток времени приобрести определенную сумму иностранной валюты. Он может поступить в этом случае двояким образом: купить форвардный контракт на приобретение иностранной валюты в будущем или купить в будущем эту валюту на рынке. При решении поставленной задачи инвестор должен учитывать существующие спотовые и форвардные ставки национальной и иностранной валют, их связи с процентными ставками наращения, а также возможные нарушения паритетов ставок и цен.

Для покупки долларов по форвардному контракту инвестор может в настоящий момент времени разместить сумму P_0, соответствующую современной стоимости поставляемой валюты **(27.7)**, под безрисковую силу роста национальной валюты δ на срок n. Наращенная к моменту n сумма будет равна

$$S_{0,n} = P_0 e^{\int_0^n \delta dt}. \qquad \textbf{(27.15)}$$

На эту сумму можно купить V_n единиц иностранной валюты по рыночному курсу K_n, который будет иметь место в момент времени n. Величину V_n можно рассчитать по формуле

$$V_n = \frac{S_{0,n}}{K_n} = \frac{P_0}{K_n} e^{\int_0^n \delta dt}. \qquad \textbf{(27.16)}$$

Однако инвестор по условиям форвардного контракта должен купить V единиц иностранной валюты у продавца этого контракта. Для анализа условий сделки сравним суммы V_n и V. Для этого подставим сумму **(27.7)** в **(27.16)** и найдем

$$\frac{V_n}{V} = \frac{K_0}{K_n} \frac{e^{\int_0^n \delta dt}}{e^{\int_0^n \Delta dt}}. \qquad \textbf{(27.17)}$$

Из паритета процентных ставок, который утверждает, что инвестор должен получить одинаковый доход от размещения средств по безрисковой процентной ставке как в национальной, так и в иностранной валюте, следует, что

$$V = V_n \,. \tag{27.18}$$

Тогда **(27.17)** можно записать в виде

$$\frac{K_n}{K_0} = \frac{e^{\int_0^n \delta dt}}{e^{\int_0^n \Delta dt}}. \tag{27.19}$$

Это выражение определяет паритет курсов иностранной валюты, который можно сформулировать следующим образом. Отношение курса иностранной валюты в момент n совершения операции к курсу этой валюты в момент заключения форвардного контракта равно отношению коэффициента наращения за время n национальной валюты к коэффициенту наращения иностранной валюты.

Рассмотрим соотношение **(27.19)** при постоянных значениях силы роста. Пусть $\delta = \text{const}$ и $\Delta = \text{const}$. Тогда **(27.19)** приобретает вид

$$\frac{K_n}{K_0} = \frac{e^{\delta \cdot n}}{e^{\Delta \cdot n}}. \tag{27.20}$$

Связь сил роста δ и Δ и дискретных ставок $i_Н$ и $i_И$ национальной и иностранной валют соответственно выражается соотношениями

$$\delta = \ln\left(1 + i_Н\right); \qquad \Delta = \ln\left(1 + i_И\right).$$

Подставив эти соотношения в **(27.20)**, найдем

$$\frac{K_n}{K_0} = \frac{e^{\delta \cdot n}}{e^{\Delta \cdot n}} = \frac{e^{n \ln\left(1 + i_Н\right)}}{e^{n \ln\left(1 + i_И\right)}} = \frac{\left(1 + i_Н\right)^n}{\left(1 + i_И\right)^n} \cdot \tag{27.21}$$

Для анализа паритета покупательной способности национальной и исследуемой иностранной валют найдем связь силы роста с индексом цен. Сила роста, рассматриваемая до сих пор в этом параграфе, является брутто-ставкой. Обесцененная инфляцией сумма при использовании силы роста определяется выражением

$$C = \frac{S}{I_p},$$

где I_p — индекс цен за n лет.

Подставив сюда значение для наращенной суммы **(2.65)** и используя применяемые здесь обозначения, получим

$$C = P\frac{e^{\int_0^n \delta(t)dt}}{I_p} \cdot \qquad \textbf{(27.22)}$$

Для компенсации обесценения денег брутто-ставку уменьшают на величину инфляционной премии, являющейся дополнительной доходностью, компенсирующей инфляционные потери. Выразим величину брутто-ставки δ через доходность операции a, очищенную от инфляции. Тогда ставку δ в последней формуле и ставку a в формуле для сложных процентов $C = P(1+a)^n$ надо считать эквивалентными, т.е. их связь определяется уравнением

$$\frac{e^{\int_0^n \delta(t)dt}}{I_p} = (1+a)^n.$$

Отсюда находим

$$e^{\int_0^n \delta(t)dt} = I_p(1+a)^n; \quad a = \left(\frac{e^{\int_0^n \delta(t)dt}}{I_p}\right)^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad \textbf{(27.23)}$$

Подставив первое соотношение **(27.23)** в **(27.19)**, получим

$$\frac{K_n}{K_0} = \frac{I_{p,Н}(1+a_Н)}{I_{p,И}(1+a_И)}, \qquad \textbf{(27.24)}$$

где $I_{p,Н}, I_{p,И}$ — индексы цен национальной и иностранной валют соответственно.

При паритете процентных ставок национальной и исследуемой иностранной валют очищенные от инфляции доходности равны друг другу, т.е.

$$a_Н = a_И.$$

Поэтому соотношение **(27.24)** принимает вид

$$\frac{K_n}{K_0} = \frac{I_{p,Н}}{I_{p,И}}. \qquad \textbf{(27.25)}$$

Получили соотношение для паритета покупательной способности национальной и исследуемой иностранной валют. Этот паритет утверждает, что отношение курсов иностранной валюты в исследуемом и в базисном периодах равно отношению индексов цен в соответствующих странах, рассчитанных для этих же периодов.

Курс валюты зависит от конъюнктуры рынка, инфляции и в определенной степени от субъективных факторов, связанных с финансовой политикой правительства и центрального банка. Безрисковые процентные ставки как национальной, так и иностранной валюты зависят в основном от конъюнктуры рынка и от инфляции. Это положение тем не менее может быть нарушено при активном вмешательстве правительства и центрального банка в работу финансового рынка. Действительно, капитал будет инвестироваться только в том случае, если реальная доходность выше нуля. Однако слишком высокая реальная доходность инвестиций приводит к дефициту средств на выплату процентов, затем следуют банкротства и кризисы. Поэтому в стабильно развивающейся экономике возможны некоторые нарушения паритета покупательной способности валют, но изменение доходности по безрисковым активам отслеживает изменение темпа инфляции. Рассмотрим нарушение паритета ставок и цен на характеристики форвардного контракта. Для этих целей проведем анализ отношения **(27.17)** количества единиц иностранной валюты, купленной непосредственно на рынке, к количеству единиц иностранной валюты, купленной у продавца форвардного контракта. Подставив первое соотношение **(27.23)** в **(27.17)**, найдем

$$\frac{V_n}{V} = \frac{I_{p,H}\left(1+a_H\right)}{I_{p,И}\left(1+a_И\right)} \Big/ \frac{K_n}{K_0}. \qquad \textbf{(27.26)}$$

Для простоты положим $a_H = a_И$. Действительно, если это соотношение будет существенно нарушаться, то инвестор предпочтет вкладывать средства в экономику, приносящую больший доход. Тогда **(27.26)** запишем в виде

$$\frac{V_n}{V} = \frac{I_{p,H}}{I_{p,И}} \Big/ \frac{K_n}{K_0}. \qquad \textbf{(27.27)}$$

В качестве примера валют рассмотрим российский рубль и доллар США. На рис. 27.2 представлена зависимость отношения курса доллара к курсу того же доллара в сентябре 1998 г. (нижняя линия), верхняя линия — индекс цен рубля.

Как следует из рис. 27.2, до первого квартала 1999 г. отношение курса доллара и индекс цен практически совпадали. Позже рост индекса цен начинает существенным образом опережать рост отношения курсов. Рассмотрим пример. Пусть форвардный контракт и счет на покупку долларов открыт в феврале 1999 г. На графике рис. 27.2 в этот момент отношение курса доллара и индекс цен совпадали. Рассмотрим ситуацию через год. Индекс цен опередил отношение курсов доллара на 1,1 дБ, или в 1,288 раза (заметим, что шкала ординат графика – логарифмическая). Темп прироста инфляции для доллара за год составил примерно 3%. Таким образом, разделив 1,288 на 1,03, получим

$$\frac{V_n}{V} = 1,25.$$

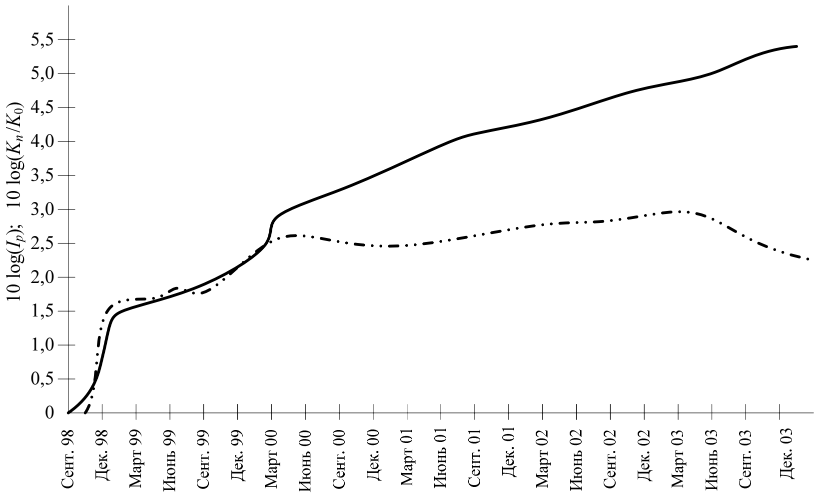


Рис. 27.2. Индекс потребительских цен и курса доллара нарастающим итогом с базой на сентябрь 1998 г.:

— · · — · · индекс курса доллара K_n / K_0; ——— индекс потребительских цен I_p

Это означает, что количество единиц иностранной валюты, купленной непосредственно на рынке, будет на 25% превышать количество единиц иностранной валюты, купленной у продавца форвардного контракта.

Из сказанного следует, что при заключении форвардного контракта инвестор должен учитывать динамику паритета ставок и цен. В частности, при заключении контракта в некоторый (базисный) момент внутри периода нарушения паритетов цен рост индекса цен будет происходить быстрее, чем рост курса доллара. Это означает, что при оговоренных выше условиях выгоднее купить валюту на рынке, а не по форвардному контракту. В общем случае если при составлении форвардного контракта учесть приведенные здесь соображения при определении курса поставки, то рассмотренные финансовые операции могут быть идентичными.

Упражнения

ЗАДАЧИ

27.1. Менеджер заключил 100 форвардных контрактов на поставку покупателю контрактов 100 акций по каждому контракту по цене 12 руб. за каждую акцию. В момент поставки цена акции составляла 11 руб. 73 коп. Определить проигравшую сторону и величину потерь.

27.2. Инвестор покупает форвардный контракт на приобретение 1000 облигаций через год после покупки контракта. Цена поставки облигации равна 58 руб. Сложная процентная ставка спот через три месяца оказалась равной 18% годовых. Определить цену форвардного контракта через три месяца после его заключения при форвардной цене 57,53 руб.

27.3. Найти курс поставки долларов по форвардному контракту, заключенному сроком на 0,75 года. Курс доллара на момент заключения договора равен 29 руб./долл. Процентная ставка спот для национальной валюты равна 14% годовых, для доллара — 7% годовых.

27.4. Форвардный контракт на поставку 10 000 долл. по курсу поставки 29,6 руб./долл. заключен на срок один год. Через полгода курс доллара составил 29,5 руб./долл. Процентная ставка спот для национальной валюты равна 14% годовых, для доллара — 7% годовых. Найти цену форвардного контракта через полгода после его заключения.

27.5. Форвардный контракт на 10 000 долл. заключен на срок один год. В момент заключения контракта курс доллара был равен 27 руб./долл., в момент окончания контракта курс доллара составил 33 руб./долл. Рублевый темп прироста цен за этот промежуток времени был равен 12%, а долларовый — 4%. Найти отношение количества единиц иностранной валюты, купленной непосредственно на рынке, к количеству единиц иностранной валюты, купленной у продавца форвардного контракта.

Глава 28 ИНВЕСТИЦИОННЫЕ КАЧЕСТВА ФЬЮЧЕРСНЫХ КОНТРАКТОВ

28.1. Понятие фьючерсного контракта

Фьючерсный контракт — это соглашение между двумя сторонами о будущей поставке предмета контракта, которое заключается на бирже.

В отличие от форвардного исполнение фьючерсного контракта гарантируется расчетной палатой биржи. После заключения фьючерсный контракт регистрируется, и биржа организует его вторичный рынок, т.е. этот контракт легко продать и купить.

Заключение фьючерсного контракта не требует от инвестора никаких расходов, кроме комиссионных. Сторона, которая обязуется поставить актив по контракту, открывает короткую позицию, т.е. продает фьючерсный контракт. Сторона, которая приобретает актив по контракту, открывает *длинную позицию*, т.е. покупает фьючерсный контракт. При этом покупатель и продавец вносят на счет брокерской компании (маржевый счет) некоторую сумму денег, которая называется *начальной маржей*. Нижний уровень начальной маржи устанавливается расчетной палатой.

Как правило, при помощи фьючерсных контрактов проводится хеджирование позиций контрагентов или игра на разнице цен. В мировой практике только 2—5% контрактов заканчиваются реальной поставкой активов, остальные ликвидируются с помощью офсетных сделок (*офсетная сделка* — это сделка, закрывающая открытую позицию). Если участник контракта желает поставить или принять актив, он информирует об этом расчетную палату, которая выбирает лицо с противоположной позицией и сообщает ему об этом.

28.2. Основные характеристики фьючерсного контракта и фьючерсного рынка

Фьючерсная цена — это цена поставки, которая фиксируется при заключении фьючерсного контракта. Фьючерсная цена изменяется во времени. При росте в дальнейшем фьючерсной цены покупатель контракта выигрывает, а продавец проигрывает. При этом в конце каждого торгового дня расчетная палата переводит сумму выигрыша с маржевого счета проигравшей стороны на счет выигравшей. Эта сумма называется переменной маржей. При корректировке счетов сторон используется котировочная (расчетная) цена, являющаяся средним значением фьючерсных цен, по которым торговались контракты перед самым закрытием торговли в конце торгового дня. Как правило, при определении расчетной цены вычисляется средневзвешенная величина

$$\overline{S} = \sum_{j=1}^{m} S_j l_j \Bigg/ \sum_{j=1}^{m} l_j ,$$

где m — количество сделок, совершаемых в оговоренный правилами в период торговой сессии, равный 2—5 мин; S_j — цена исполнения j-й сделки; l_j — количество контрактов в j-й сделке.

Обычно средневзвешенная цена $\overline{S}$ располагается между котировками покупателя и продавца и в этом случае принимается равной расчетной цене. Существуют и другие правила определения расчетной цены.

Если на маржевом счете сумма превышает нижний уровень маржи, то инвестор может снять излишек со счета. Если эта сумма меньше, то инвестор обязан внести взнос, компенсирующий недостаток. Если инвестор не вносит требуемую сумму, то брокер ликвидирует его позицию с помощью офсетной сделки.

■ **Пример 28.1.** В конце дня заключен фьючерсный контракт на поставку актива по фьючерсной цене 300 руб. Нижний уровень маржи — 15 руб. Обе стороны внесли на маржевый счет начальную маржу по 20 руб. В течение следующих трех дней котировочная цена составила 297, 295, 293 руб. соответственно. Составить таблицу взаиморасчетов (клиринг).

Решение.

В соответствии с изменяющейся котировочной ценой на маржевый счет продавца начисляется переменная маржа 3 руб. в 1-й день, 2 руб. во 2-й день и 2 руб. в 3-й день (табл. 28.1). С маржевого счета покупателя снимается переменная маржа 3 руб. в 1-й день, 2 руб. во 2-й день и 2 руб. в 3-й день. Причем в 3-й день на маржевом счете покупателя оказалась сумма в 13 руб. Брокер извещает покупателя об этом, и тот вносит недостающие 2 руб.

Таблица 28.1

Наименование	*Открытие позиции*	*1-й день*	*2-й день*	*3-й день*
Котировочная цена		297	295	293
Нижний уровень маржи	15	15	15	15
Позиция продавца:				
• маржевый счет	20	23	25	27
• премиальная маржа		3	2	2
Позиция покупателя:				
• маржевый счет	20	17	15	15
• премиальная маржа		—3	—2	—2

□

Фьючерсный и форвардный контракты различаются способом определения прибылей—убытков. Пусть для форвардного контракта цена поставки составляет S_0, а цена актива контракта на дату поставки равна P_n. Тогда прибыли—убытки Π_0 для покупателя контракта на дату поставки составят

$$\Pi_0 = P_n - S_0. \qquad \textbf{(28.1)}$$

Эта величина определяется в день поставки актива. Для фьючерсного контракта корректировка счетов сторон производится в конце каждого рабочего дня. Причем расчет прибылей—убытков проводится по формулам

$$\Pi_1 = S_1 - S_0;\ \ \Pi_2 = S_2 - S_1;\ \ \Pi_3 = S_3 - S_2;\ ...;$$

$$\Pi_{n-1} = S_{n-1} - S_{n-2};\ \ \Pi_n = P_n - S_{n-1},$$

где $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n$ — переменная маржа для 1-го, 2-го, ..., n-го (последнего) дня; n — количество рабочих дней действия контракта; $S_1, S_2, ..., S_{n-1}$ — котировочная цена для 1-го, 2-го, ..., ($n-1$)-го дней.

Для получения суммарных прибылей—убытков нужно сложить ежедневные прибыли—убытки, т.е.

$$\Pi_1 + \Pi_2 + ... + \Pi_n = P_n - S_0 = \Pi_0. \qquad \textbf{(28.2)}$$

Сравнивая **(28.1)** и **(28.2)**, видим, что прибыли—убытки на день поставки форвардного и фьючерсного контрактов равны.

■ **Пример 28.2.** Пусть фьючерсный и форвардный контракты заключены на поставку 1 долл. США 10 марта со сроком поставки 15 марта того же года. Цена поставки равна 30 руб./долл. Курс доллара США и котировочная цена фьючерсного контракта представлены во второй и в третьей строках табл. 28.2.

Определить прибыли—убытки контрактов.

Решение.

Прибыли—убытки $П_0$ по форвардному контракту для покупателя контракта на дату поставки определяются формулой **(28.1)**. Для условий примера прибыль составит

$$П_0 = 31 - 30 = 1 \text{ руб.}$$

По фьючерсному контракту прибыли—убытки составили:

в 1-й день $П_1 = S_1 - S_0 = 29,5 - 30 = -0,5$ руб.;

во 2-й день $П_2 = S_2 - S_1 = 29,6 - 29,5 = 0,1$ руб.;

в 3-й день $П_3 = S_3 - S_2 = 29,75 - 29,6 = 0,15$ руб.;

в 4-й день $П_4 = S_4 - S_3 = 30 - 29,75 = 0,25$ руб.;

в 5-й день $П_5 = S_5 - S_4 = 29,9 - 30 = -0,1$ руб.;

в 6-й день $П_6 = P_6 - S_5 = 31 - 29,9 = 1,1$ руб.

В результате в конце каждого последующего дня владелец фьючерсного контракта будет иметь следующие прибыли—убытки: в 1-й день: −0,5 руб.; во 2-й день: −0,5 + 0,1 = −0,4 руб.; в 3-й день: −0,4 + 0,15 = −0,25 руб.; в 4-й день: −0,25 + 0,25 = 0 руб., в 5-й день: 0 − 0,1 = −0,1 руб.; в 6-й день: −0,1 + 1,1 = 1 руб.

Результаты расчетов сведены в табл. 28.2.

Таблица 28.2

День			10-й	11-й	12-й	13-й	14-й	15-й
Курс доллара			29	29,2	29,55	29,95	29,75	31
Котировочная цена фьючерса			29,5	29,6	29,75	30	29,9	—
Прибыли—убытки	*Форвард*							1
	Фьючерс	*За день*	−0,5	0,1	0,15	0,25	−0,1	1,1
		Итого	−0,5	−0,4	−0,25	0	−0,1	1

Таким образом, прибыли по форвардному и по фьючерсному контрактам совпали в конце срока. □

По каждому виду фьючерсных контрактов биржа устанавливает лимит отклонения фьючерсной цены текущего дня от котировочной цены предыдущего дня. Например, лимитные отклонения могут составлять $\pm 5\%$. Это делается в целях недопущения чрезмерной спекуляции и усиления гарантий исполнения сделок. При превышении отклонений фьючерсной цены одного интервала лимита биржа останавливает торговлю контрактами либо на короткий период, либо до конца рабочего дня. При отклонении фьючерсной цены от котировочной на несколько лимитных интервалов торговля контрактами в течение последующих дней будет открываться и сразу же закрываться. Котировочная цена в этом случае в каждый последующий день будет приближаться к фьючерсной цене на один лимитный интервал. В тот день, когда фьючерсная цена войдет в лимитный интервал котировочной цены, возобновляется торговля фьючерсными контрактами.

■ **Пример 28.3.** Котировочная цена предыдущего дня составила 100 руб. при лимитном отклонении ±5 руб. При открытии торговли фьючерсная цена опустилась до 83 руб. и держалась на этом уровне вплоть до возобновления торговли.

Через сколько дней возобновилась торговля?

Решение.

Количество дней определяется соотношением $\frac{100-85}{5}=3$ дня. Торговля возобновилась через три дня на четвертый. Этот результат поясняется графиком (рис. 28.1).

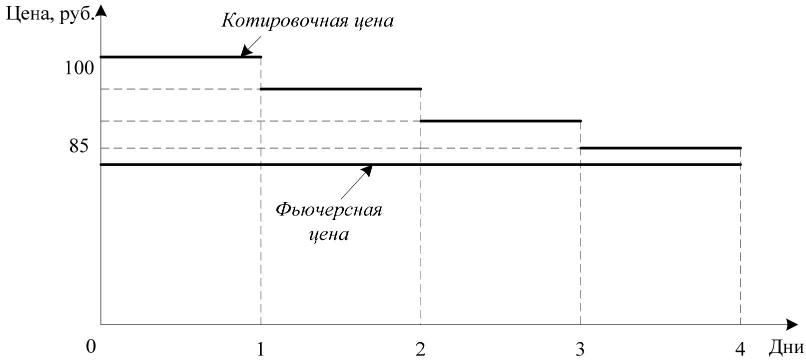


Рис. 28.1. Определение срока для возобновления торговли фьючерсными контрактами

Биржа устанавливает также позиционный лимит, ограничивающий число контрактов у одного инвестора, что делается в целях ограничения спекулятивной активности.

28.3. Будущая цена спот и цена доставки

Будущая цена спот — это цена актива в момент поставки. При заключении фьючерсного контракта фьючерсная цена может быть равной, превышать или быть ниже будущей цены спот. Если не учитывать цену доставки, то фьючерсная цена при приближении к моменту поставки будет стремиться к будущей цене спот (рис. 28.2).

В общем случае фьючерсная цена включает в себя цену доставки. Поясним ее смысл на следующем примере. Пусть владелец художественного произведения хочет продать его, а инвестор хочет купить это произведение, но заплатить и получить его через некоторый промежуток времени n. Для реализации этой операции владелец произведения продает фьючерсный контракт инвестору. Рассмотрим значение фьючерсной цены, которая будет записана в контракте. Во-первых, если цена спот произведения на момент заключения контракта равна P_0, то при вычислении фьючерсной цены к этой величине надо добавить проценты I, которые были бы начислены по безрисковой ставке к сумме P_0 через временной интервал n. Во-вторых, если владелец художественного произведения может получить от владения прибыль в размере $П$, поместив его, например, на выставке, то при вычислении фьючерсной цены эту прибыль надо вычесть из полученной суммы. В-третьих, если владелец понесет некоторые затраты на владение Z в течение срока n, например застраховав произведение, то эти затраты следует суммировать с результатом. Таким образом, фьючерсная цена будет рассчитываться по формуле

$$S_n = P_0 + I - \Pi + Z. \qquad \textbf{(28.3)}$$

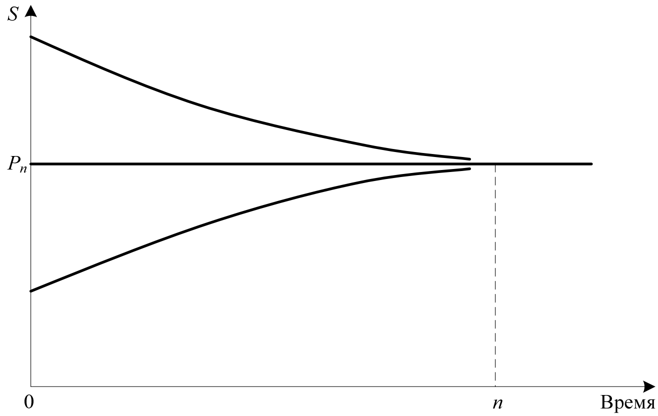


Рис. 28.2. Связь фьючерсной цены с будущей ценой спот

Ценой доставки называют процент за вычетом прибыли от владения плюс затраты на владение, т.е. сумму $I - \Pi + Z$.

■ **Пример 28.4.** Продается фьючерсный контракт с поставкой актива через три месяца по цене $S_0 = 10$ млн руб. Цена спот актива на момент заключения контракта $P_0 = 9$ млн руб. Расходы по хранению и страхованию составляют $P_{xp} = 10$ тыс. руб./мес. Инвестор берет кредит для покупки актива по простой процентной ставке 20% годовых.

Определить прибыли—убытки инвестора.

Решение.

Расходы за хранение актива в течение трех месяцев составят

$$10 \cdot 3 = 30 \text{ тыс. руб.}$$

Через три месяца инвестор поставляет актив за 10 млн руб.

Расходы инвестора составляют

$$P_0(1+\frac{3}{12}i)+30=9000\cdot 1,05+30=9480 \text{ тыс. руб.}$$

Прибыль инвестора равна

$$\Pi = 10\ 000-9480=520 \text{ тыс. руб.} \quad \square$$

28.4. Фьючерсные стратегии

Фьючерсные стратегии (спрэд), формируемые инвестором, заключаются в одновременной покупке и продаже различных фьючерсных контрактов. ***Спрэд*** — это менее рискованная стратегия, чем только покупка или продажа фьючерсных контрактов. К спрэду прибегают в том случае, когда разница цен между различными фьючерсными контрактами, вызванная частными причинами, в будущем должна измениться. Рассматривают *временный* и *межтоварный* спрэд.

28.4.1. СПРЭД БЫКА И МЕДВЕДЯ

Временный спрэд заключается в одновременной покупке и продаже фьючерсных контрактов на один и тот же актив с различными датами поставки.

Стратегия, предполагающая короткую позицию по ближнему контракту и длинную позицию по дальнему контракту, называется ***спрэдом быка***.

Стратегия, предполагающая длинную позицию по ближнему контракту и короткую позицию по дальнему контракту, называется ***спрэдом медведя***.

Если инвестор формирует спрэд быка, то говорят, что он *покупает спрэд*, а если спрэд медведя, то говорят, что он *продает спрэд.*

■ **Пример 28.5.** Инвестор рассматривает прогноз работы с фьючерсными контрактами на поставку 10 000 долл. США по следующим ценам: 15 мая — 28 руб./долл.; 15 июня — 29,5 руб./ долл.

Определить прибыли—убытки инвестора при формировании спрэда медведя из условия, что на следующей сессии:

а) цена доллара 15 мая упала до 26,5 руб./долл., а 15 июня — до 28 руб./долл.;

б) цена доллара 15 мая возросла до 29 руб./долл., а 15 июня — до 30,2 руб./долл.

Решение.

Инвестор формирует спрэд медведя, т.е. покупает майский контракт и продает июньский.

Вариант а). Прибыль инвестора по дальнему контракту составит

$$\Pi_\partial = (29,5-28)\cdot 10\ 000 = 15\ 000 \text{ руб.}$$

Убытки инвестора по ближнему контракту

$$П_б = (26{,}5 - 28) \cdot 10\ 000 = -15\ 000 \text{ руб.}$$

Общая прибыль $П = П_д + П_б = 0$ руб.

Вариант б). Убытки инвестора по дальнему контракту

$$П_д = (29{,}5 - 30{,}2) \cdot 10\ 000 = -7000 \text{ руб.}$$

Прибыль инвестора по ближнему контракту

$$П_б = (29 - 28) \cdot 10\ 000 = 10\ 000 \text{ руб.}$$

Общие убытки $П = П_д + П_б = 3000$ руб.

В варианте *а*) ожидания инвестора не оправдались, и его общая прибыль равна нулю. В варианте *б*) ожидания инвестора оправдались, его доход составил 3000 руб. □

28.4.2. СПРЭД БАБОЧКИ

При формировании стратегии одновременно из трех контрактов используется спрэд быка (медведя) по ближнему и среднему контрактам и спрэд медведя (быка) по среднему и дальнему контрактам. Эта стратегия называется ***спрэдом бабочки***. Если инвестор формирует спрэд быка по ближнему и среднему контрактам (продает ближний контракт и покупает средний) и спрэд медведя по среднему и дальнему контрактам (покупает средний контракт и продает дальний), то говорят, что он *продает спрэд бабочки*, и наоборот.

Пусть будущие цены актива (будущая сессия) по ближнему, среднему и дальнему контрактам равны A, B и C соответственно (табл. 28.3). В настоящий момент (настоящая сессия) цена актива составляет $A+a$, $B+b$ и $C+c$, где a, b, и c — отклонения от будущих цен актива A, B, C.

Таблица 28.3

Вид контракта	*Настоящая сессия*	*Будущая сессия*
Ближний	$A+a$	A
Средний	$B+b$	B
Дальний	$C+c$	C

При покупке спрэда бабочки инвестор покупает ближний контракт $(A-A-a)$ и продает средний $(B+b-B)$ (спрэд медведя), продает средний контракт $(B+b-B)$ и покупает дальний $(C-C-c)$ (спрэд быка). Прибыли—убытки инвестора при покупке спрэда бабочки находят по формуле

$$(A-A-a)+(B+b-B)+(B+b-B)+(C-C-c) = -a-c+2b. \quad \mathbf{(28.4)}$$

При продаже спрэда бабочки инвестор продает ближний контракт $(A+a-A)$ и покупает средний $(B-B-b)$ (спрэд быка), покупает средний контракт $(B-B-b)$ и продает дальний $(C+c-C)$ (спрэд медведя). Прибыли—убытки такой стратегии находят по формуле

$$(A+a-A)+(B-B-b)+(B-B-b)+(C+c-C)=a+c-2b. \quad \textbf{(28.5)}$$

Таким образом, прибыли зависят от величины отклонений цен, равных a, b и c и от их знака.

■ **Пример 28.6.** Инвестор рассматривает возможность работы с фьючерсными контрактами на поставку 10 000 долл. США по следующим курсам (настоящая сессия): 15 мая — 28 руб./долл.; 15 июня — 29,5 руб./долл.; 15 июля — 30,5 руб./долл.

Определить прибыли—убытки инвестора при покупке и продаже спрэда бабочки из условия, что на следующей сессии цены составят:

15 мая — 26,5 руб./долл.; июнь — 28 руб./долл.; июль — 30 руб./долл.

Решение.

а) *Инвестор покупает спрэд бабочки*, т.е. он покупает ближний контракт ($A-A-a$) и продает средний ($B+b-B$) (спрэд медведя), а также продает средний контракт ($B+b-B$) и покупает дальний ($C-C-c$) (спрэд быка).

Прибыли—убытки инвестора по спрэду медведя составят

$$\Pi_{\text{мед}} = (26,5-28)\cdot 10\ 000 + (29,5-28)\cdot 10\ 000 = 0 \text{ руб.}$$

Прибыль инвестора по спрэду быка

$$\Pi_{\text{бык}} = (29,5-28)\cdot 10\ 000 + (30-30,5)\cdot 10\ 000 = 10\ 000 \text{ руб.}$$

Общая прибыль $\Pi = \Pi_{\text{мед}} + \Pi_{\text{бык}} = 10\ 000$ руб.

б) *Инвестор продает спрэд бабочки*, т.е. он продает ближний контракт ($A+a-A$) и покупает средний ($B-B-b$) (спрэд быка), а также покупает средний контракт ($B-B-b$) и продает дальний ($C+c-C$) (спрэд медведя).

Прибыли—убытки инвестора по спрэду быка составят

$$\Pi_{\text{бык}} = (28-26,5)\cdot 10\ 000 + (28-29,5)\cdot 10\ 000 = 0 \text{ руб.}$$

Убытки инвестора по спрэду медведя

$$\Pi_{\text{мед}} = (28-29,5)\cdot 10\ 000 + (30,5-30)\cdot 10\ 000 = -10\ 000 \text{ руб.}$$

Общие убытки $\Pi = \Pi_{\text{бык}} + \Pi_{\text{мед}} = -10\ 000$ руб.

Тот же результат можно получить, используя формулы **(28.4)** и **(28.5)**. Для этого определим

$$a = 28-26,5 = 1,5; \qquad b = 29,5-28 = 1,5; \qquad c = 30,5-30 = 0,5.$$

При покупке спрэда бабочки прибыли—убытки инвестора в расчете на один доллар находят по формуле **(28.4)**. В расчете на 10 тыс. долл. получим

$$\Pi = (-a-c+2b)\cdot 10\ 000 = (-1,5-0,5+2\cdot 1,5)\cdot 10\ 000 = 10\ 000 \text{ руб.}$$

При продаже спрэда бабочки прибыль инвестора в расчете на 1 тыс. долл. составит

$$\Pi = (a+c-2b)\cdot 10\ 000 = (1,5+0,5-2\cdot 1,5)\cdot 10\ 000 = -10\ 000 \text{ руб.}$$

Рассчитанные двумя методами результаты совпали. □

28.4.3. МЕЖТОВАРНЫЙ СПРЭД

Межтоварный спрэд заключается в одновременной покупке и продаже фьючерсных контрактов на разные, но взаимозаменяемые товары, например на апельсины и грейпфруты. Прибыль инвестора в этом случае зависит от разности в изменении цен.

Пусть фьючерсная цена на товары *1* и *2* уменьшается, как показано на рис. 28.3 и 28.4.

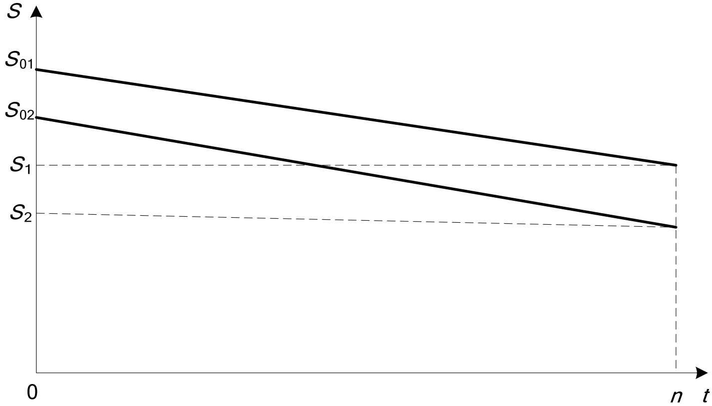


Рис. 28.3. Инвестор покупает спрэд

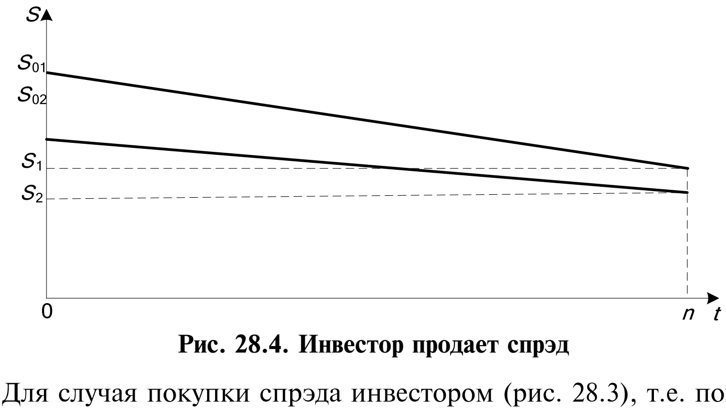


Рис. 28.4. Инвестор продает спрэд

Для случая покупки спрэда инвестором (рис. 28.3), т.е. покупки контракта с более высокой фьючерсной ценой и продажи с более низкой, его прибыль составит

$$\Pi = S_1 - S_{01} + S_{02} - S_2 = (S_1 - S_2) - (S_{01} - S_{02}) .$$

Из этой формулы следует, что при вычислении прибыли из разности фьючерсных цен первого и второго контрактов на момент поставки вычитается разность фьючерсных цен первого и второго контрактов на момент заключения договора.

Для случая рис. 28.4 инвестор продаст спрэд, т.е. продаст контракт с более высокой фьючерсной ценой и купит с более низкой. Его прибыль составит

$$\Pi = S_{01} - S_1 + S_2 - S_{02} = (S_{01} - S_{02}) - (S_1 - S_2).$$

Таким образом, при вычислении прибыли из разности фьючерсных цен первого и второго контрактов на момент заключения договора вычитается разность фьючерсных цен первого и второго контрактов на момент поставки.

Упражнения

ЗАДАЧИ

28.1. В конце дня заключен фьючерсный контракт на поставку актива по фьючерсной цене 10 000 руб. Нижний уровень маржи равен 400 руб. Обе стороны внесли на маржевый счет начальную маржу по 600 руб. В течение следующих пяти дней котировочная цена составила 10 120, 10 040, 9950, 9920, 9900 руб. соответственно. Составить таблицу взаиморасчетов (клиринг).

28.2. Пусть фьючерсный и форвардный контракты заключены на поставку евро 28 апреля со сроком поставки 5 мая того же года. Цена поставки равна 34 руб./евро. Курс евро и котировочная цена фьючерсного контракта представлены во второй и в третьей строках таблицы. Определить прибыли—убытки для контрактов.

28.3. Инвестор рассматривает прогноз работы с фьючерсными контрактами на поставку 1000 евро по следующим ценам: 1 февраля — 34,5 руб./евро; 1 марта — 35 руб./евро. Определить прибыли—убытки инвестора при формировании спрэда быка из условия, что на следующей сессии:

а) цена евро 1 февраля упала до 34 руб./евро, а 1 марта — до 34,6 руб./евро;

б) цена евро 1 февраля возросла до 34,8 руб./евро, а 1 марта — до 35,4 руб./евро.

28.4. Инвестор рассматривает возможность работы с фьючерсными контрактами на поставку 1000 евро по следующим курсам (настоящая сессия): 1 февраля — 34,5 руб./евро; 1 марта — 35 руб./евро; 1 мая — 35,2 руб./евро. Определить прибыли—убытки инвестора при покупке и продаже спрэда бабочки из условия, что на следующей сессии цены составят: 1 февраля — 34,8 руб./евро; 1 марта — до 35,4 руб./евро; 1 мая — 35,4 руб./евро.

Глава 29 ИНВЕСТИЦИОННЫЕ КАЧЕСТВА ОПЦИОНОВ

29.1. Основные характеристики опционов

Опционный контракт (опцион — *option*) на поставку товара в будущем дает следующие права его владельцу:

- купить товар по фиксированной цене (это опцион на покупку, или опцион колл (*coll*));
- продать товар по фиксированной цене (это опцион на продажу, или опцион пут (*put*)).

Владелец опциона может воспользоваться своим правом на покупку или продажу товара, а может и не воспользоваться. Продавец опциона обязан совершить указанную в опционе сделку (купить или продать товар) по требованию владельца опциона.

Американским опционом называется опцион, предусматривающий совершение указанной в опционе сделки в любой момент до наступления срока погашения.

Европейским опционом называется опцион, предусматривающий совершение указанной в опционе сделки в момент наступления срока погашения.

Понятия «американский» и «европейский» указывают не на географическое положение, а на *тип опциона.* Как тот, так и другой виды контрактов заключаются в Европе и в Америке.

Премия — это цена опциона, выплачиваемая покупателем опциона продавцу.

Короткий колл (*пут*) — это продажа опциона, т.е. выписка опционного обязательства поставить (принять) товар по требованию владельца опциона.

Длинный колл (*пут*) — это владение опционом на покупку (продажу).

Класс — это опционные контракты, в основе которых лежит один и тот же товар. Опционы колл и пут образуют разные классы.

Серия — это опционы одного класса, выписанные на одинаковый срок по одинаковой цене исполнения.

Страйковая цена (страйк — *strike*) — это цена исполнения опциона, по которой продавец опциона обязан поставить или принять товар.

Рассмотрим европейский опцион колл (опцион на покупку). Пусть цена акции в момент погашения опциона равна S, а страйковая цена — S_0. Если в момент погашения $S \le S_0$, то владельцу опциона нет смысла ее покупать и его потери составит премия в размере F_0, уплаченная за опцион. Если же $S > S_0$, то прибыли—убытки составят $S - S_0 - F_0$. В общем виде выражение для прибылей—убытков принимает вид

$$\Pi = \begin{cases} -F_0 & \text{при} \quad S \le S_0; \\ S - S_0 - F_0 & \text{при} \quad S > S_0. \end{cases} \qquad \textbf{(29.1)}$$

Графически эта зависимость представлена на рис. 29.1.

Как следует из этого графика, покупатель опциона несет потери при цене спот актива в момент погашения меньше $S < S_0 + F$. При большей цене спот покупатель опциона имеет прибыль.

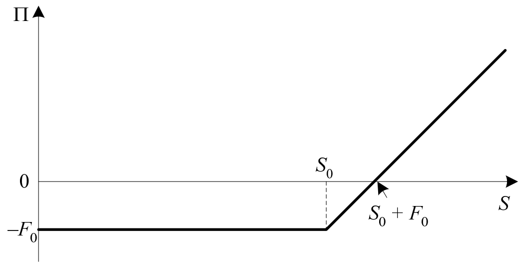


Рис. 29.1. Зависимость прибылей—убытков владельца опциона колл

Для продавца европейского опциона колл результаты сделки будут противоположными. Расчет прибылей—убытков продавца проводится по формуле

$$\Pi = \begin{cases} F_0 & \text{при} \quad S \le S_0; \\ S_0 + F_0 - S & \text{при} \quad S > S_0. \end{cases} \qquad \textbf{(29.2)}$$

Графически эта зависимость представлена на рис. 29.2.

В случае европейского опциона пут (опцион на покупку) при $S \le S_0$ его владелец реализует свое право на продажу акции, и его прибыли—убытки составят $S - S_0 - F_0$. Если же $S > S_0$, то покупатель своим правом не воспользуется. Таким образом, прибыли—убытки покупателя опциона пут составят

$$\Pi = \begin{cases} S_0 - F_0 - S & \text{при} \quad S \le S_0; \\ -F_0 & \text{при} \quad S > S_0. \end{cases} \qquad \textbf{(29.3)}$$

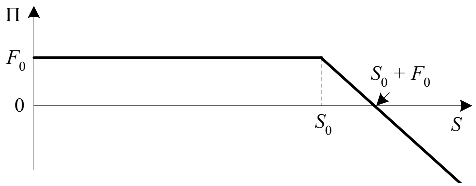


Рис. 29.2. Зависимость прибылей—убытков продавца опциона колл

График этой зависимости имеет вид, представленный на рис. 29.3.

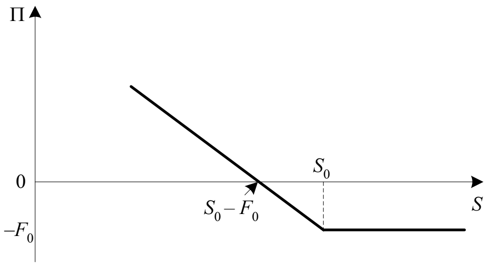


Рис. 29.3. Зависимость прибылей—убытков владельца опциона пут

Для продавца европейского опциона пут прибыли—убытки составят

$$\Pi = \begin{cases} S - S_0 + F_0 & \text{при} \quad S \le S_0; \\ F_0 & \text{при} \quad S > S_0. \end{cases} \qquad \textbf{(29.4)}$$

График этой функции представлен на рис. 29.4.

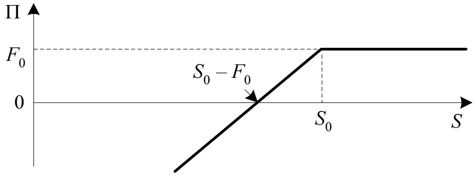


Рис. 29.4. Зависимость прибылей—убытков продавца опциона пут

■ **Пример 29.1.** Инвестор купил европейский колл-опцион на 1000 акций по страйковой цене 10 руб. за акцию. Премия составила 50 коп. за акцию. Спотовая цена акции на момент поставки составила 12 руб.

Определить прибыли—убытки покупателя и продавца.

Решение.

Для покупателя при $S \geq S_0$ прибыль на одну акцию равна

$$П_1 = S - S_0 - F_0 = 12 - 10 - 0,5 = 1,5 \text{ руб.}$$

Прибыль на 1000 акций $П_{1000} = 1,5 \cdot 1000 = 1500$ руб.

Продавец понес убытки в размере 1500 руб. □

■ **Пример 29.2.** Условия предыдущего примера для опциона пут.

Решение.

Так как $S \geq S_0$, то покупатель не реализует своего права на продажу актива и понесет убытки в размере премии за 1000 акций, т.е.

$$П_{1000} = -1000F_0 = -1000 \cdot 0,5 = -500 \text{ руб.}$$

Прибыль продавца составит 500 руб. □

Все формулы справедливы и для американских опционов. При этом под S следует понимать текущую цену актива.

Опционы, так же как фьючерсные контракты, могут не предусматривать поставку товара, а быть расчетными.

Рассмотренные случаи покупки и продажи опционов относятся к одной из четырех групп опционных стратегий. Эта группа называется «*открытые позиции*». При открытой позиции продают (покупают) либо опцион, либо акции. Рассматривают шесть открытых позиций: 1) купить колл (опцион колл); 2) купить пут (опцион пут); 3) продать колл; 4) продать пут; 5) купить акцию; 6) продать акцию.

Помимо премии участниками сделки с опционами выплачиваются комиссионные и гарантийные платежи. При заключении сделки с опционами при исполнении контракта инвестор платит своему брокеру комиссионные. Продавец опционного контракта вносит на счет своего брокера в качестве залога маржу, которую брокер перечисляет на счет брокерской компании.

■ **Пример 29.3.** Инвестор купил пять опционов колл с условием по каждому купить 100 акций по страйковой цене S_0 = 30 руб. за акцию. Премия за одну акцию составила F_0 = 3 руб. Комиссионные за покупку одного контракта K = 40 руб. Цена акции в момент погашения опциона S = 38 руб. (S = 33,6 руб.) Коэффициент комиссионных по кассовой сделке составляет 1,5% стоимости акции в момент погашения опциона.

Определить прибыль инвестора.

Решение.

Прибыли—убытки инвестора составят $S - S_0 - F_0$ при $S > S_0$. Потери инвестора в данном случае увеличатся также за счет комиссионных по кассовой сделке на каждую акцию на величину, равную произведению коэффициента комиссионных на цену акции в момент погашения опциона, т.е.

на rS. Таким образом, прибыли—убытки инвестора на каждую акцию составят $S - S_0 - F_0 - rS$. Для получения общей прибыли надо полученную величину умножить на количество акций по каждому опциону и на количество купленных опционов и из получившегося результата вычесть произведения от комиссионных за покупку одного контракта на количество контрактов. В результате прибыль инвестора определяют по формуле

$$\Pi = l \cdot m \cdot \left(S - S_0 - F_0 - rS\right) - l \cdot K,$$

где l — количество купленных опционов колл; m — количество акций по каждому опциону; S — цена акции в момент погашения опциона; S_0 — страйковая цена; F_0 — премия за одну акцию; r — комиссионные по кассовой сделке от стоимости акции в процентах; K — комиссионные за покупку одного контракта.

По *первому варианту* прибыль

$$\Pi = 5 \cdot 100 \cdot \left(38 - 30 - 3 - 0{,}015 \cdot 38\right) - 5 \cdot 40 = 2015 \text{ руб.}$$

По *второму варианту* прибыль

$$\Pi = 5 \cdot 100 \cdot \left(33{,}6 - 30 - 3 - 0{,}015 \cdot 33{,}6\right) - 5 \cdot 40 = -152 \text{ руб.}$$

В первом варианте цена акции в момент погашения опциона превысила страйковую цену на $((38 - 30)/30) \cdot 100 = 26{,}67\%$. Такое большое превышение привело к прибыли, равной всего 2015 руб. Во втором варианте цена акции в момент погашения опциона также превысила страйковую цену на $((33{,}6 - 30)/30) \cdot 100 = 12\%$, но, несмотря на это, большие комиссионные сборы привели к потерям. □

29.2. Опционные стратегии

Наиболее часто встречаются следующие *четыре группы опционных стратегий*: открытые позиции; закрытые позиции; комбинации; спрэды. Основные открытые позиции рассмотрены в предыдущем параграфе.

29.2.1. ЗАКРЫТЫЕ ПОЗИЦИИ

При закрытой (хеджированной) позиции продают (покупают) акцию и опцион на нее. К закрытым позициям прибегают в целях хеджирования возможных потерь по акциям. При этом количество опционов, приходящихся на одну акцию, может быть различным. Отношение количества опционов к числу акций, находящихся в портфеле, называется ***коэффициентом хеджирования***. Рассмотрим возможные варианты.

▶ **Выписан один опцион колл и куплена одна акция.** Результирующая зависимость прибылей—убытков от цены акции в момент погашения опциона представлена на рис. 29.5 (сплошная линия). Эта результирующая зависимость прибылей—убытков имеет такой же вид, как и соответствующая зависимость продавца опциона пут (см. рис. 29.4).

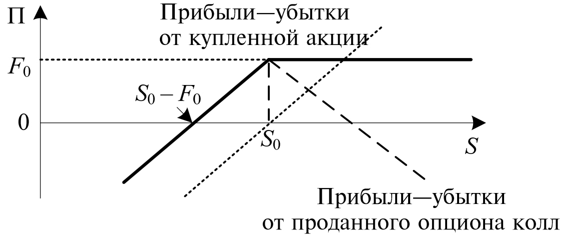


Рис. 29.5. Прибыли—убытки от проданного опциона колл и купленной акции

Эта стратегия позволяет уменьшить возможные потери от покупки акции на величину F_0. Но и прибыль при этом не превысит величины F_0 при любом увеличении цены акции S.

▶ **Продана одна акция и куплен один опцион колл.** Результирующая зависимость прибылей—убытков от цены акции в момент погашения опциона, представленная на рис. 29.6, соответствует зависимости прибылей—убытков для покупателя одного опциона пут (см. рис. 29.3).

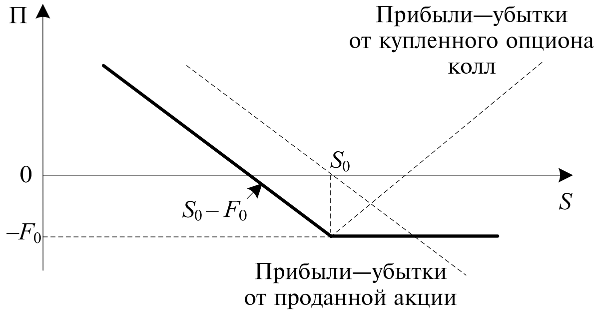


Рис. 29.6. Прибыли—убытки от купленного опциона колл и проданной акции

▶ **Куплена одна акция и куплен один опцион пут.** Результирующая зависимость прибылей—убытков от цены акции в момент погашения опциона, представленная на рис. 29.7, соответствует зависимости прибылей—убытков для покупателя одного опциона колл (см. рис. 29.1).

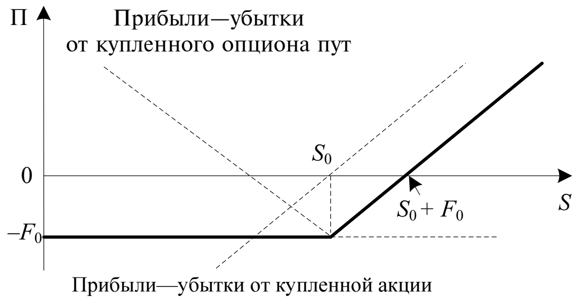


Рис. 29.7. Прибыли—убытки от купленного опциона пут и купленной акции

▶ **Продана одна акция и продан один опцион пут.** Результирующая зависимость прибылей—убытков от цены акции в момент погашения опциона, представленная на рис. 29.8, соответствует зависимости прибылей—убытков для продавца одного опциона колл (см. рис. 29.2).

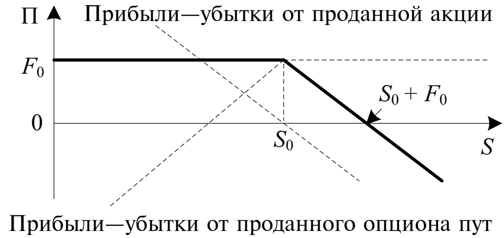


Рис. 29.8. Прибыли—убытки от проданного опциона пут и проданной акции

29.2.2. КОМБИНИРОВАННЫЕ СТРАТЕГИИ

При комбинированной стратегии продают (покупают) опционы пут и опционы колл. Таким образом, в портфель входят либо длинные, либо короткие опционы пут и опционы колл. Дата истечения всех контрактов — одна и та же.

Стрэддл (стеллаж) — это комбинация опционов колл и пут с одной и той же ценой исполнения. *Стрип* — это модификация стрэддла при большем количестве путов, чем коллов, а *стрэп* — наоборот.

Рассмотрим случай, когда куплен один опцион колл и один опцион пут. Результирующая зависимость прибылей—убытков покупателя от цены акции в момент погашения опциона представлена на рис. 29.9 сплошной линией.

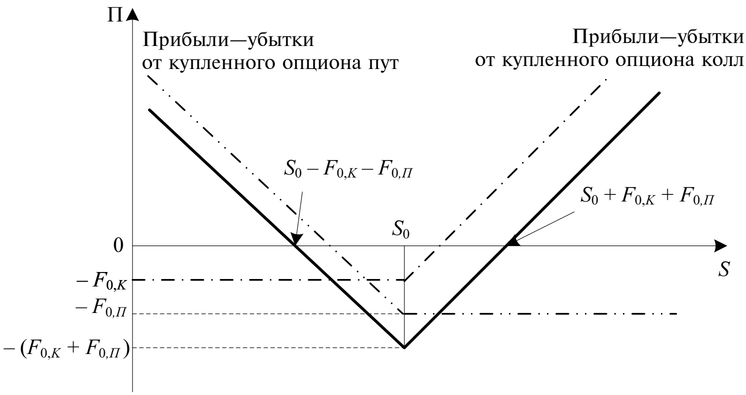


Рис. 29.9. Прибыли—убытки от купленных опционов пут и колл

На рис. 29.9 введены следующие обозначения: $F_{0,K}$ — премия за опцион колл; $F_{0,\ddot{I}}$ — премия за опцион пут. Прибыли покупателя стрэддла быстро растут при сильном изменении цены акции в сторону уменьшения от цены $S_0 - F_{0,K} - F_{0,\ddot{I}}$ или в сторону увеличения от цены $S_0 + F_{0,K} + F_{0,\ddot{I}}$. Покупатель стрэддла несет убытки при стабильной цене акции. Поэтому покупка (продажа) стрэддла называется покупкой (продажей) изменчивости.

Формула для расчета прибылей—убытков покупателя стрэддла имеет вид

$$\Pi = \begin{cases} S_0 - S - F_{0,K} - F_{0,\Pi} & \text{при} \quad S \le S_0; \\ S - S_0 - F_{0,K} - F_{0,\Pi} & \text{при} \quad S > S_0. \end{cases} \qquad \textbf{(29.5)}$$

Если сумма, рассчитанная по этой формуле, имеет знак минус, то это надо понимать как убыток покупателя и прибыль продавца. Результирующая зависимость прибылей—убытков продавца от цены акции в момент погашения опциона представлена на рис. 29.10 сплошной линией.

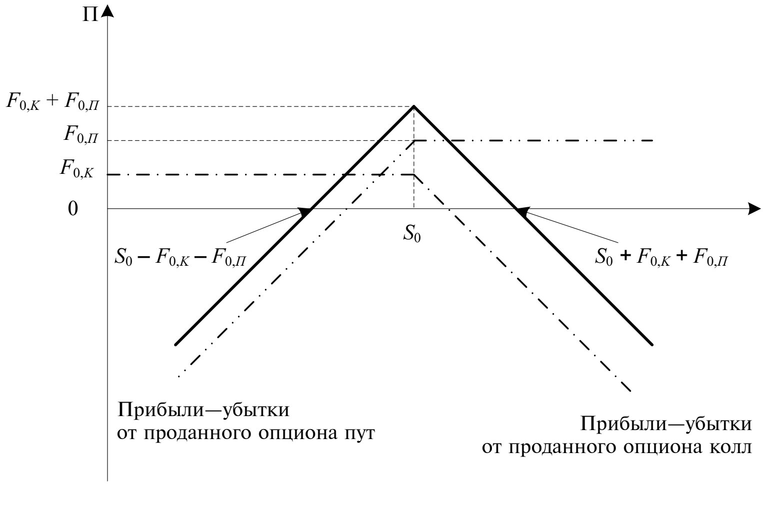


Рис. 29.10 Прибыли—убытки от проданных опционов пут и колл

■ **Пример 29.4.** Инвестор купил стрэддл с ценой исполнения S_0 = 30 руб., заплатив премию за каждую акцию 2 руб. по опционам колл и пут.

Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) S = 26 руб.; 2) S = 30 руб.; 3) S = 35 руб.

Решение.

Для *первой* и *второй ситуаций* решение находится по первой формуле системы **(29.5)**, так как $S \le S_0$:

$$П_1 = 30 - 26 - 2 - 2 = 0 \text{ руб.};$$

$$П_2 = 30 - 30 - 2 - 2 = -4 \text{ руб.}$$

Для *третьей ситуации* решение находится по второй формуле этой системы, так как $S > S_0$:

$$П_3 = 35 - 30 - 2 - 2 = 1 \text{ руб.} \quad \square$$

Стрэнгл — это комбинация опционов колл и пут с ценой исполнения опциона колл $S_{0,K}$ большей цены исполнения опциона пут $S_{0,П}$, т.е. $S_{0,K} > S_{0,П}$. Результирующая зависимость прибылей-убытков покупателя от цены акции в момент погашения опциона представлена на рис. 29.11 сплошной линией.

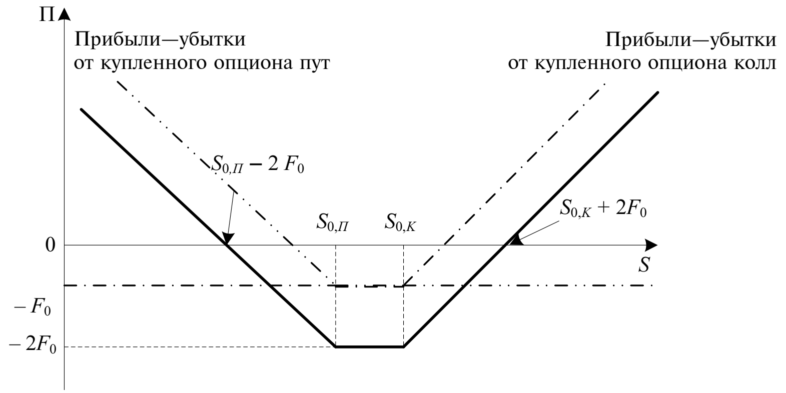


Рис. 29.11. Прибыли—убытки от купленных опционов пут и колл

Прибыли—убытки для покупателя стрэнгла можно рассчитать по формуле

$$П = \begin{cases} S_{0,П} - S - 2F_0 & \text{при} \quad S < S_{0,П}; \\ -2F_0 & \text{при} \quad S_{0,П} \le S \le S_{0,K}; \\ S - S_{0,K} - 2F_0 & \text{при} \quad S > S_{0,K}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.6)}$$

Комбинация стрэнгл удобна для продавца, так как он может получить прибыль в более широком диапазоне цен акций. Результирующая зависимость прибылей—убытков продавца от цены акции в момент погашения опциона представлена на рис. 29.12 сплошной линией.

Формулы **(29.7)** для прибылей—убытков для продавца стрэнгла получают из соотношений **(29.6)**, присвоив результату знак минус:

$$\Pi = \begin{cases} -S_{0,\Pi} + S + 2F_0 & \text{при} \quad S < S_{0,\Pi}; \\ 2F_0 & \text{при} \quad S_{0,\Pi} \le S \le S_{0,K}; \\ -S + S_{0,K} + 2F_0 & \text{при} \quad S > S_{0,K}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.7)}$$

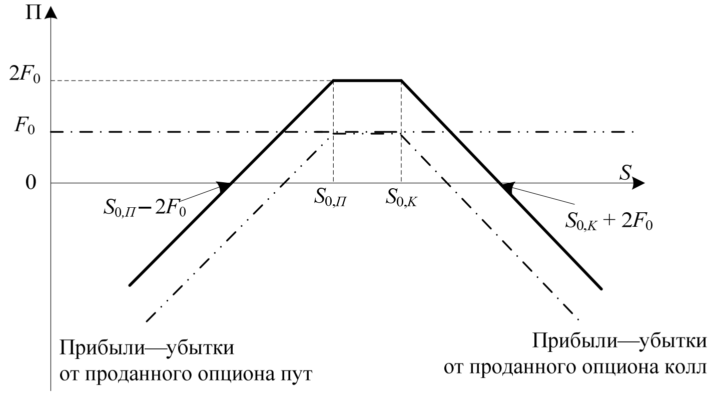


Рис. 29.12. Прибыли—убытки от проданных опционов пут и колл

■ **Пример 29.5.** Инвестор продал стрэнгл с ценой исполнения по опциону пут $S_{0,\Pi}$ = 30 руб., по опциону колл $S_{0,K}$ = 35 руб. Премия 2 руб. по опционам колл и пут за каждую акцию составила 2 руб.

Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) S = 25 руб.; 2) S = 32 руб.; 3) S = 37 руб.; 4) S = 42 руб.

Решение.

Для *первой ситуации* решение находится по первой формуле системы **(29.7)**:

$$\Pi_1 = -30 + 25 + 2 \cdot 2 = -1 \text{ руб. (Убытки составили 1 руб.)}$$

Для *второй ситуации* решение находится по второй формуле системы **(29.7)**:

$$\Pi_2 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ руб. (Прибыль составила 4 руб.)}$$

Для *третьей* и *четвертой ситуаций* решение находится по третьей формуле системы **(29.7)**:

$$\Pi_3 = -37 + 35 + 2 \cdot 2 = 2 \text{ руб. (Прибыль составила 2 руб.)}$$

$$\Pi_4 = -42 + 35 + 2 \cdot 2 = -3 \text{ руб. (Убытки составили 3 руб.)} \quad \square$$

29.2.3. СПРЭД-ПОЗИЦИИ

При использовании спрэд-позиции продают (покупают) опционы колл (*колл-спрэд*) либо продают (покупают) опционы пут (*пут-спрэд*). В обратных спрэдах используется сочетание опционов пут и колл.

Вертикальный спрэд — спрэд, в котором опционы отличаются только ценой исполнения.

Горизонтальный (*календарный*) *спрэд* — спрэд, в котором опционы отличаются только сроком погашения.

Диагональный спрэд — спрэд, в котором опционы отличаются ценой исполнения и сроком погашения.

Колл-спрэд быка предполагает покупку опциона колл с более низкой ценой исполнения и продажу опциона колл с более высокой ценой исполнения. Срок истечения контрактов одинаков. Так как премия опциона колл с более низкой ценой исполнения всегда больше премии опциона колл с более высокой ценой исполнения, то инвестор несет первоначальные затраты, т.е. покупает спрэд. Графически зависимость прибылей—убытков для колл-спрэда быка от цены акции в момент погашения опциона представлена на рис. 29.13 сплошной линией.

Прибыли—убытки для покупателя колл-спрэда быка можно рассчитать по формулам

$$П = \begin{cases} F_{0,B} - F_{0,H} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ F_{0,B} - F_{0,H} + S - S_{0,H} & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ F_{0,B} - F_{0,H} + S_{0,B} - S_{0,H} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.8)}$$

Прибыли—убытки для продавца колл-спрэда быка можно рассчитать по последним формулам, присвоив результату знак минус.

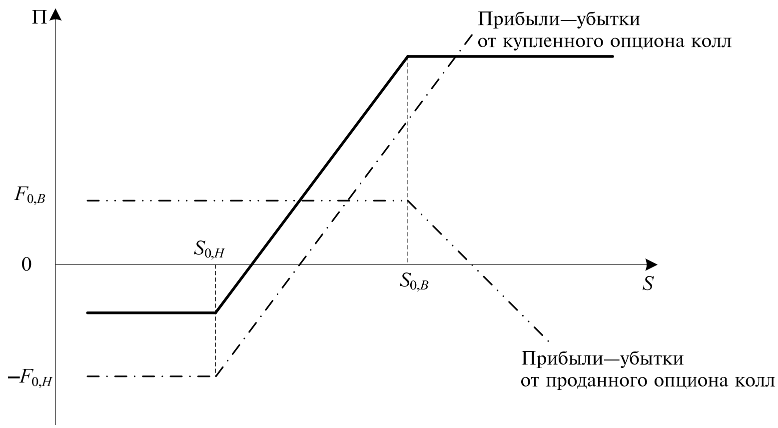


Рис. 29.13. Прибыли—убытки от купленного и проданного опциона колл

Прибыли—убытки для продавца колл-спрэда быка можно получить, если в формуле **(29.8)** поменять знаки на противоположные, получим формулу **(29.9)**. Прибыли—убытки для продавца колл-спрэда быка можно рассчитать по формулам

$$\Pi = \begin{cases} -F_{0,B} + F_{0,H} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ -F_{0,B} + F_{0,H} - S + S_{0,H} & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ -F_{0,B} + F_{0,H} - S_{0,B} + S_{0,H} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.9)}$$

■ **Пример 29.6.** Инвестор купил колл-спрэд быка, причем премия по опциону с ценой исполнения 90 руб. составила 10 руб., а премия по опциону с ценой исполнения 100 руб. составила 5 руб.

Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) S = 85 руб.; 2) S = 95 руб.; 3) S = 105 руб.

Решение.

Для *первой ситуации* решение находится по первой формуле системы **(29.8)**:

$$\Pi_1 = 5 - 10 = -5 \text{ руб. (Убытки составили 5 руб.)}$$

Для *второй ситуации* решение находится по второй формуле системы **(29.8)**:

$$\Pi_2 = 5 - 10 + 95 - 90 = 0 \text{ руб. (Прибыль и убытки отсутствуют.)}$$

Для *третьей ситуации* решение находится по третьей формуле системы **(29.8)**:

$$\Pi_3 = 5 - 10 + 100 - 90 = 5 \text{ руб. (Прибыль составила 5 руб.)}$$ □

Пут-спрэд быка предполагает покупку опциона пут с более низкой ценой исполнения и продажу опциона пут с более высокой ценой исполнения. Срок истечения контрактов одинаков. Так как премия опциона пут с более низкой ценой исполнения всегда меньше премии опциона пут с более высокой ценой исполнения, то поступления инвестора превышают затраты, т.е. он продает спрэд быка.

Графически зависимость прибылей—убытков для пут-спрэда быка от цены акции в момент погашения представлена на рис. 29.14 сплошной линией.

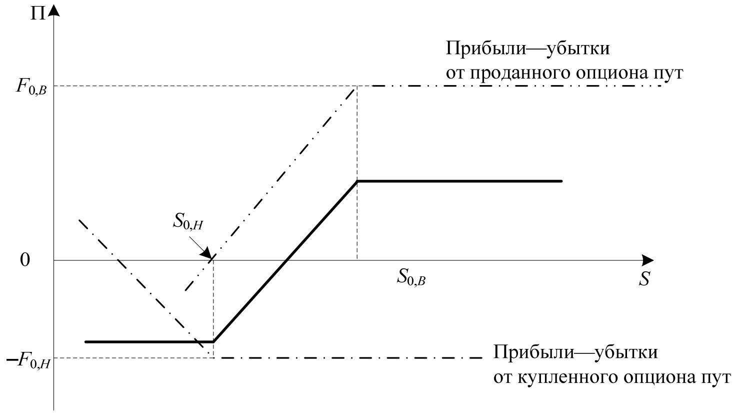


Рис. 29.14. Прибыли—убытки от купленного и проданного опциона пут

Прибыли—убытки для продавца пут-спрэда быка можно рассчитать по формуле

$$\Pi = \begin{cases} F_{0,B} - F_{0,H} - S_{0,B} + S_{0,H} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ F_{0,B} - F_{0,H} - S_{0,B} + S & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ F_{0,B} - F_{0,H} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.10)}$$

Прибыли—убытки для покупателя пут-спрэда быка можно рассчитать по формуле

$$\Pi = \begin{cases} -F_{0,B} + F_{0,H} + S_{0,B} - S_{0,H} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ -F_{0,B} + F_{0,H} + S_{0,B} - S & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ -F_{0,B} + F_{0,H} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.11)}$$

■ **Пример 29.7.** Инвестор продал пут-спрэд быка, причем премия по опциону с ценой исполнения 90 руб. составила 5 руб., а премия по опциону с ценой исполнения 100 руб. составила 10 руб.

Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) S = 85 руб.; 2) S = 95 руб.; 3) S = 105 руб.

Решение.

Для *первой ситуации* решение находится по первой формуле системы **(29.10)**:

$$\Pi_1 = 10 - 5 - 100 - 90 = -5 \text{ руб. (Убытки составили 5 руб.)}$$

Для *второй ситуации* решение находится по второй формуле системы **(29.10)**:

$$\Pi_2 = 10 - 5 + 100 - 95 = 0 \text{ руб. (Прибыль и убытки отсутствуют.)}$$

Для *третьей ситуации* решение находится по третьей формуле системы **(29.10)**:

$$\Pi_3 = 10 - 5 = 5 \text{ руб. (Прибыль составила 5 руб.)} \quad \square$$

Инвесторы, использующие спрэды быка, играют на повышение.

Колл-спрэд медведя предполагает покупку опциона колл с более высокой ценой исполнения и продажу опциона колл с более низкой ценой исполнения. Срок истечения контрактов одинаков. Так как премия опциона колл с более высокой ценой исполнения всегда меньше премии опциона колл с более низкой ценой исполнения, то поступления инвестора превышают затраты, т.е. он продает спрэд.

Графически зависимость прибылей—убытков для колл-спрэда медведя от цены акции в момент погашения представлена на рис. 29.15 сплошной линией.

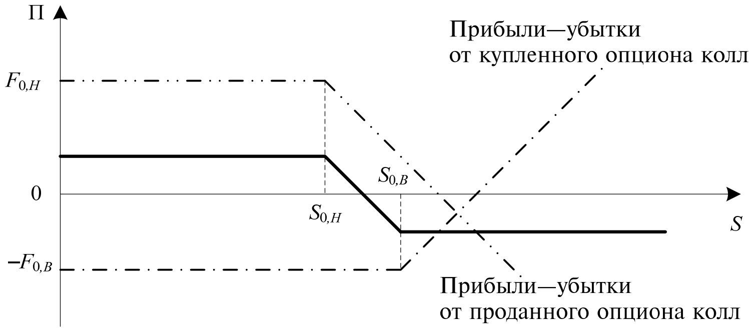


Рис. 29.15. Прибыли—убытки от купленного и проданного опционов колл

Прибыли—убытки для продавца колл-спрэда медведя можно рассчитать по формуле

$$\Pi = \begin{cases} F_{0,H} - F_{0,B} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ F_{0,H} - F_{0,B} - S_{0,H} + S & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ F_{0,H} - F_{0,B} + S_{0,H} - S_{0,B} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.12)}$$

Прибыли—убытки для покупателя колл-спрэда медведя можно рассчитать по формуле

$$\Pi = \begin{cases} -F_{0,H} + F_{0,B} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ -F_{0,H} + F_{0,B} + S_{0,H} - S & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ -F_{0,H} + F_{0,B} - S_{0,H} + S_{0,B} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.13)}$$

■ **Пример 29.8.** Инвестор продал колл-спрэд медведя, причем премия по опциону с ценой исполнения 90 руб. составила 10 руб., а премия по опциону с ценой исполнения 100 руб. составила 5 руб.

Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) S = 85 руб.; 2) S = 95 руб.; 3) S = 105 руб.

Решение.

Для *первой ситуации* решение находится по первой формуле системы **(29.12)**:

Π_1 = 10 − 5 = 5 руб. (Прибыль составила 5 руб.)

Для *второй ситуации* решение находится по второй формуле системы **(29.12)**:

Π_2 = 10 − 5 + 90 − 95 = 0 руб. (Прибыль и убытки отсутствуют.)

Для *третьей ситуации* решение находится по третьей формуле системы **(29.12)**:

Π_3 = 10 − 5 + 90 − 100 = −5 руб. (Убытки составили 5 руб.) □

Пут-спрэд медведя предполагает покупку опциона пут с более высокой ценой исполнения и продажу опциона пут с более низкой ценой исполнения. Срок истечения контрактов одинаков. Так как премия опциона пут с более высокой ценой исполнения всегда больше премии опциона пут с более низкой ценой исполнения, то инвестор несет первоначальные затраты, т.е. он покупает спрэд. Графически зависимость прибылей—убытков для пут-спрэда медведя от цены акции в момент погашения представлена на рис 29.16 сплошной линией.

Прибыли—убытки для покупателя пут-спрэда медведя можно рассчитать по формуле

$$\Pi = \begin{cases} F_{0,H} - F_{0,B} - S_{0,H} + S_{0,B} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ F_{0,H} - F_{0,B} - S + S_{0,B} & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ F_{0,H} - F_{0,B} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.14)}$$

Прибыли—убытки для продавца пут-спрэда медведя можно рассчитать формуле

$$\Pi = \begin{cases} -F_{0,H} + F_{0,B} + S_{0,H} - S_{0,B} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ -F_{0,H} + F_{0,B} + S - S_{0,B} & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ -F_{0,H} + F_{0,B} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.15)}$$

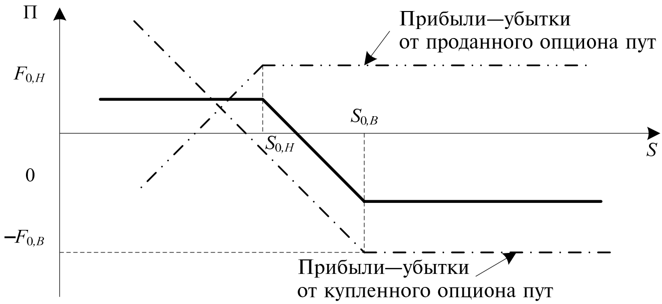


Рис. 29.16. Прибыли—убытки от купленного и проданного опционов пут

■ **Пример 29.9.** Инвестор купил пут-спрэд медведя, причем премия по опциону с ценой исполнения 90 руб. составила 5 руб., а премия по опциону с ценой исполнения 100 руб. составила 10 руб.

Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) $S = 85$ руб.; 2) $S = 95$ руб.; 3) $S = 105$ руб.

Решение.

Для *первой ситуации* решение находится по первой формуле системы **(29.14)**:

$\Pi_1 = 5 - 10 - 90 + 100 = 5$ руб. (Прибыль составила 5 руб.)

Для *второй ситуации* решение находится по второй формуле системы **(29.14)**:

$П_2 = 5 - 10 - 95 + 100 = 0$ руб. (Прибыль и убытки отсутствуют.)

Для *третьей ситуации* решение находится по третьей формуле системы **(29.14)**:

$П_3 = 5 - 10 = 5$ руб. (Убытки составили 5 руб.) □

Инвесторы, использующие спрэды медведя, играют на понижение.

Обратный спрэд быка предполагает продажу опциона пут с более низкой ценой исполнения и покупку опциона колл с более высокой ценой исполнения. Срок истечения контрактов одинаков. Так как премия опциона пут с более низкой ценой исполнения всегда больше премии опциона колл с более высокой ценой исполнения, то поступления инвестора превышают затраты, т.е. он продает спрэд.

Графически зависимость прибылей—убытков для обратного спрэда от цены акции в момент погашения быка представлена на рис. 29.17 сплошной линией.

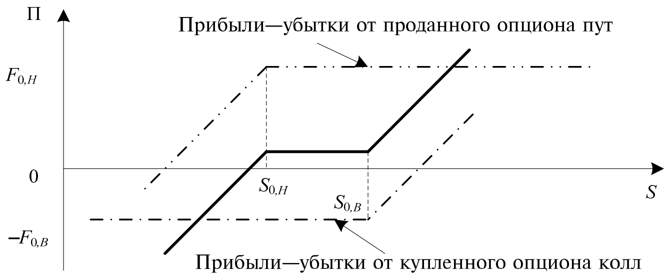


Рис. 29.17. Прибыли—убытки от купленного опциона колл и проданного опциона пут

Прибыли—убытки для продавца обратного спрэда быка можно рассчитать по формуле

$$П = \begin{cases} F_{0,H} - F_{0,B} + S - S_{0,H} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ F_{0,H} - F_{0,B} & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ F_{0,H} - F_{0,B} + S - S_{0,B} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.16)}$$

Прибыли—убытки для покупателя обратного спрэда быка можно рассчитать по формуле

$$П = \begin{cases} -F_{0,H} + F_{0,B} - S + S_{0,H} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ -F_{0,H} + F_{0,B} & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ -F_{0,H} + F_{0,B} - S + S_{0,B} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.17)}$$

■ **Пример 29.10.** Инвестор продал опцион пут с ценой исполнения 90 руб. и с премией 10 руб., а купил опцион колл с ценой исполнения 100 руб. и с премией 5 руб.

Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) $S = 85$ руб.; 2) $S = 95$ руб.; 3) $S = 105$ руб.

Решение.

Для *первой ситуации* решение находится по первой формуле системы **(29.16)**:

$$П_1 = 10 - 5 + 85 - 90 = 0 \text{ руб. (Прибыль и убытки отсутствуют.)}$$

Для *второй ситуации* решение находится по второй формуле системы **(29.16)**:

$$П_2 = 10 - 5 = 5 \text{ руб. (Прибыль составила 5 руб.)}$$

Для *третьей ситуации* решение находится по третьей формуле системы **(29.16)**:

$$П_3 = 10 - 5 + 105 - 100 = 10 \text{ руб. (Прибыль составила 10 руб.)} \ \square$$

Обратный спрэд медведя предполагает покупку опциона пут с более низкой ценой исполнения и продажу опциона колл с более высокой ценой исполнения. Срок истечения контрактов одинаков. Так как премия опциона пут с более низкой ценой исполнения всегда меньше премии опциона колл с более высокой ценой исполнения, то поступления инвестора превышают затраты, т.е. он продает спрэд.

Графически зависимость прибылей-убытков для обратного спрэда медведя от цены акции в момент погашения представлена на рис. 29.18 сплошной линией.

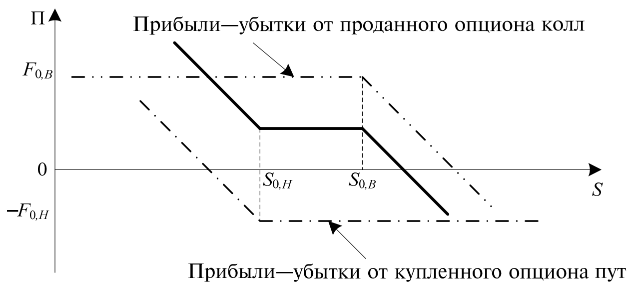


Рис. 29.18. Прибыли—убытки от проданного опциона колл и купленного опциона пут

Прибыли—убытки для продавца обратного спрэда медведя можно рассчитать по формуле

$$П = \begin{cases} F_{0,B} - F_{0,H} + S_{0,H} - S & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ F_{0,B} - F_{0,H} & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ F_{0,B} - F_{0,H} + S_{0,B} - S & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.18)}$$

Прибыли—убытки для покупателя обратного спрэда быка можно рассчитать по формуле

$$\Pi = \begin{cases} -F_{0,B} + F_{0,H} - S_{0,H} + S & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ -F_{0,B} + F_{0,H} & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ -F_{0,B} + F_{0,H} - S_{0,B} + S & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.19)}$$

■ **Пример 29.11.** Инвестор купил опцион пут с ценой исполнения 90 руб. и с премией 5 руб., а продал опцион колл с ценой исполнения 100 руб. и с премией 10 руб.

Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) $S = 85$ руб.; 2) $S = 95$ руб.; 3) $S = 105$ руб.

Решение.

Для *первой ситуации* решение находится по первой формуле системы **(29.18)**:

$\Pi_1 = 10 - 5 + 90 - 85 = 10$ руб. (Прибыль составила 10 руб.)

Для *второй ситуации* решение находится по второй формуле системы **(29.18)**:

$\Pi_2 = 10 - 5 = 5$ руб. (Прибыль составила 5 руб.)

Для *третьей ситуации* решение находится по третьей формуле системы **(29.18)**:

$\Pi_3 = 10 - 5 + 100 - 105 = 0$ руб. (Прибыль и убытки отсутствуют.) □

Пропорциональный колл-спрэд предполагает покупку опционов колл с более низкой ценой исполнения (премия больше) и продажу опционов колл с более высокой ценой исполнения (премия меньше), причем *пропорция* — это число проданных коллов на один купленный колл. Срок истечения контрактов одинаков.

Графически зависимость прибылей—убытков для пропорционального колл-спрэда для пропорции 1 : 2 от цены акции в момент погашения представлена на рис. 29.19 сплошной линией.

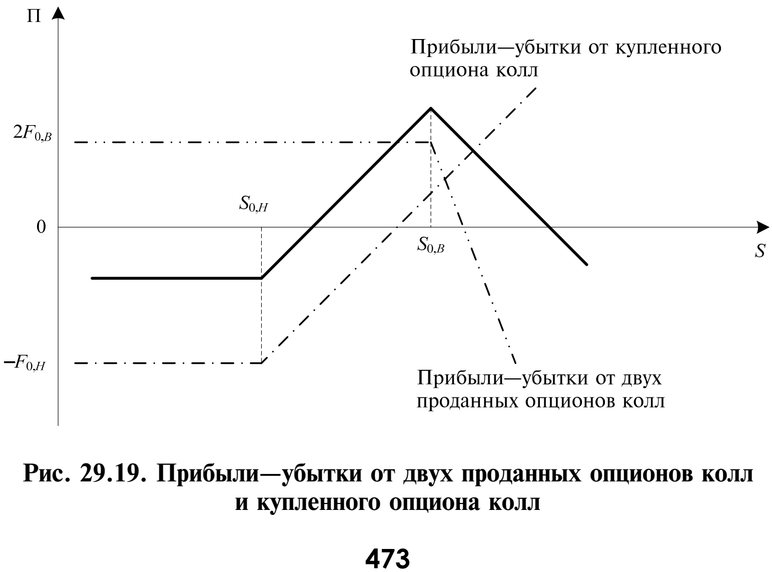


Рис. 29.19. Прибыли—убытки от двух проданных опционов колл и купленного опциона колл

Прибыли—убытки пропорционального колл-спрэда для инвестора, продавшего два опциона колл, можно рассчитать по формуле

$$\Pi = \begin{cases} 2F_{0,B} - F_{0,H} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ 2F_{0,B} - F_{0,H} - S_{0,H} + S & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ 2F_{0,B} - F_{0,H} - S_{0,H} - S + 2S_{0,B} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.20)}$$

Прибыли—убытки пропорционального колл-спрэда для инвестора, действующего по альтернативному алгоритму, можно рассчитать формуле

$$\Pi = \begin{cases} -2F_{0,B} + F_{0,H} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ -2F_{0,B} + F_{0,H} + S_{0,H} - S & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ -2F_{0,B} + F_{0,H} + S_{0,H} + S - 2S_{0,B} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.21)}$$

■ **Пример 29.12.** Инвестор купил опцион колл с ценой исполнения 90 руб. и с премией 15 руб., а продал два опциона колл с ценой исполнения 100 руб. и с премией 5 руб. за каждый.

Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) $S = 85$ руб.; 2) $S = 95$ руб.; 3) $S = 100$ руб.; 4) $S = 105$ руб.

Решение.

Для *первой ситуации* решение находится по первой формуле системы **(29.20)**:

$$\Pi_1 = 2 \cdot 5 - 15 = -5 \text{ руб. (Убытки составили 5 руб.)}$$

Для *второй* и *третьей ситуаций* решение находится по второй формуле системы **(29.20)**:

$$\Pi_2 = 2 \cdot 5 - 15 - 90 + 95 = 0 \text{ руб. (Прибыль и убытки отсутствуют.)}$$

$$\Pi_3 = 2 \cdot 5 - 15 - 90 + 100 = -5 \text{ руб. (Прибыль составила 5 руб.)}$$

Для *четвертой ситуации* решение находится по третьей формуле системы **(29.20)**:

$$\Pi_4 = 2 \cdot 5 - 15 - 90 - 105 + 2 \cdot 100 = 0 \text{ руб.}$$

(Прибыль и убытки отсутствуют.) □

Пропорциональный пут-спрэд предполагает покупку опционов пут с более высокой ценой исполнения и продажу опционов пут с более низкой ценой исполнения, причем *пропорция* — это число проданных путов на один купленный пут. Срок истечения контрактов одинаков.

Графически зависимость прибылей—убытков для пропорционального пут-спрэда для пропорции 1 : 2 от цены акции в момент погашения представлена на рис. 29.20 сплошной линией.

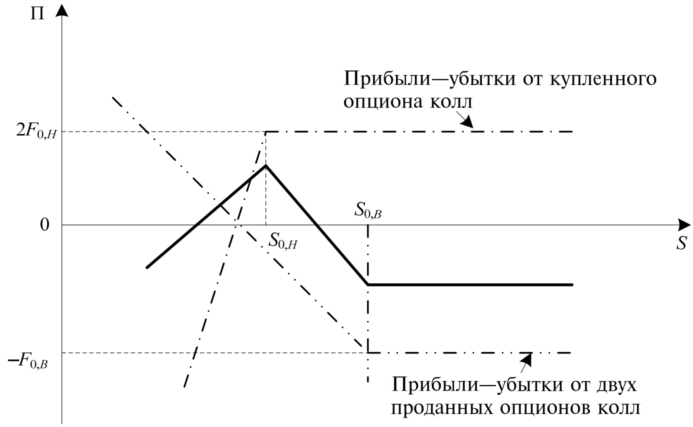


Рис. 29.20. Прибыли—убытки от двух проданных опционов пут и купленного опциона пут

Прибыли—убытки пропорционального пут-спрэда для инвестора, действующего по описанной схеме, можно рассчитать по формуле:

$$\Pi = \begin{cases} 2F_{0,H} - F_{0,B} + S_{0,B} + S - 2S_{0,H} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ 2F_{0,H} - F_{0,B} + S_{0,B} - S & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ 2F_{0,H} - F_{0,B} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.22)}$$

Прибыли—убытки пропорционального пут-спрэда для инвестора, действующего по альтернативному алгоритму, можно рассчитать по формуле:

$$\Pi = \begin{cases} -2F_{0,H} + F_{0,B} - S_{0,B} - S + 2S_{0,H} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ -2F_{0,H} + F_{0,B} - S_{0,B} + S & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,B}; \\ -2F_{0,H} + F_{0,B} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.23)}$$

■ **Пример 29.13.** Инвестор купил два пут-опциона с ценой исполнения 90 руб. и с премией 5 руб. за каждый, а продал пут-опцион с ценой исполнения 100 руб. и с премией 15 руб.

Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) S = 85 руб.; 2) S = 90 руб.; 3) S = 95 руб.; 4) S = 100 руб.

Решение.

Для *первой ситуации* решение находится по первой формуле системы **(29.22)**:

$\Pi_1 = 2 \cdot 5 - 15 + 100 + 85 - 2 \cdot 90 = 0$ руб. (Прибыль и убытки отсутствуют.)

Для *второй* и *третьей ситуаций* решение находится по второй формуле системы **(29.22)**:

$$П_2 = 2 \cdot 5 - 15 + 100 - 90 = 5 \text{ руб. (Прибыль составила 5 руб.)}$$

$$П_3 = 2 \cdot 5 - 15 - 90 + 95 = 0 \text{ руб. (Прибыль и убытки отсутствуют.)}$$

Для *четвертой ситуации* решение находится по третьей формуле системы **(29.22)**:

$$П_4 = 2 \cdot 5 - 15 = -5 \text{ руб. (Убытки составили 5 руб.)} \ \square$$

Спрэд бабочки предполагает покупку опциона колл (пут) с низкой ценой исполнения, покупку опциона колл (пут) с высокой ценой исполнения и продажу двух опционов колл (пут) со средней ценой исполнения. Срок истечения контрактов одинаков.

Графически зависимость прибылей—убытков для спрэда бабочки от цены акции в момент погашения представлена на рис. 29.21 сплошной линией при условии $S_{0,C} = \left(S_{0,H} + S_{0,B}\right)/2$.

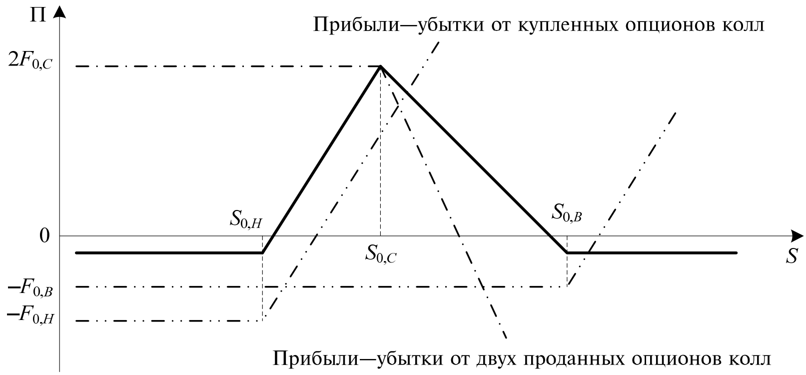


Рис. 29.21. Прибыли—убытки от двух купленных и от двух проданных опционов колл

Прибыли—убытки пропорционального спрэда бабочки для инвестора, действующего по описанной схеме, можно рассчитать по формуле

$$П = \begin{cases} 2F_{0,C} - F_{0,B} - F_{0,H} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ 2F_{0,C} - F_{0,B} - F_{0,H} + S - S_{0,H} & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,C}; \\ 2F_{0,C} - F_{0,B} - F_{0,H} - S + S_{0,B} & \text{при} \quad S_{0,C} < S \le S_{0,B}; \\ 2F_{0,C} - F_{0,B} - F_{0,H} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.24)}$$

Прибыли—убытки спрэда бабочки для инвестора, действующего по альтернативному алгоритму, можно рассчитать по формуле

$$\Pi = \begin{cases} -2F_{0,C} + F_{0,B} + F_{0,H} & \text{при} \quad S < S_{0,H}; \\ -2F_{0,C} + F_{0,B} + F_{0,H} - S + S_{0,H} & \text{при} \quad S_{0,H} \le S \le S_{0,C}; \\ -2F_{0,C} + F_{0,B} + F_{0,H} + S - S_{0,B} & \text{при} \quad S_{0,C} < S \le S_{0,B}; \\ -2F_{0,C} + F_{0,B} + F_{0,H} & \text{при} \quad S > S_{0,B}. \end{cases} \qquad \textbf{(29.25)}$$

■ **Пример 29.14.** Инвестор купил опцион колл с ценой исполнения 90 руб. и с премией 12 руб., купил также опцион колл с ценой исполнения 100 руб. и с премией 4 руб., а продал два опциона колл с ценой исполнения 95 руб. и с премией 7 руб. каждый.

Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) S = 85 руб.; 2) S = 92 руб.; 3) S = = 95 руб.; 4) S = 98 руб.; 5) S = 105 руб.

Решение.

Для *первой ситуации* решение находится по первой формуле системы **(29.24)**:

$$\Pi_1 = 2 \cdot 7 - 12 - 4 = -2 \text{ руб. (Убытки составили 2 руб.)}$$

Для *второй* и *третьей ситуаций* решение находится по второй формуле системы **(29.24)**:

$$\Pi_2 = 2 \cdot 7 - 12 - 4 + 92 - 90 = 0 \text{ руб. (Прибыль и убытки отсутствуют.)}$$

$$\Pi_3 = 2 \cdot 7 - 12 - 4 + 95 - 90 = 3 \text{ руб. (Прибыль составила 3 руб.)}$$

Для *четвертой ситуации* решение находится по третьей формуле системы **(29.24)**:

$$\Pi_4 = 2 \cdot 7 - 12 - 4 - 98 + 100 = 0 \text{ руб. (Прибыль и убытки отсутствуют.)}$$

Для *пятой ситуации* решение находится по четвертой формуле системы **(29.24)**:

$$\Pi_5 = 2 \cdot 7 - 12 - 4 = -2 \text{ руб. (Убытки составили 2 руб.)}$$ □

Горизонтальный спрэд предполагает покупку и продажу опционов колл, имеющих одинаковую цену исполнения, но разные сроки истечения контактов. Если купленный опцион колл имеет более отдаленную дату погашения, то его премия выше премии проданного опциона, т.е. инвестор покупает спрэд. Рассмотрим возможные прибыли—убытки на момент исполнения проданного опциона для трех ситуаций: 1) рыночная цена актива равна цене исполнения; 2) рыночная цена актива существенно меньше цены исполнения; 3) рыночная цена актива существенно больше цены исполнения.

Графически зависимость прибылей—убытков для горизонтального спрэда от цены акции в момент погашения представлена на рис. 29.22 (сплошная линия). Введены следующие обозначения: S_0 — цена исполнения опционов; $F_{0,ПР}$, $F_{0,КУП}$ — премии за проданный и купленный опционы колл соответственно. Если на момент исполнения проданного опциона колл курс актива равен цене исполнения, то короткий колл не будет исполнен, а длинный колл все еще имеет высокую цену, т.е. инвестор получит прибыль, равную примерно премии за короткий колл. На рис. 29.22 это точка $S = S_0$.

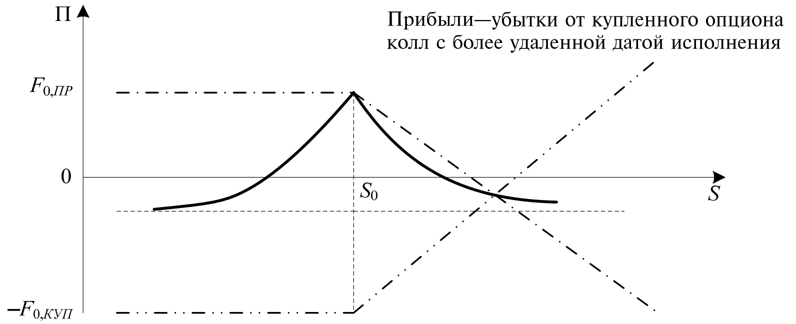


Рис. 29.22. Прибыли—убытки горизонтального спрэда

Если на момент исполнения проданного опциона колл курс актива существенно меньше цены исполнения, то короткий колл не будет исполнен, а цена купленного колла будет близка к нулю, т.е. инвестор понесет потери, равные примерно разности премий купленного и проданного опционов колл. На рис. 29.22 это левая ветвь кривой.

Если на момент исполнения проданного опциона колл курс актива существенно больше цены исполнения, то короткий колл будет исполнен, а инвестор понесет потери за счет проданного актива. При этом цена купленного колла возрастет и будет несколько превышать потери инвестора за счет продажи актива, т.е. суммарные потери инвестора будут несколько меньше первоначальных инвестиций. На рис. 29.22 это правая ветвь кривой.

Упражнения

ЗАДАЧИ

29.1. Инвестор продал стрэддл с ценой исполнения $S_0 = 30$ руб., получив премию за каждую акцию 2 руб. по опционам колл и пут. Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) $S = 26$ руб.; 2) $S = 30$ руб.; 3) $S = 35$ руб.

29.2. Инвестор купил стрэнгл с ценой исполнения по опциону пут $S_{0,П} = 30$ руб., по опциону колл $S_{0,K} = 35$ руб. Премия 2 руб. по опциону колл и пут за каждую акцию составила 2 руб. Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) $S = 25$ руб.; 2) $S = 32$ руб.; 3) $S = 37$ руб.; 4) $S = 42$ руб.

29.3. Инвестор продал колл-спрэд быка, причем премия по опциону с ценой исполнения 92 руб. составила 10 руб., а премия по опциону с ценой исполнения 98 руб. составила 5 руб. Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) $S = 85$ руб.; 2) $S = 95$ руб.; 3) $S = 105$ руб.

29.4. Инвестор купил пут-спрэд быка, причем премия по опциону с ценой исполнения 90 руб. составила 5 руб., а премия по опциону с ценой исполнения 100 руб. составила 10 руб. Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) $S = 85$ руб.; 2) $S = 97$ руб.; 3) $S = 105$ руб.

29.5. Инвестор купил колл-спрэд медведя, причем премия по опциону с ценой исполнения 90 руб. составила 10 руб., а премия по опциону с ценой исполнения 100 руб. составила 5 руб. Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) $S = 85$ руб.; 2) $S = 93$ руб.; 3) $S = 105$ руб.

29.6. Инвестор продал пут-спрэд медведя, причем премия по опциону с ценой исполнения 90 руб. составила 5 руб., а премия по опциону с ценой исполнения 100 руб. составила 10 руб. Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) $S = 85$ руб.; 2) $S = 98$ руб.; 3) $S = 105$ руб.

29.7. Инвестор купил опцион пут с ценой исполнения 90 руб. и с премией 10 руб., а также купил опцион колл с ценой исполнения 100 руб. и с премией 5 руб. Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) $S = 82$ руб.; 2) $S = 95$ руб.; 3) $S = 103$ руб.

29.8. Инвестор продал опцион пут с ценой исполнения 90 руб. и с премией 5 руб., а купил опцион колл с ценой исполнения 100 руб. и с премией 10 руб. Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) S = 85 руб.; 2) S = 95 руб.; 3) S = 108 руб.

29.9. Инвестор продал опцион колл с ценой исполнения 90 руб. и с премией 15 руб., а купил два опциона колл с ценой исполнения 100 руб. и с премией 5 руб. за каждый. Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) S = 85 руб.; 2) S = 95 руб.; 3) S = 100 руб.; 4) S = 105 руб.

29.10. Инвестор продал два опциона пут с ценой исполнения 90 руб. и с премией 5 руб. за каждый, а купил опцион пут с ценой исполнения 100 руб. и с премией 15 руб. Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) S = 85 руб.; 2) S = 90 руб.; 3) S = 95 руб.; 4) S = = 100 руб.

29.11. Инвестор продал опцион колл с ценой исполнения 90 руб. и с премией 12 руб., продал также опцион колл с ценой исполнения 100 руб. и с премией 4 руб., а купил два опциона колл с ценой исполнения 95 руб. с премией 7 руб. каждый. Определить прибыли—убытки инвестора для следующих значений цены акции в момент погашения опциона: 1) S = 85 руб.; 2) S = 92 руб.; 3) S = 95 руб.; 4) S = 98 руб.; 5) S = 105 руб.

Глава 30 ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ОПЦИОНА

30.1. Биноминальная модель цены европейского однопериодного опциона колл

Биноминальная модель цены опциона строится на основании утверждения о том, что можно сформировать нейтральный к риску портфель из опционов и активов. Для такого портфеля изменение цены опциона компенсируется изменением цены актива. Таким образом, изменение цен не приводит к потерям. Например, рост курса акций компенсируется падением цены опционов.

В биноминальной модели цены европейского однопериодного опциона колл инвестор предполагает, что в любом периоде цена актива (например, акции) может увеличиться или уменьшиться по сравнению с ценой спот S этого актива на конкретную величину. Таким образом, инвестор считает, что по истечении времени T цена акции может быть равна либо Su (будущая высокая цена), либо Sd (будущая низкая цена). Сказанное поясняет рис. 30.1.

Однопериодная модель предусматривает наличие в будущем только двух цен актива. Ясно, что в реальности цен может быть великое множество. Поэтому однопериодная модель довольно грубо описывает реальность. Однако позже мы будем рассматривать многопериодные модели, предусматривающие в будущем, в общем случае, любое количество цен актива. В пределе количество периодов модели стремится к бесконечности. В этом случае к бесконечности стремится количество будущих цен этой модели.

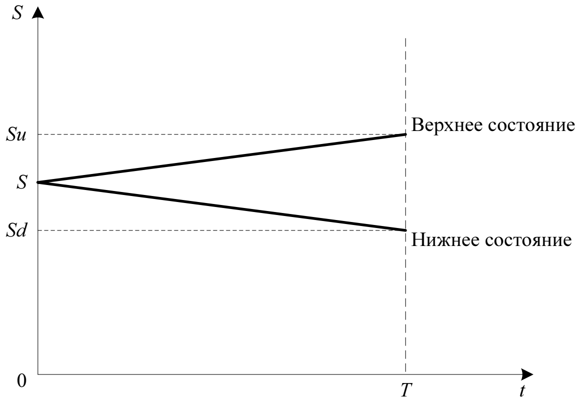


Рис. 30.1. Схема однопериодной биноминальной модели цены опциона

Пусть цена исполнения равна S_0. Владелец (покупатель) опциона воспользуется своим правом на покупку актива, если цена этого актива в момент $t = T$ будет выше цены исполнения, т.е. если $Su > S_0$ или $Sd > S_0$. Таким образом, при выполнении неравенства $Su - S_0 > 0$ или $Sd - S_0 > 0$ опцион будет исполнен, в противном случае выплаты будут равны нулю. Сказанное можно записать в виде системы

$$\left.\begin{aligned} F_u &= \max\{0, Su - S_0\}; \\ F_d &= \max\{0, Sd - S_0\}, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(30.1)}$$

где F_u, F_d — доходы владельца опциона, или цена опциона, для момента исполнения опциона в верхнем и нижнем положениях соответственно.

Таким образом, по формулам **(30.1)** определяют доход покупателя опциона. Для продавца опциона при использовании формул **(30.1)** определяют его расходы. Чтобы определить доходы продавца, полученным результатам следует присвоить знак минус.

Задача состоит в определении цены опциона F по известным приведенным выше данным и годовой безрисковой силе роста δ. Рассмотрим д в а с л у ч а я.

1. *Инвестор покупает одну акцию и продает* k *опционов колл.*

В конце периода T в верхнем состоянии инвестор получит за акцию Su руб., а по k опционам колл выплатит сумму kF_u владельцу опциона. В нижнем состоянии инвестор получит за акцию Sd руб., а по опционам выплатит сумму kF_d (F_u и F_d определяются выражением **(30.1)**). Таким образом, платежи (доход инвестора) в конце периода T от этого портфеля составят для верхнего состояния $Su - kF_u$, а для нижнего состояния — $Sd - kF_d$. В безрисковом портфеле доход инвестора не должен измениться от будущей ситуации на рынке. Поэтому при формировании безрискового портфеля принимаем платеж для верхнего состояния равным платежу для нижнего состояния, т.е.

$$Su - kF_u = Sd - kF_d.$$

Отсюда находим формулу для количества в портфеле проданных опционов:

$$k = \frac{Su - Sd}{F_u - F_d}. \qquad \textbf{(30.2)}$$

Величина, рассчитанная по формуле **(30.2)**, называется также *коэффициентом полного хеджирования.*

Цена приобретения рассматриваемого портфеля в начальный момент равна стоимости актива S минус премия за k опционов, т.е.

$$P = S - kF. \qquad \textbf{(30.3)}$$

Эта величина должна быть равна гарантированной выплате $Su - kF_u$ в момент $t = T$, дисконтированной на момент $t = 0$, т.е.

$$S - kF = \left(Su - kF_u\right)e^{-\delta T}.$$

Отсюда находим цену опциона колл

$$F = \frac{S}{k} - \frac{Su - kF_u}{k}e^{-\delta T}. \qquad \textbf{(30.4)}$$

■ **Пример 30.1.** При заключении опционного контракта цена акции $S = 350$ руб. Цена исполнения опциона колл через год на эту акцию равна $S_0 = 395$ руб. Предполагается, что акция на момент исполнения будет стоить либо $Su = 425$ руб., либо $Sd = 275$ руб. Безрисковую ставку наращения принимаем равной 14% годовых.

Определить коэффициент полного хеджирования, цену опциона, стоимость портфеля, состоящего из одной акции и проданных опционов колл, будущие платежи.

Решение.

По формулам **(30.1)** находим выплаты по опциону в верхнем состоянии цены актива $F_u = Su - S_0 = 425 - 395 = 30$ руб. и в нижнем состоянии $F_d = 0$ руб. Количество проданных опционов, или коэффициент полного хеджирования, вычисляется по формуле **(30.2)**:

$$k = \frac{Su - Sd}{F_u - F_d} = \frac{425 - 275}{30 - 0} = 5 \cdot$$

Количество проданных инвестором опционов равно пяти.

Силу роста находим по формуле **(2.8)**:

$$\delta = \ln(1+i) = \ln(1+0{,}14) = 0{,}1310283, \text{ или } \approx 13{,}1\%.$$

Цена опциона определяется соотношением **(30.4)**:

$$F = \frac{S}{k} - \frac{Su - kF_u}{k} \cdot \mathrm{e}^{-\delta T} = \frac{350}{5} - \frac{425 - 5 \cdot 30}{5} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}131} = 21{,}75 \text{ руб.}$$

Стоимость портфеля из одной акции и пяти проданных опционов колл в момент его формирования находят по формуле **(30.3)**:

$$P = S - kF = 350 - 5 \cdot 21{,}75 = 241{,}25 \text{ руб.}$$

Доходы инвестора от этого портфеля по окончании срока опциона в любом из состояний, т.е. при любом значении цены актива через год, составят:

- для верхнего состояния $Su - kF_u = 425 - 5 \cdot 30 = 275$ руб.;
- для нижнего состояния $Sd - kF_d = 275 - 5 \cdot 0 = 275$ руб. □

2. *Инвестор покупает акции и безрисковые активы.* При этом сформированный портфель точно повторяет выплаты по опциону колл на одну из этих акций. Причем выплаты по этому опциону определяются формулами **(30.1)**. Определим состав портфеля из акций и безрисковых активов.

Пусть сформированный портфель, эквивалентный опциону колл, состоит из безрисковых активов на b руб. и Δ штук акций. Для этих условий выплаты по рассматриваемому портфелю в верхнем и нижнем состояниях в конце периода T при условии, что доходность безрисковых активов равна δ, составят

$$F_u = Su\Delta + b \cdot \mathrm{e}^{\delta \cdot T};$$

$$F_d = Sd\Delta + b \cdot \mathrm{e}^{\delta \cdot T}.$$

Решив эти уравнения, находим формулы для расчета Δ и b:

$$\Delta = \frac{F_u - F_d}{Su - Sd}; \quad b = \frac{uF_d - dF_u}{u - d} \cdot \mathrm{e}^{-\delta \cdot T}. \qquad \textbf{(30.5)}$$

Так как платежи, порождаемые опционом колл и портфелем, равны, что следует из постановки задачи, то современные стоимости портфеля и опциона также должны быть равными, т.е.

$$F = S \cdot \Delta + b. \qquad \textbf{(30.6)}$$

Продифференцировав **(30.6)** по цене акции, найдем, что дельта опциона является частной производной от цены опциона по цене акции:

$$\Delta = \frac{\partial F}{\partial S}. \qquad \textbf{(30.7)}$$

Сопоставив **(30.5)** с **(30.2)**, найдем также связь между дельтой опциона и коэффициентом полного хеджирования:

$$\Delta = \frac{1}{k} \cdot \qquad \textbf{(30.8)}$$

■ **Пример 30.2.** *Условия примера 30.1.*

Определить количество акций и стоимость безрисковых активов эквивалентного портфеля, а также цену опциона, используя формулу **(30.6)**.

Решение.

Количество акций в эквивалентном портфеле находим по первой формуле **(30.5)**:

$$\Delta = \frac{F_u - F_d}{Su - Sd} = \frac{30 - 0}{425 - 275} = 0{,}2, \text{ т.е. } 0{,}2 \text{ акции.}$$

Стоимость безрисковых активов эквивалентного портфеля определяется по второй формуле **(30.5)**. Предварительно находим $u = \frac{425}{350}$, $d = \frac{275}{350}$, тогда

$$b = \frac{uF_d - dF_u}{u - d} \cdot e^{-\delta T} = \frac{\frac{425}{350} \cdot 0 - \frac{275}{350} \cdot 30}{\frac{425}{350} - \frac{275}{350}} \cdot e^{-0{,}131} = -\,48{,}25 \text{ руб.}$$

Знак минус перед значением цены безрисковых активов означает, что инвестор занял под безрисковый процент 48,25 руб. на их покупку.

Цена опциона определяется по формуле **(30.6)**:

$$F = S \cdot \Delta + b = 350 \cdot 0{,}2 - 48{,}25 = 21{,}75 \text{ руб.} \quad \square$$

30.2. Биномиальная модель цены европейского однопериодного опциона пут

Владелец опциона воспользуется своим правом на продажу актива, если цена этого актива в момент $t = T$ будет ниже цены исполнения, т.е. если $Su < S_0$ или $Sd < S_0$. Поэтому опцион пут будет исполнен при выполнении неравенства $S_0 - Su > 0$ и $S_0 - Sd > 0$, в противном случае выплаты будут равны нулю. Поэтому выплаты в верхнем и нижнем состояниях можно рассчитать по формулам

$$\left.\begin{aligned} F_u &= \max\{0, S_0 - Su\} \\ F_d &= \max\{0, S_0 - Sd\} \end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(30.9)}$$

Рассмотрим ситуацию, когда инвестор покупает акции и безрисковые активы. Для этого случая найдем цену опциона. Пусть так же, как и прежде, инвестор покупает безрисковых активов на b руб. и Δ штук акций. При этом сформированный портфель точно повторяет выплаты по опциону пут, определяемые формулами **(30.9)**, на одну из акций.

Для указанных условий выплаты по рассматриваемому портфелю в верхнем и в нижнем состояниях в конце периода T, так же как и прежде, составят

$$F_u = Su\Delta + b \cdot e^{\delta \cdot T};$$

$$F_d = Sd\Delta + b \cdot e^{\delta \cdot T}.$$

Решив эти уравнения, получим, что для расчета Δ и b надо использовать формулы **(30.5)**.

Так как платежи, порождаемые опционом пут и портфелем, равны, что следует из постановки задачи, то современные стоимости портфеля и опциона также должны быть равными, т.е. для ее расчета надо использовать формулу **(30.6)**.

Дельта опциона будет определяться соотношением **(30.7)**, а связь между дельтой опциона и коэффициентом полного хеджирования — соотношением **(30.8)**.

Пример 30.3. Цена спот акции $S = 360$ руб., а цена исполнения опциона пут на эту акцию $S_0 = 395$ руб. Предполагается, что акция на момент исполнения (через год) будет стоить либо $Su = 425$ руб., либо $Sd = 275$ руб. Безрисковая сила роста $\delta = 13{,}1\%$ годовых.

Определить количество акций и стоимость безрисковых активов эквивалентного портфеля, а также цену опциона.

Решение.

Как следует из формул **(30.9)**,

$$F_u = 0 \text{ руб.}, \ F_d = 395 - 275 = 120 \text{ руб.}$$

Количество акций в эквивалентном портфеле находим по первой формуле **(30.5)**:

$$\Delta = \frac{F_u - F_d}{Su - Sd} = \frac{0 - 120}{425 - 275} = -0{,}8, \quad \text{т.е. } -0{,}8 \text{ акции.}$$

Знак минус перед значением количества акций означает, что инвестор занял под безрисковый процент $0{,}8 \cdot 360 = 288$ руб. на их покупку.

Стоимость безрисковых активов эквивалентного портфеля определяется по второй формуле **(30.5)**. Предварительно находим $u = \dfrac{425}{360}$, $d = \dfrac{275}{360}$. Тогда

$$b = \frac{uF_d - dF_u}{u-d} \cdot \mathrm{e}^{-\delta T} = \frac{\frac{425}{360} \cdot 120 - \frac{275}{360} \cdot 0}{\frac{425}{360} - \frac{275}{360}} \cdot \mathrm{e}^{-0,131} = 298,25 \text{ руб.}$$

Цена опциона определяется по формуле **(30.6)**:

$$F = S \cdot \Delta + b = -360 \cdot 0,8 + 298,25 = 10,25 \text{ руб.} \quad \square$$

30.3. Взаимосвязь цен европейских однопериодных опционов колл и пут

Обозначим цены опционов колл и пут F_K и $F_П$ соответственно. Цену опциона в общем виде можно представить, подставив в **(30.6)** формулу **(30.5)**. В результате получим

$$F = \frac{1}{u-d}\left[F_u\left(1 - d\mathrm{e}^{-\delta T}\right) - F_d\left(1 - u\mathrm{e}^{-\delta T}\right)\right]. \qquad \textbf{(30.10)}$$

Подставив в полученную формулу **(30.1)**, найдем цену опциона колл:

$$F_K = \frac{1}{u-d}\left[\left(1 - d\mathrm{e}^{-\delta T}\right)\max\{0, Su - S_0\} - \left(1 - u\mathrm{e}^{-\delta T}\right)\max\{0, Sd - S_0\}\right]. \qquad \textbf{(30.11)}$$

Для получения формулы для расчета цены опциона пут подставим в **(30.10)** соотношение **(30.9)**:

$$F_П = \frac{1}{u-d}\left[\left(1 - d\mathrm{e}^{-\delta T}\right)\max\{0, S_0 - Su\} - \left(1 - u\mathrm{e}^{-\delta T}\right)\max\{0, S_0 - Sd\}\right]. \qquad \textbf{(30.12)}$$

Вычитая **(30.11)** из **(30.12)**, найдем

$$F_П - F_K = \frac{1}{u-d}\left[\begin{gathered}\left(1 - d\mathrm{e}^{-\delta T}\right)\left[\max\{0, S_0 - Su\} - \max\{0, Su - S_0\}\right] - \\ -\left(1 - u\mathrm{e}^{-\delta T}\right)\left[\max\{0, S_0 - Sd\} - \max\{0, Sd - S_0\}\right]\end{gathered}\right]. \qquad \textbf{(30.13)}$$

Возможны три варианта значений цены поставки при преобразовании последнего соотношения (рис. 30.2): 1) $Sd < S_0 < Su$; 2) $S_0 > Su$; 3) $S_0 < Sd$.

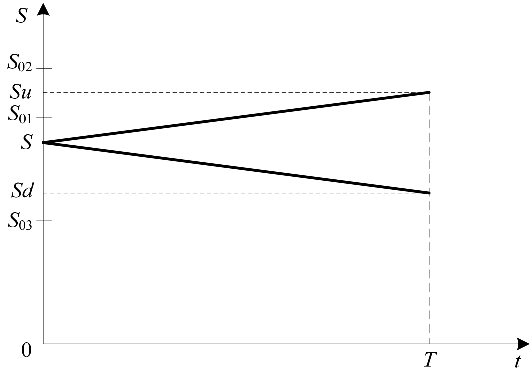


Рис. 30.2. Три варианта значений цены поставки

В каждой из трех ситуаций выражение **(30.13)** сводится к одной и той же формуле. Рассмотрим первую из них, в этом случае

$$\max\{0, S_0 - Su\} = 0; \qquad \max\{0, Su - S_0\} = Su - S_0;$$

$$\max\{0, S_0 - Sd\} = S_0 - Sd; \qquad \max\{0, Sd - S_0\} = 0.$$

Подставив полученные соотношения в **(30.13)**, найдем

$$F_П - F_K = \frac{1}{u-d}\left[-\left(1 - d\mathrm{e}^{-\delta T}\right)\left(Su - S_0\right) - \left(1 - u\mathrm{e}^{-\delta T}\right)\left(S_0 - Sd\right)\right] =$$

$$= -S + S_0\mathrm{e}^{-\delta T}.$$

Отсюда получим формулу для взаимосвязи цен европейских однопериодных опционов колл и пут:

$$F_П - F_K + S = S_0\mathrm{e}^{-\delta T}. \qquad \textbf{(30.14)}$$

Из этой формулы, в частности, следует, что цена портфеля, состоящего из акции, купленного опциона пут (инвестор платит премию в размере $F_П$) и проданного опциона колл (инвестор получает премию в размере F_K), равна современной стоимости от цены исполнения, дисконтированной на настоящий момент по безрисковой силе роста.

30.4. Биноминальная модель цены европейского двухпериодного опциона колл

Для двухпериодной биноминальной модели европейского опциона колл возможные положения цен представлены на рис. 30.3.

Здесь введены следующие о б о з н а ч е н и я:

S — цена спот (текущая цена) акции;

Su — высокая цена акции в конце первого периода;

Sd — низкая цена акции в конце первого периода;

Suu — высокая цена акции в конце второго периода при высокой цене акции в конце первого периода;

Sud — низкая цена акции в конце второго периода при высокой цене акции в конце первого периода;

Sdu — высокая цена акции в конце второго периода при низкой цене акции в конце первого периода;

Sdd — низкая цена акции в конце второго периода при низкой цене акции в конце первого периода;

S_0 — цена исполнения в конце второго периода;

δ — безрисковая сила роста;

F — цена опциона.

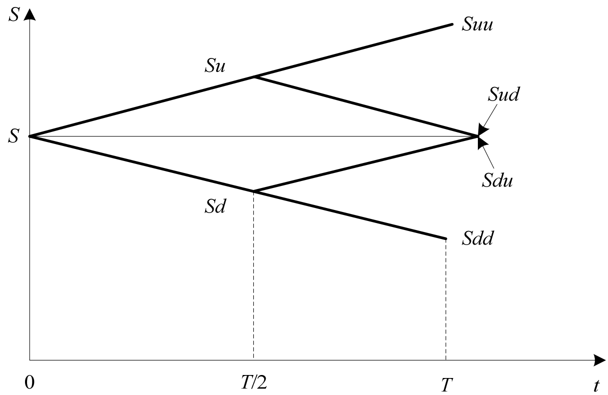


Рис. 30.3. Двухпериодная модель опциона

Выплаты в конце второго периода можно рассчитать по формулам

$$\left.\begin{aligned} F_{uu} &= \max\{0, Suu - S_0\}; \\ F_{ud} &= \max\{0, Sud - S_0\}; \\ F_{du} &= \max\{0, Sdu - S_0\}; \\ F_{dd} &= \max\{0, Sdd - S_0\}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(30.15)}$$

Положим, что, по крайней мере, $Suu > S_0$. В противном случае, если $Suu < S_0$, цена опциона равна нулю. Для расчета текущей цены опциона (для момента $t = 0$) по характеристикам опциона, имеющим место в момент $t = T/2$, может быть использована формула **(30.4)**, записанная в виде

$$F = \frac{S}{k} - \frac{Su - kF_u}{k} e^{-\delta \cdot T/2},$$

где коэффициент полного хеджирования k рассчитывается по формуле $k=\dfrac{Su-Sd}{F_u-F_d}$; F_u, F_d — цена опциона в конце первого периода для высокой и низкой цен акции в конце первого периода соответственно.

Для расчета цены опциона колл надо знать цены F_u и F_d. Для определения этих цен также используются соотношения **(30.4)** и **(30.2)**. При этом характеристики для конца первого периода рассчитываются по характеристикам для конца второго периода. Таким образом, выражения для расчета F_u и F_d можно записать в виде

$$F_u=\frac{Su}{k_u}-\frac{Suu-k_uF_{uu}}{k_u}\mathrm{e}^{-\delta T/2},\quad \text{где } k_u=\frac{Suu-Sud}{F_{uu}-F_{ud}};$$

$$F_d=\frac{Sd}{k_d}-\frac{Sdu-k_dF_{du}}{k_d}\mathrm{e}^{-\delta T/2},\quad \text{где } k_d=\frac{Sdu-Sdd}{F_{du}-F_{dd}}.$$

30.5. Биноминальная модель цены европейского многопериодного опциона колл

Проведенные в § 30.4 исследования можно провести на основе статистического анализа. При этом биноминальная модель цены многопериодного европейского опциона колл может быть также построена на основе портфеля из акций и безрисковых активов. Для однопериодного опциона колл цена вычисляется по формулам **(30.4)**, **(30.6)** и **(30.10)**. Формулу **(30.10)** можно переписать в виде

$$F=\frac{\mathrm{e}^{\delta T}-d}{u-d}F_u\mathrm{e}^{-\delta T}+\frac{u-\mathrm{e}^{\delta T}}{u-d}F_d\mathrm{e}^{-\delta T}, \tag{30.16}$$

Введем обозначение:

$$p=\frac{\mathrm{e}^{\delta T}-d}{u-d}\cdot \tag{30.17}$$

Справедливо соотношение

$$1-p=1-\frac{\mathrm{e}^{\delta\cdot T}-d}{u-d}=\frac{u-\mathrm{e}^{\delta\cdot T}}{u-d}\cdot \tag{30.18}$$

Подставив **(30.17)** и **(30.18)** в **(30.16)**, получим

$$F=\left[pF_u+(1-p)F_d\right]\cdot\mathrm{e}^{-\delta\cdot T}. \tag{30.19}$$

Из формул **(30.17)** и **(30.18)** следует, что при выполнении соотношения $d<\mathrm{e}^{\delta T}<u$ справедливо неравенство

$$0<p<1. \tag{30.20}$$

Таким образом, величина p удовлетворяет требованиям, предъявляемым к вероятности. Если p рассматривать как вероятность, то на рассмотренные выше характеристики можно взглянуть по-новому. В соответствии с **(30.19)** цена опциона колл является средней ценой в момент $t=T$, дисконтированной по безрисковой силе роста δ на начальный момент $t=0$. Весами осреднения являются вероятность p появления будущей цены F_u и вероятность $1-p$ появления будущей цены F_d. Рассмотренный метод называется *нейтральной к риску оценкой.*

Метод нейтральной к риску оценки используется для многопериодных моделей. При этом, как правило, считают, что величины u, d и δ являются постоянными. Если интервал T разбивается на два периода, то при известных F_u и F_d в конце первого периода формула **(30.19)** принимает вид

$$F=\left[pF_u+(1-p)F_d\right]\cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot T/2}. \qquad \textbf{(30.21)}$$

Формула **(30.19)** может быть использована и для определения F_u и F_d при известных величинах F_{uu}, F_{ud}, F_{du} и F_{dd}, определяемых соотношениями **(30.15)**. Таким образом,

$$F_u=\left[pF_{uu}+(1-p)F_{ud}\right]\cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot T/2}; \qquad \textbf{(30.22)}$$

$$F_d=\left[pF_{du}+(1-p)F_{dd}\right]\cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot T/2}. \qquad \textbf{(30.23)}$$

Подставив **(30.22)** и **(30.23)** в **(30.21)** и учитывая, что $F_{ud}=F_{du}$, получим

$$\begin{aligned} F&=\left[(1-p)^2F_{dd}+2p(1-p)F_{ud}+p^2F_{uu}\right]\left(\mathrm{e}^{-\delta\cdot T/2}\right)^2=\\ &=\mathrm{e}^{-\delta\cdot T}\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}p^i(1-p)^{2-i}\max\left\{0, Su^id^{2-i}-S_0\right\}. \end{aligned} \qquad \textbf{(30.24)}$$

Обозначим $\binom{n}{i}=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$, где n — количество периодов модели. Для $n=2$ имеем $\binom{2}{i}=\dfrac{2!}{i!(2-i)!}$. При $i=0$ (первое слагаемое в **(30.24)**) получим $\binom{2}{0}=\dfrac{2!}{0!(2-0)!}=1$, при $i=1$ (второе слагаемое в **(30.24)**) получим $\binom{2}{1}=\frac{2!}{1!(2-1)!}=2$, при $i=2$ (третье слагаемое в **(30.24)**) получим $\binom{2}{2}=\frac{2!}{2!(2-2)!}=1$. Значения цен $\max\left\{0, Su^i d^{2-i}-S_0\right\}$ определяются по формулам **(30.15)**.

Если интервал длительностью T разбить на n периодов, то формула для расчета цены опционов приобретает вид

$$F=\mathrm{e}^{-\delta T}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\max\left\{0, Su^i d^{n-i}-S_0\right\}. \qquad \textbf{(30.25)}$$

В этой формуле показатель $Su^i d^{n-i}$ является рядом значений цены актива в конце интервала T, т.е. в момент времени $t=T$. Это возрастающий ряд значений, начиная с Sd^n и заканчивая Su^n. Цена исполнения S_0 может лежать внутри этого интервала. Поэтому можно выделить такое минимальное целое число $i=m$, при котором начинает выполняться неравенство $Su^m d^{n-m}-S_0\geq 0$. Если это неравенство соблюдается, то $\max\left\{0, Su^i d^{n-i}-S_0\right\}=Su^i d^{n-i}-S_0$. В этом случае **(30.25)** можно записать в виде

$$F=S\mathrm{e}^{-\delta T}\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}u^i d^{n-i}-S_0\mathrm{e}^{-\delta T}\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}. \qquad \textbf{(30.26)}$$

Сумму во втором слагаемом можно рассматривать как вероятность исполнения опциона колл, а все второе слагаемое — как дисконтированный на начало процесса ожидаемый расход. Первое слагаемое — это дисконтированный ожидаемый доход.

Значения u и d, входящие в полученные формулы, зависят от числа n, на которое разбивается интервал T, и от стандартного отклонения цены акции в конце интервала T. Часто принимают

$$u=\mathrm{e}^{\sigma_T/\sqrt{n}};\quad d=\mathrm{e}^{-\sigma_T/\sqrt{n}}, \qquad \textbf{(30.27)}$$

где σ_T — стандартное отклонение цены акции в конце интервала T.

■ **Пример 30.4.** Цена спот акции равна $S=350$ руб. Цена исполнения опциона колл через год на эту акцию $S_0=395$ руб. Безрисковая сила роста $\delta=5\%$ годовых. Стандартного отклонения цены акции в конце года $\sigma_T=0,2$. Период разбиения составляет 6 мес., т.е. $n=2$.

Определить вероятность повышения и понижения курса акции через 6 мес. и построить дерево распределения цен акции и опциона.

Решение.

Значения u, d определяются формулами **(30.27)**:

$$u = e^{\sigma_T/\sqrt{n}} = e^{0,2/\sqrt{2}} = 1,152; \quad d = e^{-\sigma_T/\sqrt{n}} = e^{-0,2/\sqrt{2}} = 0,868.$$

Вероятность перехода цены акции для каждого периода в конце четвертого месяца из начального в верхнее состояние определяется по формуле **(30.17)**:

$$p = \frac{e^{\delta \cdot T/2} - d}{u - d} = \frac{e^{0,05/2} - 0,868}{1,152 - 0,868} = 0,554.$$

Вероятность перехода цены акции для каждого периода в конце четвертого месяца из начального в нижнее состояние равна

$$1 - p = 1 - 0,554 = 0,446.$$

Сначала найдем цену акции для каждого узла дерева распределения (рис. 30.4):

в узле $Su = 350 \cdot 1,152 = 403,2$ руб.;

в узле $Suu = 350 \cdot 1,152^2 = 464,49$ руб.;

в узле $Sud = 350 \cdot 1,152 \cdot 0,868 = 350$ руб., и т.д.

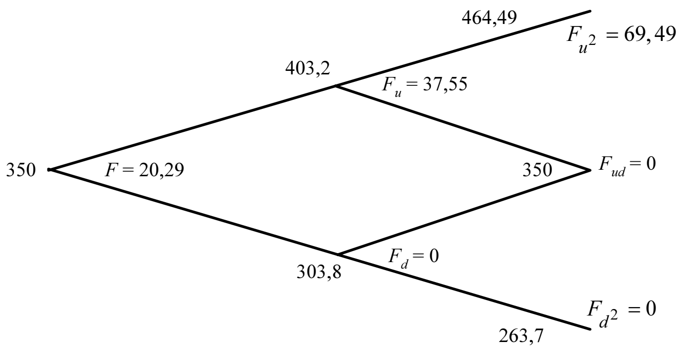


Рис. 30.4. Дерево распределений □

Стоимость опциона в узлах пересчитывается слева направо, т.е. начинается расчет для конца года, а заканчивается — для начала. В конце срока опциона цену находят по формуле $\max\left\{0, Su^i d^{n-i} - S_0\right\}$. Для самого нижнего состояния $Sd^2 < S_0$, т.е. $F_{d^2} = 0$. Для среднего состояния $Sud < S_0$, поэтому $F_{ud} = 0$. Для самого верхнего состояния $Su^2 > S_0$, значит, $F_{u^2} = 464,49 - 395 = 69,49$.

В конце первого периода (через 6 мес. с начала процесса) цена опциона в узлах:

$$F_u = \left[pF_{u^2} + (1-p)F_{ud} \right] \cdot \mathrm{e}^{-\delta T/2} =$$

$$= (0,554 \cdot 69,49 + 0,446 \cdot 0) \cdot \mathrm{e}^{-0,05/2} = 37,55 \text{ руб.};$$

$$F_d = \left[pF_{ud} + (1-p)F_{d^2} \right] \cdot \mathrm{e}^{-\delta T/2} = (0,554 \cdot 0 + 0,446 \cdot 0) \cdot \mathrm{e}^{-0,05/2} = 0 \text{ руб.}$$

И наконец, цена опциона в момент заключения контракта при $t = 0$:

$$F = \left[pF_u + (1-p)F_d \right] \cdot \mathrm{e}^{-\delta T/2} = (0,554 \cdot 37,55 + 0,446 \cdot 0) \cdot \mathrm{e}^{-0,05/2} = 20,29 \text{ руб.}$$

Непосредственно эту цену можно найти по формуле **(30.25)**:

$$F = \mathrm{e}^{-\delta T} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \max\left\{0, Su^i d^{n-i} - S_0\right\} =$$

$$= \mathrm{e}^{-0,05} \begin{pmatrix} 0,446^2 \cdot \max\left\{0, 350 \cdot 0,868^2 - 395\right\} + \\ +2 \cdot 0,554 \cdot 0,446 \cdot \max\left\{0, 350 \cdot 1,152 \cdot 0,868 - 395\right\} + \\ +0,554^2 \cdot \max\left\{0, 350 \cdot 1,152^2 - 395\right\} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(0 + 0 + 0,554^2 \cdot 69,49\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,05} = 20,29 \text{ руб.}$$

Приведенные здесь результаты для европейского опциона колл применимы и для американского опциона колл на акцию, не выплачивающую дивиденды. Это утверждение справедливо, если в любом узле дерева распределений цена опциона больше или равна доходу от исполнения опциона, т.е. американский опцион колл не будет исполнен досрочно.

30.6. Биноминальная модель цены европейского многопериодного опциона пут

Для построения дерева распределения цен опционов пут используется подход определения дисконтированного среднего, рассчитываемого по формуле **(30.19)**. Весами дисконтированного среднего являются вероятность p появления будущей цены F_u **(30.17)** и вероятность $1 - p$ появления будущей цены F_d **(30.18)**. Эти показатели уже использовались для построения дерева распределения цен опционов колл в § 30.5. Цена актива в момент времени $t = T$ при разбиении интервала на n отрезков для состояния i определяется соотношением $\max\left\{0, S_0 - Su^i d^{n-i}\right\}$. Рассмотрим построения дерева распределения цен опционов пут на примере.

■ **Пример 30.5.** Основные характеристики опциона пут: $S = 42$ руб.; $S_0 = 45$ руб.; $T = 1$ год; $\delta = 5\%$ годовых; $\sigma_T = 0,2$; $n = 3$.

Построить дерево распределения цен европейского опциона.

Решение.

Значения для u, d и p найдем по формулам **(30.27)** и **(30.17)** соответственно:

$$u = e^{\sigma_T/\sqrt{n}} = e^{0,2/\sqrt{3}} = 1,1224; \quad d = e^{-\sigma_T/\sqrt{n}} = e^{-0,2/\sqrt{3}} = 0,8909;$$

$$p = \frac{e^{\delta \cdot T/3} - d}{u - d} = \frac{e^{0,05/3} - 0,8909}{1,1224 - 0,8909} = 0,5439; \quad 1 - p = 0,4561.$$

Найдем цену акции для каждого узла дерева распределения и отметим ее на рис. 30.5. Цена акции:

в узле $Su = 42 \cdot 1,1224 = 47,14$ руб.;

в узле $Suu = 42 \cdot 1,1224^2 = 52,92$ руб.;

в узле $Sud = 42 \cdot 1,1224 \cdot 0,8909 = 42$ руб., и т.д.

На рис. 30.5 представлено дерево распределения цен акции европейского опциона. Цена актива в момент времени $t = 1$, т.е. 1 год, при разбиении интервала на три отрезка для состояния i определяется соотношением $\max\left\{0, S_0 - Su^i d^{3-i}\right\}$. В конце года стоимость опциона в самом верхнем состоянии $F_{u^3} = 0$, во втором сверху — $F_{u^2 d} = 0$ руб., в третьем — $F_{ud^2} = 45 - 37,42 = 7,58$ руб. и в последнем — $F_{d^3} = 45 - 29,7 = 15,3$ руб.

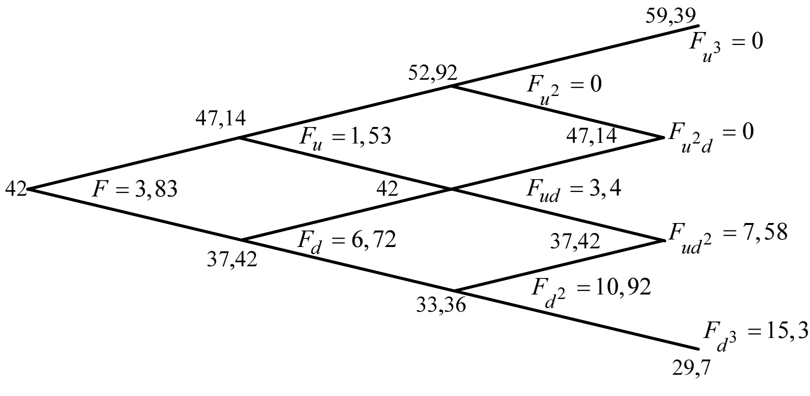


Рис. 30.5. Дерево распределений цен и стоимостей актива европейского опциона пут

В конце второго периода:

$$F_{u^2} = \left[pF_{u^3} + (1-p)F_{u^2 d}\right] \cdot e^{-\delta \cdot T/3} = (0,5439 \cdot 0 + 0,4561 \cdot 0) \cdot e^{-0,05/3} = 0 \text{ руб.};$$

$$F_{ud} = \left[pF_{u^2 d} + (1-p)F_{ud^2}\right] \cdot e^{-\delta \cdot T/3} = (0,5439 \cdot 0 + 0,4561 \cdot 7,58) \cdot e^{-0,05/3} = 3,4 \text{ руб.};$$

$$F_{d^2}=\left[pF_{ud^2}+(1-p)F_{d^3}\right]\cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot T/3}=(0{,}5439\cdot 7{,}58+0{,}4561\cdot 15{,}3)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}05/3}=10{,}92 \text{ руб.}$$

В конце первого периода:

$$F_u=\left[pF_{u^2}+(1-p)F_{ud}\right]\cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot T/3}=(0{,}5439\cdot 0+0{,}4561\cdot 3{,}4)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}05/3}=1{,}53 \text{ руб.};$$

$$F_d=\left[pF_{ud}+(1-p)F_{d^2}\right]\cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot T/3}=(0{,}5439\cdot 3{,}4+0{,}4561\cdot 10{,}92)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}05/3}=6{,}72 \text{ руб.}$$

И наконец, цена опциона в момент заключения контракта при $t=0$:

$$F=\left[pF_u+(1-p)F_d\right]\cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot T/3}=(0{,}5439\cdot 1{,}53+0{,}4561\cdot 6{,}72)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}05/3}=3{,}83 \text{ руб.}$$

На практике для определения цены опциона интервал T надо разбить не на три, а на 30÷50 периодов. □

30.7. Модель цены опциона Блэка—Шоулза

Предельный переход в формуле **(30.26)** при стремлении числа периодов разбиения n интервала T к бесконечности дает формулу Блэка—Шоулза для расчета цены опциона [44]. При этом стремится к бесконечности количество возможных цен актива на момент его поставки. Формула Блэка—Шоулза для расчета цены европейского опциона колл имеет вид

$$F=SN(d_1)-S_0\mathrm{e}^{-\delta\cdot T}N(d_2), \qquad \textbf{(30.28)}$$

где

$$d_1=\frac{\ln\dfrac{S}{S_0}+\left(\delta+0{,}5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; \qquad \textbf{(30.29)}$$

$$d_2=\frac{\ln\dfrac{S}{S_0}+\left(\delta-0{,}5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}=d_2-\sigma\sqrt{T}; \qquad \textbf{(30.30)}$$

$N(d)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{d}\mathrm{e}^{x^2/2}dx$ — интеграл ошибок (вероятности); S — текущая рыночная цена акции; S_0 — цена исполнения; δ — годовая безрисковая сила роста; T — время истечения опциона в годах; σ — стандартное годовое отклонение цены акции.

Для расчета цены европейского опциона пут используется формула

$$F=-SN(-d_1)+S_0\mathrm{e}^{-\delta\cdot T}N(-d_2), \qquad \textbf{(30.31)}$$

где для расчета d_1 и d_2 используются формулы **(30.29)** и **(30.30)**.

Для приведенных здесь формул должны выполняться следующие условия:

- по акциям не выплачиваются дивиденды;
- рынок актива, положенного в основание опциона, абсолютно ликвиден;

- цена покупки актива равна цене его продажи;
- отсутствуют комиссионные и налоги.

■ **Пример 30.6.** Цена спот акции равна $S = 350$ руб. Цена исполнения через год на эту акцию S_0 = 395 руб. Безрисковая сила роста $\delta = 5\%$ годовых. Стандартное отклонение цены акции в конце года $\sigma_T = 0,2$.

Определить цену опциона колл и опциона пут с указанными характеристиками по формуле Блэка—Шоулза.

Решение.

Найдем d_1 и d_2 по формулам **(30.29)** и **(30.30)**:

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{S_0} + \left(\delta + 0,5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{350}{395} + 0,05 + 0,5\cdot 0,2^2}{0,2} = -0,255;$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S}{S_0} + \left(\delta - 0,5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{350}{395} + 0,05 - 0,5\cdot 0,2^2}{0,2} = -0,455.$$

Цена опциона колл определяется по формуле **(30.28)**:

$$F = SN(d_1) - S_0\mathrm{e}^{-\delta\cdot T}N(d_2) = 350N(-0,255) - 395\mathrm{e}^{-0,05}N(-0,455) =$$

$$= 350\cdot 0,4 - 395\mathrm{e}^{-0,05}\cdot 0,3 = 27,28 \text{ руб.}$$

Цена опциона пут определяется по формуле **(30.31)**:

$$F = -SN(-d_1) + S_0\mathrm{e}^{-\delta\cdot T}N(-d_2) = -350N(0,255) + 395\mathrm{e}^{-0,05}N(0,455) =$$

$$= -350\cdot 0,6 + 395\mathrm{e}^{-0,05}\cdot 0,68 = 45,5 \text{ руб.}$$

Для тех же условий в примере 30.4 была найдена цена опциона колл при разбиении срока опциона на два периода. Цена опциона при этом была равна 20,29 руб. Увеличение количества периодов повышает точность расчета. □

30.8. Методы оценки дисперсии цены акции

При формировании своих стратегий инвестор использует дисперсию цены акции для определения цен опционов, так как именно дисперсия или среднее квадратичное отклонение (стандартное отклонение, волатильность) характеризует скорость изменения цены. Одним из методов оценки математического ожидания $a_П$ и среднего квадратичного отклонения $\sigma_П$ цены акции является анализ цен за предыдущие периоды. Дисперсия и математическое ожидание за период в этом случае определяются по формулам

$$\sigma_П^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a_П\right)^2; \quad a_П = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

где x_i — исследуемая случайная величина; n — количество периодов в выборке.

В нашем случае в качестве случайной величины используется темп роста цены акции, вычисляемый по формуле

$$\ln \frac{S_{i+1}}{S_i},$$

где S_{i+1} — цена акции в конце периода $i+1$; S_i — цена акции в конце периода i. После расчета среднего квадратичного отклонения за период находят стандартное отклонение за год по формуле

$$\sigma = \sigma_П \sqrt{N},$$

где N — количество периодов в году.

Среднее квадратичное отклонение, рассчитанное по прошлым данным, может существенно отличаться от будущего среднего квадратичного отклонения, которое инвестор должен закладывать в расчеты цены опциона. Для уточнения результатов более поздним данным придают при расчетах более высокие веса. При этом можно использовать, например, экспоненциально взвешенные средние, рассмотренные в § 21.2.

Для расчета среднего квадратичного отклонения при интервале времени, равном одному году, можно использовать, например, данные цены закрытия в конце каждой из 53 недель. В этом случае $N = 52$. Используются и другие интервалы времени.

■ **Пример 30.7.** Даны значения цены закрытия акции за 11 недель (первый и второй столбцы табл. 30.1).

Определить среднее квадратичное отклонение за неделю и за год.

Таблица 30.1

Неделя	*Цена, руб.*	$x_i = \ln \frac{S_{i+1}}{S_i}$	$(x_i - a_П)^2$
1-я	98	0,0202	$0{,}866 \cdot 10^{-4}$
2-я	100	0,0296	$3{,}478 \cdot 10^{-4}$
3-я	103	−0,0196	$9{,}333 \cdot 10^{-4}$
4-я	101	−0,02	$9{,}579 \cdot 10^{-4}$
5-я	99	−0,0204	$9{,}828 \cdot 10^{-4}$
6-я	97	0,0103	$0{,}004 \cdot 10^{-4}$
7-я	98	0,0202	$0{,}856 \cdot 10^{-4}$
8-я	100	0,01	$0{,}009 \cdot 10^{-4}$
9-я	101	0,0099	$0{,}011 \cdot 10^{-4}$
10-я	102	−0,0198	$9{,}455 \cdot 10^{-4}$
11-я	100		
Итого	—	**0,1095**	$\mathbf{43{,}409 \cdot 10^{-4}}$

Решение.

Как следует из табл. 30.1, $n = 10$. Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение за период равны

$$a_{П}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{0{,}1095}{10}=0{,}01095;$$

$$\sigma_{П}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a_n\right)^2=\frac{43{,}409\cdot 10^{-4}}{9}=4{,}82\cdot 10^{-4};\quad \sigma_{П}=0{,}022.$$

Среднее квадратичное отклонение за год

$$\sigma=\sigma_{П}\sqrt{N}=2{,}2\cdot 10^{-2}\sqrt{52}=0{,}159.\quad \square$$

Другой метод оценки среднего квадратичного отклонения цены акции — это метод единого мнения рынка относительно текущей цены опциона. При этом полагают, что текущая рыночная цена опциона колл равна цене этого опциона *F*, рассчитанной по формуле **(30.28)**. Поэтому в эту формулу подставляют вместо *F* текущую рыночную цену опциона, текущую рыночную цену акции, годовую безрисковую силу роста, время истечения опциона и получают уравнение, в котором неизвестным является среднее квадратичное отклонение. Среднее квадратичное отклонение, полученное путем решения этого уравнения, называют подразумеваемой (внутренней) изменчивостью. Иногда находят внутреннее среднее квадратичное отклонение акции по различным видам опционов, а затем определяют среднее. В работе [44] утверждается, что методы оценки внутренней изменчивости дают лучшие результаты по сравнению с методом, основанным на анализе цен за предыдущие периоды.

30.9. Хеджирование портфеля из акций и опционов

Графическая зависимость стоимости опциона колл от цены актива представлена на рис. 30.6.

Луч S_0L характеризует внутреннюю стоимость опциона. ***Внутренняя стоимость*** — это стоимость опциона на покупку в случае, если цена актива превышает цену исполнения, т.е. владелец опциона получает доход, равный разности цены актива и цены исполнения. Если цена актива меньше цены исполнения, то внутренняя стоимость равна нулю. До наступления момента платежа стоимость опциона больше внутренней стоимости на величину, равную временной стоимости. Чем меньше остается времени до исполнения опциона, тем меньше временная стоимость.

Зависимость стоимости опциона F асимптотически приближается к лучу S_0L. По мере приближения к сроку погашения кривая стоимости опциона приближается к ломаной линии $0S_0L$ и в пределе обращается в эту линию. На рис. 30.6 этот факт отображается двумя кривыми. Та кривая, которая лежит ближе к ломаной линии $0S_0L$, характеризует цену в более позднее время.

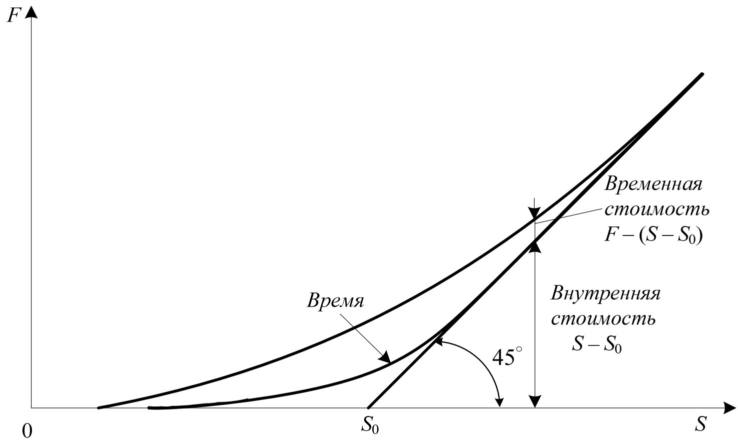


Рис. 30.6. Графическая зависимость стоимости опциона колл от цены актива

Из сказанного следует, что внутренняя стоимость вычисляется по формуле

$$П_{вн} = S - S_0.$$

Временная стоимость определяется соотношением

$$П_{вр} = F - \left(S - S_0\right).$$

Эти моменты отражены на рис. 30.6.

Рассмотрим параметры хеджированного портфеля из акций и опционов колл. Ранее было показано **(30.7)**, что для нейтрального к риску портфелю дельта опциона является производной от цены опциона по цене актива, т.е. $\Delta = \frac{\partial F}{\partial S}$. На рис. 30.7 представлена графическая зависимость цены опциона колл и дельты опциона от стоимости актива.

Ясно, что дельта опциона не может превышать единицу, так как кривая для цены опциона Блэка—Шоулза при возрастании цены актива асимптотически стремится к лучу S_0L, имеющему с осью абсцисс угол 45°.

Рассмотрим портфель, состоящий из c акций и одного проданного опциона колл. Известно, что в нейтральном к риску портфеле на одну акцию приходится k проданных опционов колл. Таким образом, можно записать пропорцию:

c акций — 1 опцион,

1 акция — k опционов.

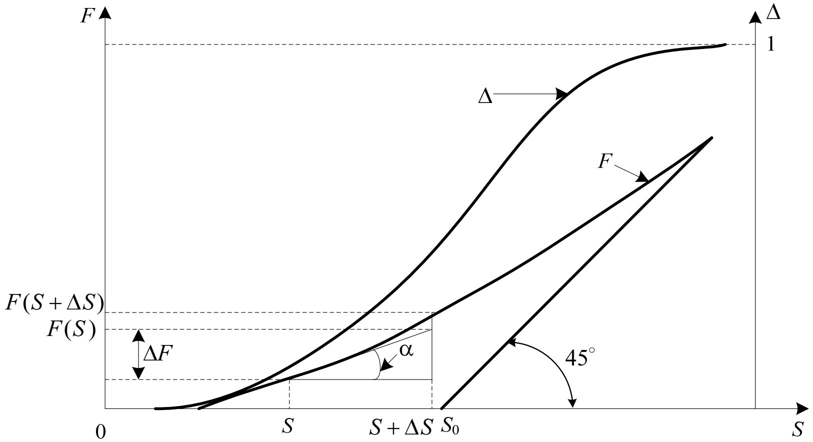


Рис. 30.7. Графическая зависимость цены опциона колл и дельты опциона от стоимости актива

Из этой пропорции следует, что $c = \dfrac{1}{k}$. Сопоставив это с **(30.8)**, видим, что в нейтральном к риску портфеле количество акций на один проданный опцион колл равно дельте портфеля, т.е. $c = \Delta$.

Проведем исследование принципа хеджирования портфеля, состоящего из Δ акций и проданного опциона колл. Для этих целей рассмотрим, как изменяется цена опциона при небольшом изменении цены актива. Пусть цена актива изменилась на величину ΔS (см. рис. 30.7). Цена опциона в этом случае изменится на $F(S+\Delta S)-F(S)$. Приращение $\Delta F = \Delta S \cdot \operatorname{tg}\alpha$ мало отличается от $F(S+\Delta S)-F(S)$ при небольшом изменении цены актива ΔS. Поэтому изменение цены опциона определяется соотношением

$$\Delta F \approx F(S+\Delta S)-F(S). \qquad \textbf{(30.32)}$$

Если цена акции увеличится на ΔS, то цена портфеля, в котором находятся Δ таких акций, возрастет на $\Delta S \cdot \Delta$. С другой стороны, при увеличении цены актива на ΔS цена опциона возрастет на ΔF, что следует из формулы **(30.32)**. А это приведет к снижению цены портфеля на величину ΔF. Поскольку $\Delta F = \Delta S \cdot \operatorname{tg}\alpha$, а $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\partial F}{\partial S} = \Delta$ (см. **(30.7)**), то $\Delta F = \Delta S \cdot \Delta$. Таким образом, с одной стороны, небольшое изменение цены актива приведет к увеличению стоимости портфеля на некоторую величину и уменьшение цены портфеля на эту же величину за счет увеличения цены опциона. Новая цена портфеля не изменится и будет равна старой цене.

Сказанное позволяет управлять портфелем, состоящим из акций и выписанных опционов колл на них. При изменении цены акции инвестор по новой дельте может сформировать новый хеджированный портфель.

Так как в хеджированном портфеле на один проданный опцион колл приходится c акций, где $c = \Delta$, то в хеджированный портфель с K проданными опционами входит $Kc = K\Delta$ акций. Таким образом, количество входящих в хеджированный портфель акций C и опционов K определяется по формуле

$$C = K\Delta. \qquad \textbf{(30.33)}$$

■ **Пример 30.8.** Инвестор формирует портфель из акций и 200 выписанных опционов колл. Дельта опциона в момент формирования равна 0,4.

Определить количество акций хеджированного портфеля.

Решение.

Количество акций хеджированного портфеля находим по формуле **(30.33)**:

$$C = 200 \cdot \Delta = 200 \cdot 0,4 = 80.$$

Таким образом, хеджированный портфель состоит из 200 выписанных опционов колл и 80 акций. □

Аналогичное хеджирование можно провести также при помощи опционов пут. Рассмотрим портфель, состоящий из Δ акций и одного купленного опциона пут. График зависимости цены опциона пут от цены актива представлен на рис. 30.8 (верхняя кривая).

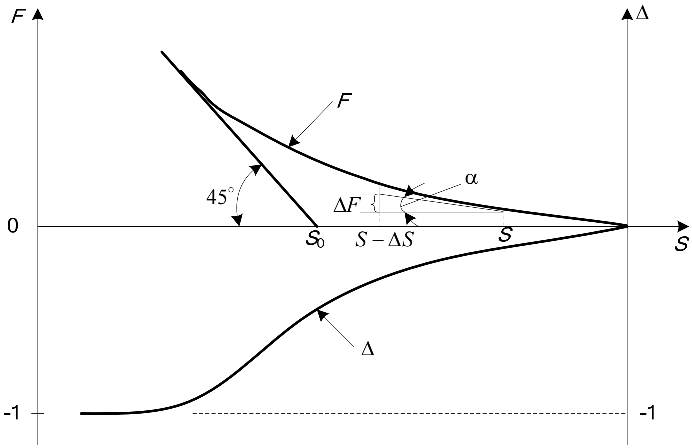


Рис. 30.8. Графики зависимостей показателей опциона пут от цены актива

Нижняя кривая (см. рис. 30.8) является зависимостью дельты опциона от цены акции. Поскольку функция цены опциона от цены акции убывающая, то дельта опциона является отрицательной величиной. Изменяется дельта опциона от −1 до 0. Инвестор покупает опцион пут и Δ акций. Хеджированный портфель составлен для точки S (см. рис. 30.8). Пусть цена акции понизилась на ΔS. Это приведет к снижению цены портфеля на $\Delta S \cdot \Delta$. Цена опциона пут возрастет при этом на величину $F = \Delta S \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta S \cdot \Delta$, что приведет к увеличению цены портфеля. В результате цена портфеля останется прежней.

На практике часто применяется последовательное хеджирование. Схема последовательного хеджирования показана на рис. 30.9.

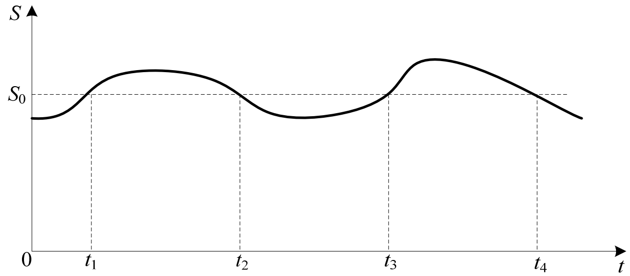


Рис. 30.9. Схема последовательного хеджирования

Инвестор продал европейский опцион колл в момент $t = 0$. В этот момент цена акции меньше цены исполнения $S < S_0$. Если это соотношение будет выполняться до момента исполнения опциона, то инвестору не нужно приобретать акцию, чтобы покрыть опцион, так как опцион не будет исполнен. В случае превышения рыночной цены акции над ценой погашения в момент, лежащий несколько правее точки $t = t_1$, инвестор купит акцию, чтобы покрыть опцион. В точке $t = t_2$ инвестор продаст акцию, в точке $t = t_3$ купит, в точке $t = t_4$ продаст. Если в момент исполнения у инвестора будет акция, он продаст ее при исполнении опциона покупателю опциона по цене S_0, т.е. по той же цене, что и купил, а его прибыль составит премия за опцион. Если в момент исполнения у инвестора не будет акции, то опцион не будет исполнен, а его прибыль также составит премия за опцион. Эти рассуждения справедливы при отсутствии накладных расходов и при равенстве цен покупки и продажи акции цене исполнения. Как правило, цена продажи ниже цены исполнения, а цена покупки выше цены исполнения. Это приведет к дополнительным расходам для инвестора. Поэтому если колебания кривой цены относительно прямой $S < S_0$ достаточно часты, то расход может превысить доход.

30.10. Активы с чертами опционов. Варант

Варант — это опцион колл, выписанный предприятием на свои акции. В отличие от опционов колл варанты выписываются в ограниченном количестве. Общее количество варантов определенного типа сокращается со временем по мере их исполнения. Исполнение варантов ведет их к постоянному сокращению, в то время как исполнение опционов колл никак не сказывается на положении предприятия-эмитента. Обычно варанты выписываются на длительный срок (на 5 лет и выше). Выписываются бессрочные варанты.

Иногда варанты могут использоваться до даты погашения, как американские опционы колл, иногда до момента погашения должен пройти определенный срок. Цена исполнения может быть фиксированной или изменяться со временем. Начальная цена исполнения, как правило, устанавливается выше, а часто существенно выше рыночной цены акции.

Один варант дает право владельцу купить одну акцию. Дальнейшее дробление акций на m штук дает право владельцу купить m акций.

Условия варанта приводятся в соглашении о варанте, в котором, в частности, определяются условия защиты держателя варанта.

Права

Право, как и варант, — это опцион колл, выписанный предприятием на свои акции. Этот инструмент дает акционерам преимущественные права при приобретении вновь выпускаемых обыкновенных акций. Для этих целей каждая акция, находящаяся в обращении, получает одно право. Подписная цена на новые акции устанавливается ниже цены этой акции. При покупке новой акции акционер выплачивает сумму, равную подписной цене. Новый инвестор перед покупкой акции покупает право, так что его затраты будут равны рыночной цене акции.

В отличие от варантов права имеют короткий срок исполнения (0,5÷2,5 мес.). До заданной даты старые акции продаются вместе с правами по цене, равной цене акции плюс цена права.

Облигации с условием отзыва

Облигация с условием отзыва позволяет эмитенту выкупить ее до даты погашения по цене, как правило, превышающей номинал. Такая операция эквивалентна одновременной продаже простой облигации и покупке опциона колл. Продавая облигацию с условием отзыва, фирма оплачивает опцион колл за счет более низкой цены облигации. Продавцом опциона является покупатель облигации. Обычно облигация может быть отозвана по прошествии длительного времени (5 лет и более).

Конвертируемая бумага

Конвертируемая бумага — это финансовый инструмент, который может быть конвертируемым в другие ценные бумаги данного предприятия. Например, это могут быть облигации или привилегированные акции, конвертируемые в обыкновенные акции.

Пусть конвертируемая облигация имеет номинал S_0. Эту облигацию можно обменять на m обыкновенных акций. Величину m называют коэффициентом конверсии, а отношение $P_0 = \frac{S_0}{m}$ — ценой конверсии. Коэффициент конверсии и цена конверсии устанавливаются при выпуске конвертируемой бумаги. Цена конверсии устанавливается выше рыночной стоимости облигации. Поэтому инвестору приходится ждать, пока рыночная цена акции не превысит цену конверсии. Конверсионная стоимость облигации определяется соотношением $S = mP$, где P — рыночная цена акции. Конверсионная доходность рассчитывается по формуле $i = \frac{S - S_0}{S_0}$.

Часто конвертируемые бумаги выпускаются с условием отзыва. Цена отзыва $S_{от}$ больше номинала S_0, т.е. $S_{от} > S_0$. Если на данный момент конверсионная стоимость $S > S_{от}$, то предприятие может побудить инвестора осуществить конверсию, послав сообщение об отзыве. При этом инвестор может осуществить конверсию, получив акции на сумму $S = mP$, или получить сумму $S_{от}$. Таким образом, облигация с условием отзыва не только может быть обменена на акции, но и предприятие имеет право купить ее у инвестора. Такая облигация содержит двойной опцион, т.е. инвестор имеет право обменять облигацию на акции, а предприятие имеет право выкупить облигацию у инвестора.

В практике встречаются самые разнообразные конвертируемые бумаги.

Упражнения

ЗАДАЧИ

30.1. В момент заключения контракта цена акции $S = 28$ руб. Цена исполнения опциона колл через год на эту акцию $S_0 = 30$ руб. Предполагается, что акция на момент исполнения будет стоить либо $Su = 40$ руб., либо $Sd = 20$ руб. Величину безрисковой силы роста принять $\delta = 10\%$. Определить коэффициент полного хеджирования, цену опциона, стоимость портфеля, состоящего из одной акции и проданных опционов колл, будущие платежи, а также количество акций и стоимость безрисковых активов эквивалентного портфеля.

30.2. Цена спот акции $S = 28$ руб., а цена исполнения опциона пут на эту акцию $S_0 = 30$ руб. Предполагается, что акция на момент исполнения (через год) будет стоить либо $Su = 40$ руб., либо $Sd = 20$ руб. Безрисковая сила роста $\delta = 10\%$ годовых. Определить количество акций и стоимость безрисковых активов эквивалентного портфеля, а также цену опциона.

30.3. По данным примера 30.1 определить цену опциона пут с теми же характеристиками.

30.4. Цена спот акции равна $S = 28$ руб. Цена исполнения опциона колл через год на эту акцию $S_0 = 30$ руб. Безрисковая сила роста $\delta = 5\%$ годовых. Стандартное отклонения цены акции в конце года $\sigma_T = 0,2$. Период разбиения составляет 4 мес., т.е. $n = 3$. Определить вероятность повышения и понижения курса акции через 4 мес. и построить дерево распределения цен акции и опциона.

30.5. Цена спот акции равна $S = 28$ руб. Цена исполнения через год на эту акцию $S_0 = 30$ руб. Безрисковая сила роста $\delta = 5\%$ годовых. Стандартное отклонение цены акции в конце года $\sigma_T = 0,2$. Определить цену опциона колл и опциона пут с указанными характеристиками по формуле Блэка—Шоулза.

30.6. Инвестор формирует портфель из 100 акций и выписанных опционов колл. Дельта опциона в момент формирования равна 0,5. Определить количество выписанных опционов колл хеджированного портфеля.

Часть 7

ПОНЯТИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Глава 31 ДОХОДНОСТЬ И РИСК ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

31.1. Характеристики портфеля ценных бумаг

Если инвестор покупает ценные бумаги хотя бы двух видов, например акции Газпрома и акции Ростелекома, то говорят о портфеле ценных бумаг.

Предположим, что портфель составлен из n-го числа различных видов ценных бумаг. Доходности каждой ценной бумаги являются случайными величинами. Пусть x_j — доля от общего вложения, приходящаяся на j-й вид ценных бумаг, подчиняющаяся соотношению

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \qquad \textbf{(31.1)}$$

Ожидаемая доходность (эффективность) a_j j-й ценной бумаги, входящей в портфель, является математическим ожиданием доходности этой ценной бумаги. Ожидаемая доходность портфеля, являющаяся математическим ожиданием от суммарной доходности входящих в портфель ценных бумаг, вычисляется по формуле

$$a_p = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j. \qquad \textbf{(31.2)}$$

В подразделе 24.3.2. мерой риска определено среднее квадратичное отклонение исследуемой случайной величины. Поэтому мерой риска портфеля ценных бумаг будем считать среднее квадратичное отклонение его доходности, вычисляемое как корень квадратный из дисперсии.

Дисперсия доходности портфеля определяется соотношением

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \ , \qquad \textbf{(31.3)}$$

где σ_{ij} — ковариация случайных доходностей i-й и j-й ценных бумаг, вычисляемая по формуле

$$\sigma_{ij} = E\left\{\left(A_i - a_i\right)\left(A_j - a_j\right)\right\}, \qquad \textbf{(31.4)}$$

где E — оператор математического ожидания; A_i, A_j — случайные доходности i-й и j-й ценных бумаг соответственно.

Предположим, что эффективности различных ценных бумаг некоррелированны, т.е. $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда **(31.4)** принимает вид

$$\sigma_{jj} = E\left\{\left(A_j - a_j\right)^2\right\} = \sigma_j^2. \qquad \textbf{(31.5)}$$

Таким образом, если $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то ковариация j-й ценной бумаги равна ее дисперсии. В этом случае формула для дисперсии доходности портфеля ценных бумаг **(31.3)** приобретает вид

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sigma_j^2. \qquad \textbf{(31.6)}$$

Если деньги вложены в ценные бумаги равными частями, т.е. $x_j = 1/n$, то формулы **(31.2)** и **(31.6)** можно записать в виде

$$a_p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j; \qquad \textbf{(31.7)}$$

$$\sigma_p = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}. \qquad \textbf{(31.8)}$$

Рассмотрим возможность уменьшения риска снижения доходности за счет диверсификации (разнообразия) портфеля. Если в правую часть **(31.8)** вместо всех σ_j^2 подставить максимальное значение дисперсии $\sigma_{\max}^2$ из всего набора дисперсий σ_j^2, то получим неравенство

$$\sigma_p \leq \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{\max}^2}.$$

Правая часть этого соотношения равна

$$\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{\max}^{2}}=\frac{1}{n}\sqrt{n\sigma_{\max}^{2}}=\frac{\sigma_{\max}}{\sqrt{n}}.$$

Окончательно получим

$$\sigma_p \le \frac{\sigma_{\max}}{\sqrt{n}}. \qquad \mathbf{(31.9)}$$

Из выражения **(31.9)** следует, что при росте числа видов ценных бумаг n, доходности которых некоррелированы, риск портфеля уменьшается и стремится к нулю при $n \to \infty$. Этот результат называется эффектом диверсификации портфеля.

Для анализа корреляции на величину риска портфеля ценных бумаг в формуле для дисперсии доходности **(31.3)** выразим ковариацию случайных доходностей A_i и A_j через коэффициент корреляции

$$\rho_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}. \qquad \mathbf{(31.10)}$$

Тогда **(31.3)** можно представить в виде

$$\sigma_p^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma_i x_i\right)\left(\sigma_j x_j\right)\rho_{ij}. \qquad \mathbf{(31.11)}$$

Рассмотрим случай полной прямой корреляции $\rho_{ij}=1$ и случай полной обратной корреляции $\rho_{ij}=-1$. При $\rho_{ij}=1$ имеем

$$\sigma_p^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma_i x_i\right)\left(\sigma_j x_j\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j x_j\right)=\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j x_j\right)^2,$$

так как при суммировании по любой переменной получим один и тот же результат.

Если деньги вложены в ценные бумаги равными частями, т.е. $x_j=1/n$, то

$$\sigma_p^2=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\right)^2; \quad \sigma_p=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j.$$

При изменении состава портфеля за счет отклонения x_j от $1/n$ в ту или иную сторону стандартное отклонение будет несколько увеличиваться или уменьшаться, т.е. будет лежать в интервале

$$\sigma_{\min} \le \sigma_p \le \sigma_{\max}.$$

Отсюда следует, что среднее квадратичное отклонение портфеля при полной прямой корреляции доходностей всех ценных бумаг будет иметь тот же порядок, что и стандартное отклонение отдельных ценных бумаг, т.е. диверсификация не дает положительного эффекта.

При полной обратной корреляции, т.е. при $\rho_{ij} = -1$, рассмотрим случай двух ценных бумаг. Для $i = j$ выражение коэффициента корреляции, определяемой формулой **(31.10)**, принимает вид $\rho_{jj} = \dfrac{\sigma_{jj}}{\sigma_j \sigma_j} = \dfrac{\sigma_j^2}{\sigma_j \sigma_j} = 1$. Подставив это выражение в **(31.11)** и учитывая, что $n = 2$, получим

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sigma_i x_i\right)\left(\sigma_j x_j\right)\rho_{ij} = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1 x_1 \sigma_2 x_2 = \left(\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2\right)^2.$$

Из этого выражения следует, что при полной обратной корреляции дисперсия доходности портфеля может быть равна нулю, т.е. риск отсутствует. Это имеет место при выполнении следующего соотношения:

$$\sigma_1 x_1 = \sigma_2 x_2.$$

Состав такого портфеля можно определить, решив систему из полученного уравнения и уравнения для долей портфеля **(10.1)**, т.е.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 - \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} x_2 = 0. \end{cases}$$

Решения этой системы имеют вид

$$x_1 = \frac{\sigma_2/\sigma_1}{1+\sigma_2/\sigma_1}; \qquad x_2 = \frac{1}{1+\sigma_2/\sigma_1}.$$

■ **Пример 31.1.** В табл. 31.1 приведены характеристики четырех типов ценных бумаг.

Таблица 31.1

j	1	2	3	4
a_j, %	12	10	8	6
σ_j, %	2,5	1	0,4	0,4

1. Определить характеристики портфеля, состоящего из четырех типов ценных бумаг при равномерном вложении и при отсутствии корреляции доходностей между бумагами.

Решение.

Для определения ожидаемой доходности и стандартного отклонения портфеля воспользуемся формулами **(31.7)** и **(31.8)**:

$$a_p = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{1}{4}\cdot(12+10+8+6) = 9;$$

$$\sigma_p = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_j^2} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2,5^2+1^2+0,4^2+0,4^2} = 0,688.$$

2. То же, что и в *пункте 1* для 2-го, 3-го и 4-го типов ценных бумаг.

***Решение*:**

$$a_p = \frac{1}{3}\cdot(10+8+6) = 8;\ \ \sigma_p = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{1^2+0,4^2+0,4^2} = 0,383\,.$$

3. То же, что и в *пункте 1* для 2-го и 3-го типов ценных бумаг.

***Решение*:**

$$a_p = \frac{1}{2}\cdot(10+8) = 9;\ \ \sigma_p = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1^2+0,4^2} = 0,534.$$

4. То же, что и в *пункте 1* при полной прямой корреляции.

Решение.

Ожидаемая доходность та же, что и в *пункте 1.* Стандартное отклонение определяется по формуле

$$\sigma_p = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j = \frac{1}{4}\cdot(2,5+1+0,4+0,4) = 1,075.$$

5. Определить долю ценных бумаг портфеля, состоящего из 1-го и 2-го типов, при их полной обратной корреляции.

Решение.

Доля ценных бумаг портфеля, состоящего из двух типов этих бумаг, при их полной обратной корреляции находится по формулам

$$x_1 = \frac{\sigma_2/\sigma_1}{1+\sigma_2/\sigma_1} = \frac{1/2,5}{1+1/2,5} = 0,286\,;\ \ x_2 = \frac{1}{1+\sigma_2/\sigma_1} = \frac{1}{1+1/2,5} = 0,714\,. \ \square$$

31.2. Портфель из двух типов ценных бумаг

Для каждого портфеля можно построить на графике ожидаемой доходности от стандартного отклонения точку, рассчитанную по формулам **(31.1)—(31.3)**. Рассмотрим частный случай двух видов ценных бумаг. Пусть доля портфеля бумаг первого типа равна x, а бумаг второго типа равна $1-x$. Введем следующие обозначения для математического ожидания доходностей бумаг первого и второго типов, их дисперсий и ковариации $a_1; a_2; \sigma_1^2; \sigma_2^2; \sigma_{12}$ соответственно. Тогда **(31.2)** и **(31.3)** можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} a_p &= xa_1 + (1-x)a_2 \\ \sigma_p^2 &= x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12} \end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(31.12)}$$

Система уравнений является функций одной переменной $a_p(\sigma_p)$, заданной в параметрической форме. Параметром здесь является доля ценных бумаг первого вида x. Несколько графиков таких функций представлено на рис. 31.1. Некоторые из этих графиков имеют две ветви: верхнюю и нижнюю.

Найдем точку, в которой производная функции $a_p(\sigma_p)$ стремится к бесконечности. Поскольку функция **(31.12)** задана параметрически, т.е. $a_p(x)$ и $\sigma_p(x)$, то ее производную можно представить в виде

$$\frac{da_p}{d\sigma_p}=\frac{da_p/dx}{d\sigma_p/dx}=2\cdot\frac{(a_1-a_2)\sigma_p}{2x\sigma_1^2+2(1-x)^2\sigma_2^2+2(1-x-x)\sigma_{12}}.$$

Искомая точка находится из уравнения

$$x_0\sigma_1^2+(1-x_0)^2\sigma_2^2+(1-2x_0)\sigma_{12}=0.$$

Решая это уравнение относительно x_0, получим

$$x_0=\frac{\sigma_2^2-\sigma_{12}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}. \qquad \textbf{(31.13)}$$

■ **Пример 31.2.** Даны два типа ценных бумаг с характеристиками: $a_1=0{,}07;\ a_2=0{,}15;\ \sigma_1^2=0;\ \sigma_2^2=0{,}9;\ \sigma_{12}=0.$

Построить график функции $a_p(\sigma_p)$.

Решение.

Для рассматриваемого случая **(31.12)** можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}a_p&=xa_1+(1-x)a_2;\\ \sigma_p&=(1-x)\sigma_2.\end{aligned}\right\}$$

Определим производную $\frac{da_p}{d\sigma_p}=\frac{da_p/dx}{d\sigma_p/dx}=\frac{a_2-a_1}{\sigma_2}$. Так как производная постоянная, то исследуемая функция является отрезком прямой линии. Для $x=1$ имеем $a_p=a_1$ и $\sigma_p=0$. Если задана точка, лежащая на прямой, и угловой коэффициент, то прямая определена, ее уравнение имеет вид $a_p=a_1+\frac{a_2-a_1}{\sigma_2}\sigma_p$. Подставив сюда исходные данные примера, получим искомую функцию:

$$a_p=0{,}07+\frac{0{,}15-0{,}07}{\sqrt{0{,}9}}\sigma_p=0{,}07+0{,}08433\sigma_p.$$

Отрезок прямой легко построить по двум точкам. Одна точка определена, ее координаты 0; 0,07. Координаты второй точки находим при $x = 0$. В этом случае $a_p = a_2, \sigma_p = \sigma_2$. Тогда координаты второй точки 0,15; 0,949. На рис. 31.1 искомая функция представлена в виде левого отрезка прямой линии.

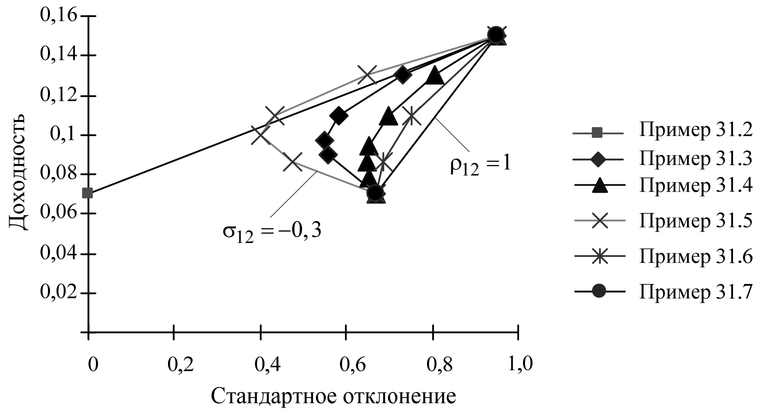


Рис. 31.1. Графики зависимостей доходности портфеля из двух ценных бумаг от риска □

■ **Пример 31.3.** Даны два типа ценных бумаг с характеристиками: $a_1 = 0,07$; $a_2 = 0,15$; $\sigma_1^2 = 0,45$; $\sigma_2^2 = 0,9$; $\sigma_{12} = 0$.

Построить график функции $a_p(\sigma_p)$.

Решение.

Определим точку экстремума по формуле **(31.13)**:

$$x_0 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} = \frac{0,9}{0,45 + 0,9} = 0,667.$$

Составим таблицу (табл. 31.2).

Таблица 31.2

x	0	0,25	0,5	0,667	0,75	1,0
a_p	0,15	0,13	0,11	0,097	0,09	0,07
σ_p	0,949	0,731	0,581	0,548	0,556	0,671

Графики, построенные по данным табл. 31.2, представлены на рис. 31.1. Эти графики имеют вид «пули»; $\sigma_p = 0,548$ — минимальная из всех возможных дисперсий, т.е. риск минимальный для структуры портфеля с долей бумаг первого типа $x = 0,667$ и с долей бумаг второго типа $1 - x = 333$. При этом ожидаемая доходность равна $a_p = 9,664\%$.

На рис. 31.1 представлены графики примеров от 31.2 до 31.7. Ковариации ценных бумаг первого и второго типов убывает справа налево. □

■ **Пример 31.4.** Даны два типа ценных бумаг с характеристиками: $a_1 = 0,07$; $a_2 = 0,15$; $\sigma_1^2 = 0,45$; $\sigma_2^2 = 0,9$; $\sigma_{12} = 0,3$.

Построить график функции $a_p(\sigma_p)$.

Решение.

Определим точку экстремума по формуле **(31.13)**:

$$x_0 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} = \frac{0,9 - 0,3}{0,45 + 0,9 - 0,6} = 0,8.$$

Составим таблицу (табл. 31.3).

Таблица 31.3

x	0	0,25	0,5	0,7	0,8	0,9	1,0
a_p	0,15	0,13	0,11	0,094	0,086	0,078	0,07
σ_p	0,949	0,804	0,698	0,654	0,648	0,654	0,671

График, построенный по данным табл. 31.3, представлен на рис. 31.1. □

■ **Пример 31.5.** Даны два типа ценных бумаг с характеристиками: $a_1 = 0,07$; $a_2 = 0,15$; $\sigma_1^2 = 0,45$; $\sigma_2^2 = 0,9$; $\sigma_{12} = -0,3$.

Построить график функции $a_p\left(\sigma_p\right)$.

Решение.

Определим точку экстремума по формуле **(31.13)**:

$$x_0 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} = \frac{0,9 + 0,3}{0,45 + 0,9 + 2 \cdot 0,3} = 0,6154.$$

Составим таблицу (табл. 31.4).

Таблица 31.4

x	0	0,25	0,5	0,6154	0,8	1,0
a_p	0,15	0,13	0,11	0,1	0,086	0,07
σ_p	0,949	0,65	0,433	0,4	0,477	0,671

График, построенный по данным табл. 31.4, представлен на рис. 31.1. □

■ **Пример 31.6.** Даны два типа ценных бумаг с характеристиками: $a_1 = 0,07$; $a_2 = 0,15$; $\sigma_1^2 = 0,45$; $\sigma_2^2 = 0,9$; $\sigma_{12} = 0,45$.

Построить график функции $a_p(\sigma_p)$.

Решение.

Определим точку экстремума по формуле **(31.13)**:

$$x_0 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} = \frac{0,9 - 0,45}{0,45 + 0,9 - 2 \cdot 0,45} = 1.$$

Составим таблицу (табл. 31.5).

Таблица 31.5

x	0	0,5	0,8	1,0
a_p	0,15	0,11	0,086	0,07
σ_p	0,949	0,75	0,684	0,671

График, построенный по данным табл. 31.5, представлен на рис. 31.1. □

■ **Пример 31.7.** Даны два типа ценных бумаг с характеристиками: $a_1 = 0,07;$ $a_2 = 0,15;$ $\sigma_1^2 = 0,45;$ $\sigma_2^2 = 0,9;$ $\rho_{12} = 1.$

Построить график функции $a_p(\sigma_p)$.

Решение.

Так как из условия $\rho_{12} = 1$ следует $\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2$, то уравнения **(31.12)** можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} a_p &= xa_1 + (1-x)a_2; \\ \sigma_p &= x(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2. \end{aligned}\right\}$$

Найдем производную $\dfrac{da_p}{d\sigma_p} = \dfrac{a_1 - a_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$. Так как эта производная не зависит от стандартного отклонения портфеля, то искомая функция является отрезком прямой линии, соединяющим точки, координаты которых находим из условий

$$\begin{aligned} &1)\ x = 1 \quad \to \quad a_p = a_1; \quad \sigma_p = \sigma_1; \\ &2)\ x = 1 \quad \to \quad a_p = a_2; \quad \sigma_p = \sigma_2. \end{aligned}$$

Для условий примера первая точка имеет координаты 0,671; 0,07, а вторая — координаты 0,949; 0,15. Искомая функция изображена на рис. 31.1. □

Как следует из приведенных примеров, вид функции $a_p\left(\sigma_p\right)$ существенным образом зависит от ковариации двух доходностей ценных бумаг. При увеличении ковариации растет риск (стандартное отклонение) при той же доходности.

31.3. Оптимальный портфель

Ожидаемая доходность портфеля **(31.2)** и его дисперсия **(31.3)** зависят от структуры портфеля, т.е. от типов ценных бумаг и их доли от общего вложения. Можно построить оптимальный портфель, минимизирующий риск при определенных условиях. Можно, например, минимизировать дисперсию **(31.3)** при фиксированном уровне доходности **(31.2)** и при нормировании весовых коэффициентов **(31.1)**. Такое решение минимизации риска впервые рассмотрено Марковицем. Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \quad \to \quad \min \qquad \textbf{(31.14)}$$

при

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} x_j a_j - a_p = 0;\\ \sum_{j=1}^{n} x_j - 1 = 0.\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(31.15)}$$

Оптимальное решение найдем с помощью метода множителей Лагранжа. Функция Лагранжа для условий **(31.15)** имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} + \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_j - a_p\right) + \mu\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1\right). \qquad \textbf{(31.16)}$$

Оптимальный портфель найдем из решения относительно x_j, λ и μ системы линейных уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0. \qquad \textbf{(31.17)}$$

Для трех видов ценных бумаг функция Лагранжа приобретает вид

$$L = x_1^2\sigma_{11} + x_2^2\sigma_{22} + x_3^2\sigma_{33} + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + 2x_2x_3\sigma_{23} +$$

$$+\lambda\left(x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 - a_p\right) + \mu\left(x_1 + x_2 + x_3 - 1\right).$$

Отсюда находим систему линейных уравнений **(31.17)** при условии $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1\sigma_{11} + 2x_2\sigma_{12} + 2x_3\sigma_{13} + a_1\lambda + \mu = 0;\\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2x_1\sigma_{21} + 2x_2\sigma_{22} + 2x_3\sigma_{23} + a_2\lambda + \mu = 0;\\
\frac{\partial L}{\partial x_3} &= 2x_1\sigma_{31} + 2x_2\sigma_{32} + 2x_3\sigma_{33} + a_3\lambda + \mu = 0;\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + 0\cdot\lambda + 0\cdot\mu = a_p;\\
\frac{\partial L}{\partial \mu} &= x_1 + x_2 + x_3 + 0\cdot\lambda + 0\cdot\mu = 1.
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(31.18)}$$

Эта система из пяти линейных уравнений с пятью неизвестными может быть решена, например, методом Крамера. Ее решение для состава портфеля имеет вид

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \qquad \textbf{(31.19)}$$

Значения определителей D, D_1, D_2 и D_3 найдем из соотношений

$$D = \begin{vmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & a_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & 2\sigma_{23} & a_2 & 1 \\ 2\sigma_{31} & 2\sigma_{32} & 2\sigma_{33} & a_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & a_1 & 1 \\ 0 & 2\sigma_{22} & 2\sigma_{23} & a_2 & 1 \\ 0 & 2\sigma_{32} & 2\sigma_{33} & a_3 & 1 \\ a_p & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2\sigma_{11} & 0 & 2\sigma_{13} & a_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 0 & 2\sigma_{23} & a_2 & 1 \\ 2\sigma_{31} & 0 & 2\sigma_{33} & a_3 & 1 \\ a_1 & a_p & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & 0 & a_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & 0 & a_2 & 1 \\ 2\sigma_{31} & 2\sigma_{32} & 0 & a_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_p & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

При вычислении определителя $D = \left|b_{ij}\right|$ n-го порядка его можно разложить на сумму произведений всех элементов какой-либо строки (или столбца), умноженные на соответствующие им алгебраические дополнения, по формуле

$$D = \left|b_{ij}\right| = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} B_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(-1\right)^{i+j} b_{ij} M_{ij}; \quad 1 \le j \le n,$$

где b_{ij} — элемент i-й строки (столбца) и j-го столбца (строки); B_{ij} — алгебраическое дополнение; M_{ij} — минор порядка $n - 1$, получающийся из D вычеркиванием i-й строки (столбца) и j-го столбца (строки).

■ **Пример 31.8.** Даны три типа ценных бумаг с характеристиками, приведенными в табл. 31.6. Уровни доходностей ценных бумаг некоррелированы.

Таблица 31.6

j	1	2	3
a_j	0,05	0,1	0,15
σ_j^2	0,25	0,5	0,8

Определить зависимость состава оптимального портфеля от его ожидаемой доходности и построить график функции $a_p(\sigma_p)$ при оптимальном составе портфеля.

Решение.

Проведем расчет определителей. При преобразовании определителей используется правило прибавления кратного, состоящее в прибавлении кратного i-й строки к j-й строке, что не изменяет значения определителя:

$$D = \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,05 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 & 1 \\ 0 & 0 & 1,6 & 0,15 & 1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,01525.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,05 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 & 1 \\ 0 & 0 & 1,6 & 0,15 & 1 \\ a_p & 0,1 & 0,15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -0,18a_p + 0,023.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,05 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 1 \\ 0 & 0 & 1,6 & 0,15 & 1 \\ 0,05 & a_p & 0,15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,055a_p - 0,00025.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,05 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,15 & 1 \\ 0,05 & 0,1 & a_p & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,125a_p - 0,0075.$$

Найдем зависимость состава оптимального портфеля от его ожидаемой доходности:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-0,18\ a_p + 0,023}{0,01525} = -11,8033\ a_p + 1,5082;$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0,055\ a_p - 0,00025}{0,01525} = 3,6066\ a_p - 0,0164;$$

$$x_3 = \frac{D_1}{D} = \frac{0,125\ a_p - 0,0075}{0,01525} = 8,1967\ a_p - 0,4918.$$

Используя нормировку **(31.1)**, можно провести проверку полученного результата. При этом сумма полученных зависимостей состава портфеля должна быть равна единице:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -11,8033\ a_p + 1,5082 + 3,6066\ a_p - 0,0164 + 8,1967\ a_p - 0,4918 = 1.$$

Для построения графика $a_p(\sigma_p)$ для заданных доходностей проводят расчет состава портфеля и риска. Например, для $a_p = 0,1$ состав портфеля

$$x_1 = 0,32787; \quad x_2 = 0,34426; \quad x_3 = 0,32787.$$

Дисперсию портфеля находим по формуле

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 =$$

$$= 0,32787^2 \cdot 0,25 + 0,34426^2 \cdot 0,5 + 0,32787^2 \cdot 0,8 = 0,17213.$$

Стандартное отклонение $\sigma_p = 0,415.$

Результаты расчета представлены в табл. 31.7.

Таблица 31.7

a_p	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,157
x_1	0,8	0,682	0,564	0,446	0,328	0,009
x_2	0,2	0,236	0,272	0,308	0,344	0,442
x_3	0	0,082	0,164	0,246	0,328	0,549
σ_p	0,424	0,387	0,372	0,382	0,415	0,582

График функции $a_p\left(\sigma_p\right)$ представлен на рис. 31.2.

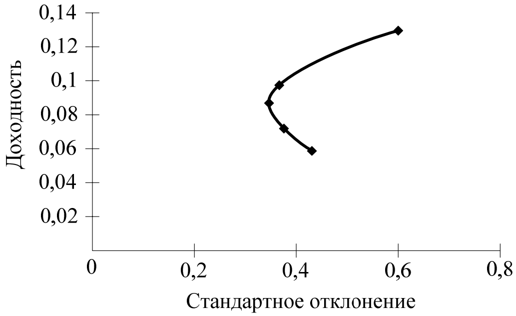


Рис. 31.2. Доходность—риск оптимального портфеля

При увеличении или уменьшении ожидаемой доходности оптимального портфеля a_p по сравнению с граничными значениями, представленными в табл. 31.7, доли от общего вложения x_j становятся отрицательными. □

Из графика функции $a_p\left(\sigma_p\right)$ примера следует, что возможно существование экстремальной точки, в которой стандартное отклонение (дисперсия) портфеля имеет минимальное значение. Эту задачу можно решить с помощью метода множителей Лагранжа:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \quad \to \quad \min$$

при

$$\sum_{j=1}^{n} x_j - 1 = 0.$$

Целевая функция Лагранжа для этого условия имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} + \mu\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1\right).$$

Координаты экстремальной точки x_j можно найти из системы линейных уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0. \qquad \textbf{(31.20)}$$

Функция Лагранжа для трех типов ценных бумаг принимает вид

$$L = x_1^2\sigma_{11} + x_2^2\sigma_{22} + x_3^2\sigma_{33} + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + 2x_2x_3\sigma_{23} + \mu\left(x_1 + x_2 + x_3 - 1\right).$$

Отсюда находим систему линейных уравнений относительно x_1, x_2, x_3 и μ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1\sigma_{11} + 2x_2\sigma_{12} + 2x_3\sigma_{13} + \mu = 0;\\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2x_1\sigma_{21} + 2x_2\sigma_{22} + 2x_3\sigma_{23} + \mu = 0;\\
\frac{\partial L}{\partial x_3} &= 2x_1\sigma_{31} + 2x_2\sigma_{32} + 2x_3\sigma_{33} + \mu = 0;\\
\frac{\partial L}{\partial \mu} &= x_1 + x_2 + x_3 + 0\cdot\mu = 1.
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(31.21)}$$

Эта экстремальная точка является исходной при анализе доходности и риска портфеля ценных бумаг. После определения этой точки инвестор будет знать ожидаемую доходность при минимально возможном риске. Так как в этой точке доходность растет существенно быстрее, чем стандартное отклонение, то инвестор имеет возможность изменить состав портфеля так, что ожидаемая доходность может заметно увеличиться при незначительном увеличении риска. При этом необходимо иметь в виду, что изменение состава портфеля на заданную величину стандартного отклонения может как увеличить, так и уменьшить ожидаемую доходность.

Метод выбора оптимального состава портфеля можно свести к следующему. Выбрав тип ценных бумаг, инвестор рассчитывает состав портфеля для минимально возможной дисперсии. Затем рассчитывает минимально возможное стандартное отклонение и соответствующую ему ожидаемую доходность. Если инвестор предпочитает повысить ожидаемую доходность, то он для ряда новых доходностей определяет стандартное отклонение по приведенной выше методике Марковица и выбирает приемлемый для себя вариант.

■ **Пример 31.9.** *Условия предыдущего примера.*

Определить состав портфеля для минимально возможной дисперсии, минимально возможное стандартное отклонение и соответствующую ему ожидаемую доходность.

Решение.

Система уравнений **(31.21)** принимает вид

$$\left.\begin{aligned}
0{,}5x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \mu &= 0;\\
0\cdot x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + \mu &= 0;\\
0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1{,}6\cdot x_3 + \mu &= 0;\\
x_1 + x_2 + x_3 + 0\cdot\mu &= 1.
\end{aligned}\right\}$$

Проведем расчет определителей:

$$D = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2{,}9; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1{,}6;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -0{,}8; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -0{,}5.$$

Состав портфеля для минимально возможной дисперсии:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1{,}6}{2{,}9} = 0{,}552\,; \; x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0{,}8}{2{,}9} = 0{,}276\,; \; x_3 = \frac{D_1}{D} = \frac{0{,}5}{2{,}9} = 0{,}172.$$

Стандартное отклонение портфеля:

$$\sigma_p = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2} = \sqrt{0{,}552^2 \cdot 0{,}25 + 0{,}276^2 \cdot 0{,}5 + 0{,}172^2 \cdot 0{,}8} = 0{,}372.$$

Ожидаемая доходность такого портфеля:

$$a_p = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 0{,}552 \cdot 0{,}05 + 0{,}276 \cdot 0{,}1 + 0{,}172 \cdot 0{,}15 = 0{,}081.$$

Таким образом, при доходности портфеля 8,1% его стандартное отклонение $\sigma_p = 0{,}371$, а при доходности 9% имеем $\sigma_p = 0{,}382$ (см. пример 31.8), т.е. при увеличении доходности в 1,125 раза стандартное отклонение увеличилось в 1,03 раза. □

Приведенную оптимизацию портфеля ценных бумаг удобно провести в матричной форме. Характеристики рисковых ценных бумаг задаются матрицей ковариаций σ, матрицей-столбцом ожидаемых доходностей *a*, матрицей-столбцом неизвестных долей *x* и единичной матрицей-столбцом *I*. Эти матрицы имеют вид

$$\sigma = \left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{1j} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{2j} & \sigma_{2n} \\ & & \cdots & \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \sigma_{ij} & \sigma_{in} \\ & & \cdots & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{nj} & \sigma_{nn} \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(31.22)}$$

Здесь σ_{ij} — ковариации случайных доходностей *i*-й и *j*-й рисковых ценных бумаг, $\sigma_{jj} = \sigma_j^2$;

$$a=\left[a_j\right]=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_j\\\cdots\\a_n\end{bmatrix};\quad x=\left[x_j\right]=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_j\\\cdots\\x_n\end{bmatrix};\quad I=[1]=\begin{bmatrix}1\\1\\\cdots\\1\\\cdots\\1\end{bmatrix}. \qquad \textbf{(31.23)}$$

С учетом введенных обозначений формулы **(31.14)** и **(31.15)** принимают вид

$$\sigma_p^2=x'\sigma x;\quad a_p=a'x;\quad I'x=1. \qquad \textbf{(31.24)}$$

Здесь x', a' и I' — транспонированные матрицы, в которых строки и столбцы поменялись местами. (Например, транспонированной по отношению к матрице b_{ij} является матрица b_{ji}.)

Покажем справедливость формул **(31.24)** (при умножении матриц используем правило: произведение матрицы $b=\left[b_{kl}\right]$ размера $K\times L$ на матрицу $c=\left[c_{lm}\right]$ размера $L\times M$ есть матрица $d=\left[d_{km}\right]$ размера $K\times M$, т.е. $d=b\cdot c=\left[b_{kl}\right]\cdot\left[c_{lm}\right]=\left[d_{km}\right]$, где $d_{km}=\sum\limits_{l=1}^{L}b_{kl}c_{lm}$):

$$x'\cdot\sigma\cdot x=\left[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\right]\cdot\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\ldots&\sigma_{1n}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}&\ldots&\sigma_{2n}\\&&\ldots&\\\sigma_{n1}&\sigma_{n2}&\ldots&\sigma_{nn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{bmatrix}=$$

$$=\left[x_1\sigma_{11}+\ldots+x_n\sigma_{n1}\qquad x_1\sigma_{12}+\ldots+x_n\sigma_{n2}\qquad\ldots\quad x_1\sigma_{1n}+\ldots+x_n\sigma_{nn}\right]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{bmatrix}=$$

$$=x_1^2\sigma_{11}+x_1x_2\sigma_{21}+\ \ldots\ +x_1x_n\sigma_{n1}+\ x_1x_2\sigma_{12}+\ x_2^2\sigma_{22}\ +\ \ldots\ +$$

$$+\ x_2x_n\sigma_{n2}+\ldots+\ x_1x_n\sigma_{1n}+\ x_2x_n\sigma_{2n}+\ \ldots\ +x_n^2\sigma_{nn}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\sigma_{ij}=\sigma_p^2;$$

$$a'x=\left[a_1\ a_2\ \ldots\ a_n\right]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{bmatrix}=x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n=\sum_{j=1}^{n}x_j=a_p;$$

$$I'x=\left[1\,1\ldots1\right]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{bmatrix}=x_1+x_2+\ldots+x_n=1.$$

Таким образом, задача минимизации риска портфеля сводится к минимизации дисперсии портфеля

$$\sigma_p^2=x'\sigma x \qquad \textbf{(31.25)}$$

при двух ограничивающих условиях:

$$a'x - a_p = 0; \quad I'x - 1 = 0. \qquad \textbf{(31.26)}$$

Функция Лагранжа для **(31.25)** и **(31.26)** принимает вид

$$L = x'\sigma x + \lambda\left(a'x - a_p\right) + \mu\left(I'x - 1\right). \qquad \textbf{(31.27)}$$

Оптимальный портфель находим из решения относительно x_j системы линейных уравнений **(31.17)**. Продифференцировав **(31.27)** по x, λ è μ, получим

$$\left.\begin{aligned} 2\sigma x + \lambda a + \mu I = 0; \\ a'x = a_p; \\ I'x = 1. \end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(31.28)}$$

Раскрыв эту систему, находим

$$\left.\begin{array}{l} 2\sigma_{11}x_1 + 2\sigma_{12}x_2 + \ldots + 2\sigma_{1n}x_n + a_1\lambda + \mu = 0; \\ 2\sigma_{21}x_1 + 2\sigma_{22}x_2 + \ldots + 2\sigma_{2n}x_n + a_2\lambda + \mu = 0; \\ \ldots \\ 2\sigma_{n1}x_1 + 2\sigma_{n2}x_2 + \ldots + 2\sigma_{nn}x_n + a_n\lambda + \mu = 0; \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + 0\cdot\lambda + 0\cdot\mu = a_p; \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 0\cdot\lambda + 0\cdot\mu = 1. \end{array}\right\}. \qquad \textbf{(31.29)}$$

Эту систему линейных уравнений относительно x_j можно решить методом Крамера. Иначе ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \ldots & 2\sigma_{1n} & a_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \ldots & 2\sigma_{2n} & a_2 & 1 \\ & & \ldots & & & \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \ldots & 2\sigma_{nn} & a_n & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ a_p \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(31.30)}$$

Обозначим матрицу риск—доходность через A, вектор $\left[x_j, \lambda, \mu\right]$ через X, а вектор правой части уравнения через B. Тогда уравнение **(31.30)** можно записать в виде

$$AX = B.$$

Решая это уравнение, получим формулу для определения неизвестных долей каждого типа рисковых ценных бумаг в оптимальном портфеле:

$$X = A^{-1}B, \qquad \textbf{(31.31)}$$

где матрица-столбец

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \\ a_p \\ 1 \end{bmatrix},$$

матрица риск—доходность

$$A = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & a_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & a_2 & 1 \\ & & \dots & & & \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_{nn} & a_n & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

A^{-1} — матрица, обратная матрице A.

Матрицей, обратной к матрице $A = \left[\alpha_{ij}\right]$, называется матрица

$$A^{-1} = C = \left[c_{ij}\right] = \left[\frac{A_{ij}^T}{|A|}\right], \qquad \textbf{(31.32)}$$

где A_{ij}^T — алгебраическое дополнение элемента α_{ij}^T в определителе транспонированной матрицы $\left|A^T\right|$, т.е. умноженный на $(-1)^{i+j}$ минор, полученный из $\left|A^T\right|$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

■ **Пример 31.10.** *Условия примера 31.8.*

Определить зависимость состава оптимального портфеля от его ожидаемой доходности в матричной форме.

Решение.

Для определения состава оптимального портфеля найдем обратную матрицу A^{-1} матрицы риск—доходность:

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,05 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 & 1 \\ 0 & 0 & 1,6 & 0,15 & 1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Элементы обратной матрицы можно определить по формуле **(31.32)**. Определитель этой матрицы был найден при решении примера 31.8:

$$|A| = D = 0,01525.$$

Алгебраические дополнения определителя транспонированной матрицы имеют следующие значения:

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0{,}1 & 1 \\ 0 & 1{,}6 & 0{,}15 & 1 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0{,}0025$$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0{,}1 & 1 \\ 0 & 1{,}6 & 0{,}15 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -0{,}005 \quad \text{и т.д.}$$

Обратная матрица равна

$$\grave{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1639 & -0{,}3279 & 0{,}1639 & -11{,}8033 & 1{,}5082 \\ -0{,}3279 & 0{,}6557 & -0{,}3279 & 3{,}6066 & -0{,}0164 \\ 0{,}1639 & -0{,}3279 & 0{,}1639 & 8{,}1967 & -0{,}4918 \\ -11{,}8033 & 3{,}6066 & 8{,}1967 & -190{,}164 & 15{,}4098 \\ 1{,}5082 & -0{,}0164 & -0{,}4918 & 15{,}4098 & -1{,}5246 \end{bmatrix}.$$

По формуле **(31.31)** находим матрицу-столбец состава портфеля:

$$X = \begin{bmatrix} 0{,}1639 & -0{,}3279 & 0{,}1639 & -11{,}8033 & 1{,}5082 \\ -0{,}3279 & 0{,}01 & -0{,}3279 & 3{,}6066 & -0{,}0164 \\ 0{,}1639 & -0{,}3279 & 0{,}1639 & 8{,}1967 & -0{,}4918 \\ -11{,}8033 & 3{,}6066 & -0{,}4918 & -137{,}7049 & 15{,}4098 \\ 1{,}5082 & 8{,}1967 & -0{,}0164 & 15{,}4098 & -1{,}5246 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_p \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -11{,}8033a_p & + 1{,}5082 \\ 3{,}6066a_p & - 0{,}0164 \\ 8{,}1967a_p & - 0{,}4918 \\ -137{,}7049a_p & +15{,}4098 \\ 15{,}4098a_p & - 1{,}5243 \end{bmatrix}.$$

Доли ценных бумаг первого x_1, второго x_2 и третьего x_3 типов представлены соответственно в первой, второй и третьей строках матрицы-столбца состава портфеля. Естественно, что этот результат совпадает с результатом примера 31.8. □

Расчет обратной матрицы, приведенный в примере 31.10, сделан на основе общих представлений о решении таких задач. Заметим, что существуют разработанные программы, например в Excel, позволяющие рассчитывать такие матрицы.

При определении минимально возможного значения дисперсии портфеля система уравнений **(31.29)** принимает вид

$$\left.\begin{array}{l} 2\sigma_{11}x_1 + 2\sigma_{12}x_2 + \ldots + 2\sigma_{1n}x_n + \mu = 0; \\ 2\sigma_{21}x_1 + 2\sigma_{22}x_2 + \ldots + 2\sigma_{2n}x_n + \mu = 0; \\ \ldots \\ 2\sigma_{n1}x_1 + 2\sigma_{n2}x_2 + \ldots + 2\sigma_{nn}x_n + \mu = 0; \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 0\cdot\mu = 1. \end{array}\right\}.$$

Перепишем эту систему уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \ldots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \ldots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ & & \ldots & & \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \ldots & 2\sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Обозначим матрицу риска через α, вектор $\left[x_j, \mu\right]$ через χ, а вектор правой части через β. Тогда систему уравнений можно записать в виде

$$\alpha \cdot \chi = \beta .$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\chi = \alpha^{-1} \cdot \beta , \qquad \textbf{(31.33)}$$

где α^{-1} — матрица, обратная матрице α.

■ **Пример 31.11.** *Условия примеров 31.8 и 31.9.*

Определить состав оптимального портфеля для минимально возможной дисперсии в матричной форме.

Решение.

Для определения состава оптимального портфеля найдем обратную матрицу α^{-1} матрицы риска

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Элементы обратной матрицы определим по формуле **(31.32)**. Определитель этой матрицы был найден при решении примера 31.9:

$$|\alpha| = D = -2{,}9.$$

Алгебраические дополнения определителя транспонированной матрицы имеют следующие значения:

$$\alpha_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1{,}6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1-1{,}6) = -2{,}6;$$

$$\alpha_{12}^T = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+3}(0-1{,}6) = 1{,}6.$$

Обратная матрица равна

$$\alpha^{-1}=\begin{bmatrix} 0,897 & -0,552 & -0,345 & 0,552 \\ -0,552 & 0,724 & -0,172 & 0,276 \\ -0,345 & -0,172 & 0,517 & 0,172 \\ 0,552 & 0,276 & 0,172 & -0,552 \end{bmatrix}.$$

По формуле **(31.33)** находим матрицу-столбец состава портфеля:

$$\chi=\begin{bmatrix} 0,897 & -0,552 & -0,345 & 0,552 \\ -0,552 & 0,724 & -0,172 & 0,276 \\ -0,345 & -0,172 & 0,517 & 0,172 \\ 0,552 & 0,276 & 0,172 & -0,552 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,552\\0,276\\0,172\\-0,552\end{bmatrix}.$$

Доли ценных бумаг первого x_1, второго x_2 и третьего x_3 типов представлены соответственно в первой, второй и третьей строках матрицы-столбца состава портфеля. Этот результат совпадает с результатом примера 31.9. □

31.4. Оптимальный портфель с добавлением безрисковых ценных бумаг

Рассмотрим случай трех ценных бумаг, из которых одна является безрисковой с дисперсией $\sigma_0{}^2=0$ и доходностью a_0; две другие ценные бумаги имеют доходности a_1, a_2 и дисперсии σ_1^2, σ_2^2. Эти ценные бумаги будем называть соответственно бумагами нулевого, первого и второго типов. Доходности этих ценных бумаг не коррелированы. В этом случае определители D, D_1, D_2 и D_3, входящие в решение **(31.19)**, приобретают вид

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0 & 1 \\ 0 & 2\sigma_{11} & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{22} & a_2 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2\sigma_{11}(a_2-a_0)^2+2\sigma_{22}(a_1-a_0)^2$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0 & 1 \\ 0 & 2\sigma_{11} & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{22} & a_2 & 1 \\ a_p & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$
$$=2\sigma_{11}(a_2-a_0)(a_2-a_p)+2\sigma_{22}(a_1-a_0)(a_1-a_p)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{22} & a_2 & 1 \\ a_0 & a_p & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\sigma_{22}\left(a_1 - a_0\right)\left(a_0 - a_p\right)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0 & 1 \\ 0 & 2\sigma_{11} & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_p & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\sigma_{11}\left(a_2 - a_0\right)\left(a_0 - a_p\right)$$

Подставив полученные результаты в формулы **(31.19)**, получим соотношения для расчета долей ценных бумаг x_0, x_1, x_2 соответственно для бумаг нулевого, первого и второго типов:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{\sigma_1^2(a_2 - a_0)(a_2 - a_p) + \sigma_2^2(a_1 - a_0)(a_1 - a_p)}{\sigma_1^2(a_2 - a_0)^2 + \sigma_2^2(a_1 - a_0)^2}; \\ x_1 &= \frac{\sigma_2^2(a_1 - a_0)(a_p - a_0)}{\sigma_1^2(a_2 - a_0)^2 + \sigma_2^2(a_1 - a_0)^2}; \\ x_2 &= \frac{\sigma_1^2(a_2 - a_0)(a_p - a_0)}{\sigma_1^2(a_2 - a_0)^2 + \sigma_2^2(a_1 - a_0)^2}. \end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(31.34)}$$

Используя эти значения, получим формулу для дисперсии портфеля:

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(a_p - a_0\right)^2}{\sigma_1^2\left(a_2 - a_0\right)^2 + \sigma_2^2\left(a_1 - a_0\right)^2}.$$

Так как $a_p \geq a_1$, то формулу для стандартного отклонения портфеля можно записать в виде

$$\sigma_p = \frac{a_p - a_0}{\sqrt{\dfrac{\left(a_1 - a_0\right)^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{\left(a_2 - a_0\right)^2}{\sigma_2^2}}}. \qquad \textbf{(31.35)}$$

Решив это уравнение относительно a_p, найдем зависимость доходности оптимального портфеля от его стандартного отклонения:

$$a_p = \sqrt{\frac{\left(a_1 - a_0\right)^2}{\sigma_1^2} + \frac{\left(a_2 - a_0\right)^2}{\sigma_2^2}}\,\sigma_p + a_0. \qquad \textbf{(31.36)}$$

Эта функция является прямой линией. Ее вид представлен на рис. 31.3.

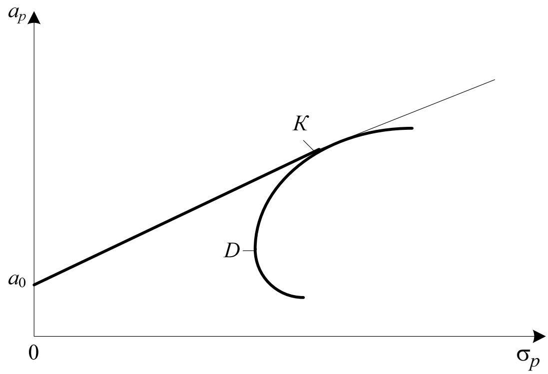


Рис. 31.3. Графики зависимости доходности оптимального портфеля от его стандартного отклонения

Тангенс угла наклона этой прямой с осью σ_p определяется соотношением

$$k = \sqrt{\frac{(a_1 - a_0)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(a_2 - a_0)^2}{\sigma_2^2}}.$$

Кривая линия на рис. 31.3, имеющая вид «пули», является функцией доходности оптимального портфеля, состоящего из рисковых ценных бумаг первого и второго типов, от стандартного отклонения этого портфеля. Вид этой кривой определяется системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_p &= xa_1 + (1-x)a_2; \\ \sigma_p^2 &= x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(31.37)}$$

где x — доля рисковых бумаг первого типа; $(1-x)$ — доля рисковых бумаг второго типа.

Из графиков рис. 31.3 видно, что прямая линия касается кривой в точке K.

Если инвестор захочет сформировать портфель из трех видов ценных бумаг, то инвестиционный менеджер предложит ему зависимость **(31.36)**, представленную в виде графика прямой, по которой он выберет точку с приемлемыми для него доходностью и стандартным отклонением. По формулам **(33.34)** будет определен состав этого портфеля.

■ **Пример 31.12.** Инвестор формирует портфель из трех видов ценных бумаг с характеристиками, представленными в табл. 31.8.

Таблица 31.8

j	0	1	2
a_j	0,05	0,1	0,15
σ_j^2	0	0,5	0,8

Построить прямую линию $a_p(\sigma_p)$ для оптимального портфеля, определить доходность портфеля и его состав при стандартном отклонении $\sigma_p = 0,4$.

Решение.

Найдем тангенс угла наклона прямой:

$$k = \sqrt{\frac{(0,1-0,05)^2}{0,5} + \frac{(0,15-0,1)^2}{0,8}} = 0,1323.$$

Угол наклона прямой к оси σ_p равен 7,5°.

Используя формулы **(31.34)**, находим соотношения для состава портфеля:

$$x_0 = -12,8571\ a_p + 1,6429;$$

$$x_1 = 5,7143\ a_p - 0,2857;$$

$$x_2 = 7,1428\ a_p - 0,3572.$$

Точка касания K лежит как на прямой, так и на кривой, поэтому в этой точке выполняется условие $x_0 = 0$. Подставив $x_0 = 0$ в первое из трех уравнений, получим $0 = -12,8571 \cdot a_{p,k} + 1,6429$. Отсюда находим доходность портфеля в точке касания $a_{p,k} = 0,1278$.

Уравнение прямой **(31.36)** в нашем случае имеет вид

$$a_p = 0,1323\ \sigma_p + 0,05.$$

Так как k — тангенс угла наклона искомой прямой к оси абсцисс, то значение стандартного отклонения портфеля σ_p в точке касания определяется по формуле

$$\sigma_{p,k} = \frac{a_{p,k} - a_0}{k} = \frac{0,1278 - 0,05}{0,1323} = 0,588.$$

Таким образом, отрезок прямой, предложенный инвестору, может быть построен по двум точкам (рис. 31.4) с координатами 0; 0,05 и 0,558; 0,1278.

Если инвестор согласен на риск, выраженный стандартным отклонением $\sigma_p = 0,4$, то доходность такого портфеля составит

$$a_p = 0,1323 \cdot 0,4 + 0,05 = 0,103\ .$$

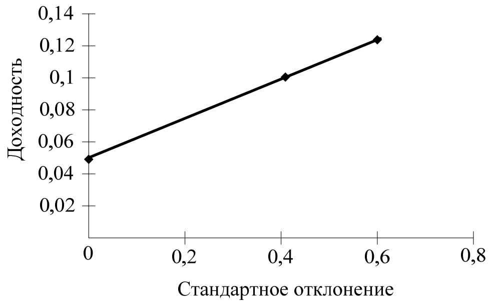


Рис. 31.4. График зависимости доходность—риск для оптимального портфеля

Состав этого портфеля:

$$x_0 = -12,8571 \cdot 0,103 + 1,6429 = 0,3186;$$

$$x_1 = \quad 5,7143 \cdot 0,103 - 0,2857 = 0,3029;$$

$$x_2 = \quad 7,1428 \cdot 0,103 - 0,3572 = 0,3785. \quad \square$$

Полученные результаты справедливы также для портфеля из n типов рисковых ценных бумаг и одного типа безрисковой ценной бумаги. Мы знаем, что при формировании оптимального портфеля только из рисковых ценных бумаг зависимость ожидаемой доходности оптимального портфеля от стандартного отклонения имеет вид «пули». При добавлении в портфель безрисковых ценных бумаг эта зависимость превращается в отрезок прямой, соединяющей точку оси a_p, координата которой равна доходности безрисковой ценной бумаги, и точку касания *K*, лежащую на «пуле» (см. рис. 31.3). Инвестор будет выбирать портфель так, чтобы ожидаемая доходность и стандартное отклонение лежали на этом отрезке.

Для построения функции ожидаемой доходности портфеля, состоящего из безрисковых ценных бумаг и n типов рисковых ценных бумаг, используется следующий алгоритм.

1. Определяют состав оптимального портфеля из n типов рисковых ценных бумаг для экстремальной точки на кривой $a_p(\sigma_p)$ (точка D на рис. 31.3) по формуле **(31.33)**.

2. Определяют доходность и дисперсию в экстремальной точке по формулам **(31.24)**.

3. Задаются рядом значений доходности портфеля, состоящего из n типов рисковых бумаг, больших и меньших, чем доходность в экстремальной точке. Для каждой из доходностей определяют состав оптимального портфеля по формуле **(31.31)**, а затем дисперсию по первой формуле **(31.24)**.

4. По полученным результатам строят график $a_p(\sigma_p)$ для оптимального портфеля, состоящего из рисковых ценных бумаг.

5. На оси a_p откладывают точку, координата которой равна доходности безрисковой ценной бумаги a_0.

6. Через эту точку проводят прямую, касательную к функции $a_p(\sigma_p)$ для оптимального портфеля, состоящего из рисковых ценных бумаг (см. рис. 31.3). Отрезок, соединяющий точку на оси a_p и точку касания *K*, является искомой функцией ожидаемой доходности портфеля.

7. Определяют структуру портфеля, состоящего из рисковых бумаг, в точке касания по формуле **(31.31)**. Запишем это уравнение в виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_p \\ 1 \end{bmatrix},$$

где A^{-1} является обратной матрице риск—доходность

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2\sigma_{01} & \dots & 2\sigma_{0n} & a_0 & 1 \\ 2\sigma_{10} & 2\sigma_{11} & \dots & 2\sigma_{1n} & a_1 & 1 \\ & & \dots & & & \\ 2\sigma_{n0} & 2\sigma_{n1} & \dots & 2\sigma_{nn} & a_n & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(31.38)}$$

Решить это уравнение — значит найти такое значение a_p, для которого безрисковые ценные бумаги в портфеле отсутствуют, т.е. $x_0 = 0$.

8. Инвестор в соответствии со своей склонностью к риску может указать точку на отрезке прямой доходность—риск или задать только стандартное отклонение, характеризующее его отношение к риску.

Рассмотрим метод определения доли безрисковых ценных бумаг x_0 в портфеле инвестора. Для этих целей необходимо знать отношение инвестора к риску. Инвестор по предложенному ему графику доходность—риск указывает ту степень риска, которая его устраивает. При этом автоматически определяется ожидаемая доходность портфеля. Для определения состава портфеля используем вторую формулу **(31.12)**, которую для рассматриваемого случая можно записать в виде

$$\sigma_{p,u} = (1 - x_0)\sigma_{p,k},$$

где $\sigma_{p,u}$ — стандартное отклонение портфеля инвестора; $\sigma_{p,k}$ — стандартное отклонение портфеля из рисковых ценных бумаг в точке касания.

Решая это уравнение относительно x_0, получим

$$x_0 = \frac{\sigma_{p,k} - \sigma_{p,u}}{\sigma_{p,k}}. \qquad \textbf{(31.39)}$$

Если известна доходность, которую хочет получить инвестор, и если точка для этой доходности лежит на отрезке прямой доходность—риск, то состав портфеля можно определить по первой формуле **(31.12)**, которую для рассматриваемой ситуации можно представить следующим образом:

$$a_{p,u} = x_0 a_0 + (1 - x_0) a_{p,k},$$

где $a_{p,u}$ — ожидаемая доходность портфеля инвестора; a_0 — доходность безрисковых ценных бумаг; a_k — доходность рискового портфеля в точке касания.

Отсюда находим

$$x_0 = \frac{a_k - a_{p,u}}{a_k - a_0}. \qquad \textbf{(31.40)}$$

Доля рисковых ценных бумаг в портфеле инвестора составит $1 - x_0$. Причем структура рисковой части оптимального портфеля не зависит от склонности инвестора к риску и определяется только вероятностными характеристиками рисковых ценных бумаг.

■ **Пример 31.13.** Даны четыре типа ценных бумаг, три из которых — рисковые (j = 1,2,3) и одна — безрисковая (j = 0), с характеристиками, приведенными в табл. 31.9.

Таблица 31.9

j	0	1	2	3
a_j	0,04	0,05	0,1	0,15
σ_j^2	0	0,25	0,5	0,8

Доходности ценных бумаг некоррелированы. Определить функцию ожидаемой доходности портфеля, состоящего из этих бумаг, от стандартного отклонения, а также доходность и состав портфеля инвестора при выборе им стандартного отклонения портфеля $\sigma_{p,u} = 0,3$.

Решение.

1. Определим вначале состав портфеля из трех рисковых бумаг для экстремальной точки. Матрица α уравнения **(31.33)** для нашего случая имеет вид

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1,6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ее определитель $|\alpha| = -2{,}9$. Элементы обратной матрицы по отношению к матрице α находим по формуле

$$\alpha^{-1} = \left[\frac{\alpha_{ij}^T}{|A|}\right]; \quad \alpha_{11}^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2{,}6; \quad \alpha_{12}^T = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1{,}6,$$

и т.д. Обратная матрица

$$\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}897 & -0{,}552 & -0{,}345 & 0{,}552 \\ -0{,}552 & 0{,}724 & -0{,}172 & 0{,}276 \\ -0{,}345 & -0{,}172 & 0{,}517 & 0{,}172 \\ 0{,}552 & 0{,}276 & 0{,}172 & -0{,}552 \end{bmatrix}.$$

Матрицу-столбец состава портфеля определяем по формуле **(31.33)**:

$$\chi = \begin{bmatrix} 0{,}897 & -0{,}552 & -0{,}345 & 0{,}552 \\ -0{,}552 & 0{,}724 & -0{,}172 & 0{,}276 \\ -0{,}345 & -0{,}172 & 0{,}517 & 0{,}172 \\ 0{,}552 & 0{,}276 & 0{,}172 & -0{,}552 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}552 \\ 0{,}276 \\ 0{,}172 \\ -0{,}552 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, искомый состав $x_1 = 0{,}552$; $x_2 = 0{,}276$; $x_3 = 0{,}172$. Проверку можно провести по формуле $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

2. Теперь по второй формуле **(31.24)** найдем доходность в экстремальной точке:

$$a_p = \begin{bmatrix} 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}552 \\ 0{,}276 \\ 0{,}172 \end{bmatrix} = 0{,}081.$$

3. Дисперсия в экстремальной точке вычисляется по первой формуле **(31.24)**:

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} 0{,}552 & 0{,}276 & 0{,}172 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}552 \\ 0{,}276 \\ 0{,}172 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}138 & 0{,}138 & 0{,}138 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}552 \\ 0{,}276 \\ 0{,}172 \end{bmatrix} = 0{,}138;$$

$$\sigma_p = 0{,}371.$$

4. Состав оптимального портфеля находим по формуле **(31.31)**. Для рассматриваемого примера матрица риск—доходность A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}05 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}1 & 1 \\ 0 & 0 & 1{,}6 & 0{,}15 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ее определитель равен (см. пример 31.10)

$$|A| = 0{,}01525.$$

Элементы матрицы A^{-1}, обратной матрице A, находятся по формуле

$$A^{-1} = C = \left[c_{ij}\right] = \left[\frac{A_{ij}}{|A|}\right],$$

где

$$A_{11}^{T}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0{,}1 & 1\\ 0 & 1{,}6 & 0{,}15 & 1\\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0{,}0025;\ A_{12}^{T}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0{,}1 & 1\\ 0 & 1{,}6 & 0{,}15 & 1\\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-0{,}005, \text{ и т.д.}$$

Рассчитав обратную матрицу и подставив результат в **(31.31)**, получим

$$X=\begin{bmatrix}0{,}1639 & -0{,}3279 & 0{,}1639 & -11{,}8033 & 1{,}5082\\ -0{,}3279 & 0{,}1 & -0{,}3279 & 3{,}6066 & -0{,}0164\\ 0{,}1636 & -0{,}3279 & 0{,}1639 & 8{,}1967 & -0{,}4918\\ -11{,}8033 & 3{,}6066 & 8{,}1967 & -137{,}7049 & 15{,}4098\\ 1{,}5082 & -0{,}0164 & -0{,}4918 & 15{,}4098 & -1{,}5246\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\a_p\\1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-11{,}8033a_p & + & 1{,}5082\\ 3{,}6066\,a_p & - & 0{,}0164\\ 8{,}1967\,a_p & - & 0{,}4918\\ -137{,}7049\,a_p & + & 15{,}4098\\ 15{,}4098a_p & - & 1{,}5243\end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$x_1=-11{,}8033\ a_p+1{,}5082;$$
$$x_2=\ \ 3{,}6066\ a_p-0{,}0164;$$
$$x_3=\ \ 8{,}1967\ a_p-0{,}4918.$$

Данные расчета сведены в табл. 31.10.

Таблица 31.10

a_p	0,06	0,07	0,081	0,09	0,1	0,127
x_1	0,8	0,682	0,552	0,446	0,328	0,009
x_2	0,2	0,236	0,276	0,308	0,344	0,442
x_3	0	0,082	0,172	0,246	0,328	0,549
σ_p	0,424	0,387	0,371	0,382	0,415	0,582

Дисперсия (стандартное отклонение) определялась по первой формуле **(31.24)**.

5. Строим график $a_p(\sigma_p)$ для рискового портфеля (рис. 31.5).

Рис. 31.5. Графики доходность—риск

6. По оси ординат откладываем координату, соответствующую доходности безрискового актива.

7. Проводим через эту точку прямую, касательную к функции доходности от стандартного отклонения рискового портфеля. Точка касания имеет координаты $\sigma_{p,k} = 0,5;\quad a_{p,k} = 0,117.$

8. Структура портфеля в точке касания:

$$\begin{aligned} x_1 &= -11,8033 \cdot 0,117 + 1,5082 = 0,127; \\ x_2 &= \quad 3,6066 \cdot 0,117 - 0,0164 = 0,406; \\ x_3 &= \quad 8,1967 \cdot 0,117 - 0,4918 = 0,467. \end{aligned}$$

9. Так как инвестор выбрал для своего портфеля стандартное отклонение 0,3, то долю безрисковых бумаг в портфеле находим по формуле **(31.39)**:

$$x_0 = \frac{0,5 - 0,3}{0,5} = 0,4.$$

Доля рисковых бумаг составит

$$x_1 = 0,6 \cdot 0,127 = 0,076; \quad x_2 = 0,6 \cdot 0,406 = 0,244;$$
$$x_3 = 0,6 \cdot 0,467 = 0,28.$$

Ожидаемая доходность определяется по формуле

$$a_{p,u} = 0,4 \cdot 0,04 + (1 - 0,4) \cdot 0,117 = 0,0862, \text{ или } 8,62\%.$$

Следует обратить внимание на то, что риск портфеля, равный 0,4, меньше риска самой малорисковой ценной бумаги, риск которой равен 0,5. С другой стороны, доходность портфеля, равная 8,62% годовых, больше доходности самой малорисковой ценной бумаги, доходность которой равна 5% годовых. □

31.5. Рыночный портфель

Рыночный портфель формируется из всех рисковых ценных бумаг, существующих на рынке. Пропорция инвестиций в каждую ценную бумагу рынка равна доле этой бумаги в общей капитализации рынка. Состав рыночного портфеля является оптимальным. Зависимость ожидаемой доходности от стандартного отклонения $a_p(\sigma_p)$ такого портфеля так же, как и в предыдущем случае, имеет вид «пули» (рис. 31.6). При наличии в портфеле безрискового актива с доходностью a_o функция $a_p(\sigma_p)$ является отрезком прямой, соединяющей точку с координатой a_o, лежащую на оси ординат, и точку касания M (см. рис. 31.6). Точка M называется *рыночным портфелем* (*market portfolio*).

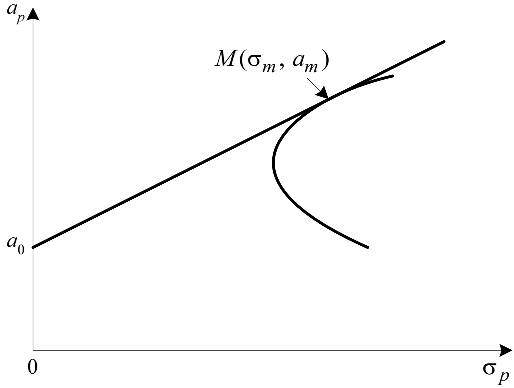


Рис. 31.6. Доходность—риск рыночного портфеля

Любой инвестор, формирующий оптимальный рыночный портфель, будет выбирать доходность и риск (стандартное отклонение) так, чтобы они лежали на этом отрезке. Прямая линия, проходящая через точки a_0 и M, называется *основной рыночной линией* (*Capital Market Line*, CML). Тангенс угла наклона этой прямой называется рыночной *ценой риска* и вычисляется по формуле

$$k = \frac{a_m - a_0}{\sigma_m}, \qquad \textbf{(31.41)}$$

где a_m — доходность рыночного портфеля.

Рыночный портфель определяется при равновесии на рынке. Равновесие на конкурентном финансовом рынке имеет место в том случае, если все его участники располагают одинаковой информацией и формируют на ее основе оптимальный портфель. При этом структура рисковой части оптимального портфеля (точка M на рис. 31.6) полностью определяется вероятностными характеристиками ценных бумаг и не зависит от склонности инвестора к риску.

При равновесии на финансовом рынке предложение рисковых и безрисковых ценных бумаг равно спросу. Если долговые обязательства корпораций не соответствуют спросу, то вступает в действие закон конкурентного рынка, т.е. цена бумаг, спрос на которые превышает предложение, будет расти, и наоборот (при этом эффективности первых будут расти, а вторых падать). На основании информации об этом каждый инвестор скорректирует структуру рисковой части своего портфеля. В результате на рынке устанавливается равновесие. В этом случае распределение на рынке рисковых ценных бумаг по видам будет близко к распределению ценных бумаг в оптимальном портфеле. Задачу о доле капитала, вкладываемого в безрисковую и рисковую части портфеля, каждый инвестор решает сам. Эта доля зависит от склонности инвестора к риску.

■ **Пример 31.14.** Основная рыночная линия имеет с осью стандартного отклонения угол 30°, доходность безрискового актива равна 8%, а доходность рыночного портфеля — 12%.

Определить рыночную цену риска и дисперсию рыночного портфеля.

Решение.

Рыночная цена риска $k = \mathrm{tg}30° = 0{,}57735$.

Из **(31.41)** находим риск рыночного портфеля:

$$\sigma_m = \frac{a_m - a_0}{k} = \frac{0{,}12 - 0{,}08}{0{,}57735} = 0{,}0693.$$

Отсюда $\sigma_m^2 = 0{,}0048$. □

Сформировать портфель из всех ценных бумаг рынка не представляется возможным. Поэтому при формировании рыночного портфеля используют те или другие индексы деловой активности. Ясно, что характеристики этих индексов всегда отличаются от характеристик рынка в целом. Тем не менее такое упрощение часто используется. В США в качестве такого индекса может быть использован индекс «Standard & Poor's 500», имеющий совокупность компаний, равную 500. В России можно использовать индекс Интерфакса (сводный), имеющий совокупность компаний, равную 65, или индекс РТС (Российской торговой системы) с совокупностью компаний, равной 24.

31.6. Оценка статистических характеристик ценных бумаг

В качестве ценных бумаг, из которых формируется оптимальный портфель, используются долгосрочные активы. Такими бумагами могут быть, например, акции, являющиеся ценными бессрочными бумагами.

Оценка математических ожиданий и ковариаций случайных доходностей ценных бумаг i-го и j-го типов можно определить по выборке. В качестве выборки применяют наблюдаемые во времени последовательности цен акций. При этом за рубежом используются 100 показателей динамического ряда с периодом между отчетами один квартал, т.е. берется выборка за 25 лет. В России фондовый рынок существует недавно, поэтому длительность выборки будет существенно меньше.

При расчете эффективности j-й ценной бумаги применяют соотношение

$$a_{j,t} = \frac{P_{j,t+1} - P_{j,t} + d_{j,t}}{P_{j,t}}, \qquad \textbf{(31.42)}$$

где $P_{j,t}$, $P_{j,t+1}$ — цена j-й ценной бумаги в начале периода t и $t+1$ соответственно; $d_{j,t}$ — дивиденд за период t.

Формула **(31.42)** может быть уточнена за счет учета разницы цен покупки и продажи ценных бумаг. Например, инвестор покупает в начале периода t ценную бумагу, затем получает дивиденды и продает ее в начале периода $t+1$. В этом случае под $P_{j,t}$ следует понимать цену покупки в начале периода *t*, а под $P_{j,t+1}$ — цену продажи в начале периода $t+1$. Цены покупки и продажи обычно отличаются. Для акций крупных компаний это отличие ниже, а для мелких — выше.

В качестве математического ожидания *j*-й ценной бумаги можно использовать среднее арифметическое

$$\bar{a}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_{j,t}, \tag{31.43}$$

где T — количество показаний динамического ряда; $a_{j,t}$ — доходность *j*-й ценной бумаги в *t*-м периоде.

Для расчета выборочной ковариации *i*-й и *j*-й ценных бумаг используется формула

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(a_{i,t} - \bar{a}_i\right)\cdot\left(a_{j,t} - \bar{a}_j\right). \tag{31.44}$$

В России фондовый рынок существует недавно. Поэтому при периоде между отчетами в один квартал количество таких отчетов будут невелико. В российских условиях при формировании оптимального портфеля период между отчетами лучше выбрать равным одному месяцу.

Из представленных данных по ценам ценных бумаг выбираются только целые месяцы. Количество месяцев по каждой акции должно быть идентичным. Если первый и последний месяцы не являются целыми, то эти данные отбрасываются. Ниже все сроки представляются в месяцах. Время жизни акции в месяцах обозначим буквой *N*.

Дисперсия, среднее квадратичное отклонение и коэффициент корреляции подчиняются соотношениям

$$\sigma_{jj} = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}\left(a_{j,t} - \bar{a}_j\right)^2; \quad \sigma_j = \sqrt{\sigma_{jj}}; \tag{31.45}$$

$$k = \frac{\sigma_{kj}}{\sigma_k \cdot \sigma_j}. \tag{31.46}$$

31.7. Эффективный рынок ценных бумаг

Рынок ценных бумаг является эффективным в том случае, если инвесторы располагают обширной и легкодоступной информацией и если вся эта информация уже отражена в ценах ценных бумаг. Понятие эффективного рынка разработано на основании трудов Мориса Кендалла [6], который в начале 1950-х гг. установил, что изменения цен на акции от периода к периоду не зависят друг от друга. До этого предполагалось, что цены на акции имеют регулярные циклы. Исследования показали, что, например, коэффициент корреляции между изменением цен любого дня и следующего за ним дня составляет сотые доли. Это указывает на незначительную тенденцию, например, к дальнейшему повышению цен вслед за первоначальным повышением. Независимое поведение цен следует ожидать только на конкурентном рынке.

Рассматривают т р и ф о р м ы эффективности рынка [6].

В первом случае нынешние цены акций отражают всю информацию о ценах в прошлом. Этот случай называется *слабой формой эффективности.*

Во втором случае нынешние цены акций отражают всю информацию о ценах в прошлом и всю опубликованную информацию. Этот случай называется *средней формой эффективности.*

В третьем случае нынешние цены акций отражают всю информацию о ценах в прошлом, всю опубликованную информацию, а также информацию, которая может быть получена в ходе фундаментального анализа отдельных предприятий и экономики в целом. Этот случай называется *сильной формой эффективности.*

В соответствии с гипотезой эффективности рынка невозможно составить точные прогнозы поведения цен. Высокая эффективность портфелей ценных бумаг одних фирм по сравнению с другими объясняется в соответствии с этой гипотезой не компетентностью менеджеров, а чистой случайностью.

На основании биржевого краха в США, начавшегося 17 октября 1987 г., разработано ш е с т ь у р о к о в эффективного рынка [6].

1. *У рынка нет памяти.* Это означает, что динамика цен в прошлом не несет никакой информации о будущих изменениях цен.

2. *Верь рыночным ценам.* На эффективном рынке цены содержат всю имеющуюся информацию о стоимости любой ценной бумаги. Для получения сверхприбылей надо знать больше, чем знают все.

3. *Никаких финансовых иллюзий.* Финансовые нововведения, например дробление акций, изменение учетной политики фирмы, на эффективном рынке не принесут дополнительных доходов.

4. *Альтернатива «сделай сам».* На эффективном рынке инвестор не станет платить за то, что он может сделать сам. Например, инвестор не намерен нести расходы за слияние компаний, объясняемое более высокой диверсификацией. Ему удобнее и дешевле диверсифицировать портфель за счет приобретения акций обеих компаний.

5. *Одна акция дает представление обо всех остальных.* Это означает, что акции должны быть почти совершенными заменителями друг друга.

6. *Зри в корень.* На эффективном рынке цены отражают всю имеющуюся информацию. Поэтому цены на ценные бумаги различных фирм могут многое сказать о будущем этих фирм.

В заключение заметим, что в определенном смысле теория эффективности рынка ценных бумаг вызывает больше вопросов, чем дает ответов. Однако эта теория служит, по крайней мере, стартовой точкой анализа для финансового менеджера.

Упражнения

ЗАДАЧИ

31.1. Даны два типа ценных бумаг с характеристиками: $a_1 = 0{,}12$; $a_2 = 0{,}2$; $\sigma_1^2 = 0{,}6$; $\sigma_2^2 = 0{,}9$; $\sigma_{12} = 0{,}2$.

Построить зависимость ожидаемой доходности портфеля от риска.

31.2. Даны два типа ценных бумаг с характеристиками: $a_1 = 0{,}15$; $a_2 = 0{,}3$; $\sigma_1^2 = 0{,}8$; $\sigma_2^2 = 1{,}2$; $\sigma_{12} = 0{,}3$.

Построить зависимость ожидаемой доходности портфеля от риска.

31.3. Даны три типа ценных бумаг, характеристики которых приведены в таблице. Уровни доходностей ценных бумаг некоррелированы.

j	1	2	3
a_j	0,09	0,16	0,22
σ_j^2	0,5	0,8	1,4

Определить зависимость состава оптимального портфеля от его ожидаемой доходности в матричной форме, включая точку для минимально возможной дисперсии, и построить график функции $a_p(\sigma_p)$ при оптимальном составе портфеля.

31.4. Даны четыре типа ценных бумаг, три из которых – рисковые, такие же, как и в задаче 31.3, и один тип — безрисковый. Характеристики ценных бумаг представлены в таблице.

j	0	1	2	3
a_j	0,06	0,09	0,16	0,22
σ_j^2	0	0,5	0,8	1,4

Доходности ценных бумаг некоррелированы. Определить и построить график функции ожидаемой доходности портфеля, состоящего из этих бумаг, от среднего квадратичного отклонения, а также доходность и состав портфеля инвестора при выборе им стандартного отклонения портфеля $\sigma_{p,u} = 0{,}25$.

Глава 32 СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ

Обычно процесс принятия инвестиционного решения проходит *пять этапов* [44]:

- разработка инвестиционной политики;
- проведение финансового анализа;
- формирование портфеля;
- пересмотр портфеля;
- оценка эффективности портфеля.

32.1. Разработка инвестиционной политики

Главной характеристикой, отличающей одного инвестора от другого, являются их *инвестиционные цели*, т.е. их отношение к риску и ожидаемой доходности. Определить это отношение конкретного инвестора инвестиционный менеджер, отвечающий за управление портфелем этого инвестора, может путем построения его кривой безразличия, или путем оценки уровня толерантности риска.

Кривая безразличия — это функция ожидаемой доходности a_p от стандартного отклонения σ_p. Понятие кривых безразличия рассмотрено в § 11.3. На рис. 11.2 представлен набор кривых безразличия некоторого инвестора. Все портфели, лежащие на одной из кривых безразличия, являются равноценными для данного инвестора, несмотря на то, что они имеют разные ожидаемые доходности и стандартные отклонения. Кривые безразличия не могут пересекаться.

Уровень толерантности риска — это наибольший риск, который инвестор готов принять для заданного увеличения ожидаемой доходности. При оценке толерантности риска инвестору могут быть предложены различные портфели ценных бумаг. Например, портфель, состоящий из безрисковых активов, из одного типа рискового актива или нескольких типов рисковых активов, а также рыночный портфель. При этом портфели из рисковых бумаг являются оптимальными в смысле Марковица (см. § 31.2 и 31.3).

32.2. Финансовый анализ и формирование портфеля

При управлении портфелем ценных бумаг используются пассивные и активные стратегии. До середины 1960-х гг. за рубежом использовалось активное управление портфелем, предполагающее поиск неверно оцененных рынком ценных бумаг. Активные менеджеры имеют собственные прогнозы риска и ожидаемых доходностей. Если эти прогнозы оправдываются, то сформированные этими менеджерами портфели приносят высокий доход.

После разработанной Марковицем теории оптимального портфеля широкое признание получило пассивное управление. При пассивном управлении формируются оптимальные рыночные портфели, получившие название рыночного фонда. При формировании портфеля пассивный менеджер пользуется основной рыночной линией (*Capital Market Line*, CML) и кривой безразличия данного инвестора (рис. 32.1).

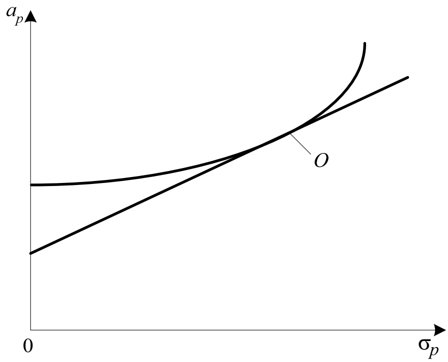


Рис. 32.1. Выбор оптимального портфеля инвестора

Оптимальное сочетание доходности и стандартного отклонения для данного инвестора дает точка *O*, являющаяся точкой касания кривой безразличия и основной рыночной линии.

При пассивном управлении портфель формируется на длительное время. Пересмотр портфеля происходит при изменениях предпочтений клиента, безрисковой ставки, рыночного портфеля.

При сравнении рыночного и активного портфелей используют термин «активные позиции», под которым понимается разность между удельным весом данной бумаги в активном портфеле и удельным весом той же бумаги в оптимальном портфеле.

■ **Пример 32.1.** Даны удельные веса оптимального и активного портфелей, состоящих из четырех видов одинаковых ценных бумаг.

Определить активные позиции по каждой ценной бумаге.

Таблица 32.1

Номер ценной бумаги (j)	*Удельный вес*		*Активная позиция*
	Активный портфель	*Оптимальной портфель*	
1	0,2	0,3	−0,1
2	0,25	0,25	0,0
3	0,1	0,2	−0,1
4	0,45	0,25	+0,2
Итого	**1,0**	**1,0**	**0,0**

Решение представлено в последнем столбце табл. 32.1.

Из сказанного следует, что эквивалентом активного портфеля являются оптимальной портфель и определенные предпочтения в пользу одних бумаг ($j = 4$) против других ($j = 1$ и $j = 3$). При этом отрицательные и положительные предпочтения должны компенсировать друг друга. □

При выборе ценных бумаг, из которых формируется портфель, используются различные методы.

Одноэтапный выбор ценных бумаг предусматривает выбор из всей совокупности доступных менеджеру бумаг и формирование из них оптимального портфеля по их доходностям, стандартным отклонениям и ковариациям. Схема одноэтапного выбора представлена на рис. 32.2.

Рис. 32.2. Одноэтапный выбор ценных бумаг

Двухэтапный выбор ценных бумаг предусматривает на первом этапе выбор из одного класса активов и формирование оптимального портфеля из этого класса, выбор из другого класса активов и формирование оптимального портфеля из этого класса. На втором этапе формируется общий портфель ценных бумаг из двух портфелей первого и второго классов активов (рис. 32.3).

Этот метод выбора ценных бумаг называют также *близоруким*, так как при формировании общего портфеля не учитываются ковариации между отдельными ценными бумагами первого и второго классов. Второй этап, на котором средства инвестора делятся между портфелями первого и второго классов, называется *размещением активов.* На этом этапе получают прогнозы оптимальных доходностей, стандартных отклонений и ковариации между двумя портфелями. Это позволяет определить состав общего портфеля по выбранной инвестором точке на зависимости доходности от стандартного отклонения этого портфеля. В качестве активов первого класса могут быть, например, акции, а второго класса — облигации.

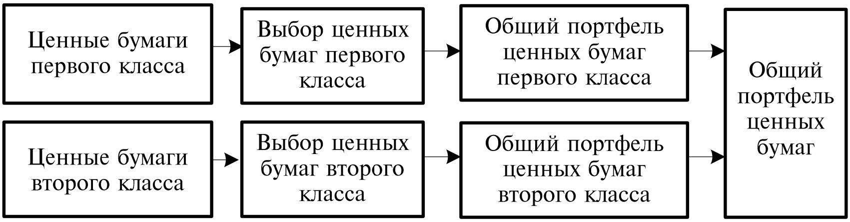


Рис. 32.3. Двухэтапный выбор ценных бумаг

■ **Пример 32.2.** Даны удельные веса оптимального портфеля, состоящего из трех акций (второй столбец табл. 32.2) и оптимального портфеля, состоящего из четырех облигаций (третий столбец табл. 32.2). При размещении активов на втором этапе было решено, что 40% средств инвестора направляется на приобретение акций, а 60% — на приобретение облигаций.

Определить удельные веса активов общего портфеля.

Решение.

Результаты вычислений представлены в четвертом и пятом столбцах табл. 32.2.

Таблица 32.2

Номер ценной бумаги	*Удельный вес каждого портфеля*		*Удельный вес общего портфеля*	
	Первый класс	*Второй класс*	*Первый класс*	*Второй класс*
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	0,35	0,2	$0{,}35 \cdot 0{,}4 = 0{,}14$	$0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$
2	0,25	0,3	$0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1$	$0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$
3	0,4	0,35	$0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$	$0{,}35 \cdot 0{,}6 = 0{,}21$
4		0,15		$0{,}15 \cdot 0{,}6 = 0{,}09$
Итого	**1,0**	**1,0**	**0,4**	**0,6**

Двухэтапный выбор ценных бумаг может быть расширен до многоэтапного, если вести несколько классов ценных бумаг. Активное или пассивное управление можно осуществлять на любом этапе.

Рассматривают стратегическое и тактическое размещение активов. *Стратегическим* называется размещение активов на основе долгосрочных прогнозов показателей ожидаемой доходности, дисперсии и ковариации. *Тактическим* называется размещение активов на основе краткосрочных прогнозов этих показателей, при этом размещение отслеживается в текущем времени.

Фиксацией рынка называется рассмотренный в § 31.5 (см. рис. 31.6) метод распределения средств между типичным рыночным портфелем (точка *M*) и безрисковыми активами (точка a_0).

Стили работы инвестиционных организаций подразделяются на несколько типов.

Стилем выбора бумаг называется активное управление портфелем при работе с отдельными активами.

Стилем размещения активов называется активное управление портфелем при работе с определенными классами активов, например фиксация рынка.

Стилем выбора групп бумаг называется активное управление портфелем, связанное с выбором определенных групп активов.

Некоторые организации применяют чистый инвестиционный стиль, используя один из трех перечисленных стилей, другие прибегают к различным комбинациям.

При международном инвестировании, как правило, вначале формируются оптимальные портфели для разных стран мира, а затем принимается решение о величине средств, инвестируемых в активы каждой из этих стран.

32.3. Пересмотр портфеля, свопы

При изменении во времени характеристик ценных бумаг портфель становится неоптимальным. Возникает необходимость пересмотра и обновления портфеля. Однако эта операция приводит к дополнительным трансакционным расходам, связанным с комиссионными брокера, потерями от изменения цен, разностью цен покупателя и продавца. Для того чтобы окупить эти расходы, цена бумаги должна вырасти. Поэтому при пересмотре портфеля рассматриваются затраты и выгоды. После сравнения этих величин менеджер принимает решение о замене одних бумаг и об отказе в замене других из-за высоких трансакционных расходов. Развитие компьютерной техники в настоящее время позволяет довольно быстро производить такой анализ.

Для снижения трансакционных издержек часто используются свопы. ***Своп*** — это контракт между противоположными сторонами, на основе которого эти стороны обмениваются денежными потоками в течение заданного периода времени.

32.3.1. СВОПЫ НА АКЦИИ

Пусть сторона *A* считает, что фондовый рынок в ближайшие годы пойдет вверх, а сторона *B* считает, что фондовый рынок в течение этого времени пойдет вниз. Поэтому сторона *A* рассматривает возможность продажи облигаций с постоянной доходностью на некоторую сумму и покупки на эту сумму обыкновенных акций, а сторона *B* хочет продать акции и купить облигации на эту же сумму. Однако обе стороны понимают, что такие изменения приведут к существенным трансакционным расходам. Поэтому они обращаются в банк, организующий свопы. Этот банк устраивает следующий контракт между сторонами *A* и *B*. По окончании каждого квартала сторона *A* должна выплатить стороне *B* сумму, равную квартальному доходу от облигаций, например 2% номинала (8% годовых). Сторона *B* должна выплатить стороне *A* сумму, равную доходности какого-то российского индекса, например индекса РТС, умноженной на номинал. В США часто используется, например, индекс S&P500. Стороны соглашаются с тем, что номинал контракта равен заданной сумме *S*, а контракт действует в течение n лет. Каждая из сторон уплачивает банку комиссионные, сумма которых существенно меньше трансакционных расходов от продажи и покупки соответствующих ценных бумаг. Эта сделка равноценна тому, что сторона *A* заменила облигации на сумму *S* акциями, а сторона *B* заменила акции на облигации на эту же сумму.

Таким образом, *свопом на акцию* называется контракт, по которому одна сторона соглашается уплатить другой сумму, величина которой изменяется пропорционально выбранному фондовому индексу, а вторая сторона выплачивает первой сумму, пропорциональную текущей процентной ставке, равной, например, доходности облигаций.

■ **Пример 32.3.** Стороны *M* и *N* используют своп на акции с контрактным номиналом 1 млрд руб. Пусть квартальная доходность индекса в течение года равна соответственно 6, 5, 7, 5%, а доходность от облигаций составляет 24% годовых.

Определить потоки платежей сторон *A* и *B* в течение этого года.

Решение в виде потоков платежей представлено в табл. 32.3.

Таблица 32.3

Номер квартала	*Доходность индекса, %*	*Денежные потоки стороны M, млн руб.*				*Денежные потоки стороны N, млн руб.*			
		Поступления по облигациям	*Поступления от стороны N*	*Платежи стороне N*	***Итого***	*Поступления по акциям*	*Поступления от стороны M*	*Платежи стороне M*	***Итого***
1	6	60	60	−60	**0**	60	60	−60	**0**
2	5	60	50	−60	**−10**	50	60	−50	**10**
3	7	60	70	−60	**10**	70	60	−70	**−10**
4	5	60	50	−60	**−10**	50	60	−50	**10**

Из табл. 32.3 следует, что сторона *A*, обладая облигациями, получает доход, который приносят акции, а сторона *B*, обладая акциями, получает доход, который приносят облигации. □

32.3.2. ПРОЦЕНТНЫЕ СВОПЫ

Пусть сторона *B* имеет краткосрочные ценные бумаги, доходность которых устанавливается с помощью представительной процентной ставки. Примером такой ставки является Лондонская процентная ставка предложения по межбанковским депозитам (LIBOR). Эта ставка устанавливается ежедневно в Лондоне и используется в кредитных операциях между крупными международными банками. Сторона *B* хочет заменить свои краткосрочные ценные бумаги, доходность которых определяется представительной процентной ставкой, на долгосрочные облигации с фиксированным доходом. Сторона *A* хочет заменить долгосрочные облигации на краткосрочные ценные бумаги. Для снижения трансакционных расходов стороны могут использовать процентный своп. При этом сторона *B* по окончании каждого квартала обязуется выплачивать стороне *A* сумму, равную некоторой представительной процентной ставке, умноженной на номинал, и получать от стороны *A* сумму, равную существующей на момент подписания контракта процентной ставке, умноженной на номинал. Сторона *A* по окончании каждого квартала обязуется выплачивать стороне *B* сумму, равную существующей на момент подписания контракта процентной ставке, умноженной на номинал, и получать от стороны *B* сумму, равную представительной процентной ставке, умноженной на номинал. Таким образом, сторона *B* как бы продала краткосрочные ценные бумаги и купила долгосрочные облигации, а сторона *A* продала облигации и купила ценные бумаги.

Из сказанного следует, что *процентным свопом* называется контракт, по которому одна сторона соглашается выплачивать другой сумму, величина которой изменяется пропорционально представительной процентной ставке, а вторая сторона выплачивает первой сумму, пропорциональную текущей процентной ставке.

■ **Пример 32.4.** Стороны *A* и *B* используют процентный своп с контрактным номиналом 100 млн руб., причем сторона *B* обладает краткосрочными ценными бумагами, а сторона *A* — долгосрочными облигациями. Пусть представительная квартальная ставка по кварталам равна соответственно 1,6; 1,8; 2; 2,2%. Доходность от текущей процентной ставки составляет 8% годовых.

Определить потоки платежей сторон *B* и *A* в течение года.

Решение в виде потоков платежей представлено в табл. 32.4.

Из табл. 32.4 следует, что сторона *A*, обладая долгосрочными облигациями, получает доход, который дают краткосрочные ценные бумаги, а сторона *B*, обладая краткосрочными ценными бумагами, получает доход, который приносят долгосрочные облигации.

Таблица 32.4

Номер квартала	Представительная ставка, %	*Денежные потоки стороны A,* млн руб.				*Денежные потоки стороны B,* млн руб.			
		Поступления по облигациям	*Поступления от стороны B*	*Платежи стороне B*	***Итого***	*Поступления по краткосрочным ценным бумагам*	*Поступления от стороны A*	*Платежи стороне A*	***Итого***
1	1,6	2	1,6	−2	**1,6**	1,6	2	−1,6	**2**
2	1,8	2	1,8	−2	**1,8**	1,8	2	−1,8	**2**
3	2,0	2	2,0	−2	**2,0**	2,0	2	−2,0	**2**
4	2,2	2	2,2	−2	**2,2**	2,2	2	—2,2	**2**

□

Организаторами свопов являются банки, которые сами нередко выступают стороной контракта. При этом они используют различные методы для хеджирования рынка, например, открывают фьючерсные позиции при взаимодействии с другими банками. В этом случае комиссионные с контракта не взимаются, так как банк организует своп на выгодных для него условиях, что позволяет ему получить прибыль после хеджирования своей позиции.

32.4. Измерение доходности портфеля

Оценка эффективности управления портфелем ценных бумаг позволяет определить качество управления инвестициями в прошлом и сделать вывод о мастерстве менеджера.

Эффективность управления портфелем обычно оценивается на временном интервале четыре года или более. Этот интервал разбивается на несколько периодов (обычно по месяцам или по кварталам). Доходность рассчитывается за каждый период.

Если клиент не вкладывает и не забирает деньги из портфеля на протяжении рассматриваемого периода, то доходность за этот период рассчитывается по формуле

$$a_{p,t} = \frac{S - P}{P}, \qquad \textbf{(32.1)}$$

где $a_{p,t}$ — доходность портфеля за рассматриваемый период t; S — стоимость портфеля в конце периода; P — стоимость портфеля в начале периода.

Рыночная стоимость ценных бумаг, входящих в портфель, определяется суммой

$$P = \sum_{j=1}^{J} P_j N_j. \tag{32.2}$$

Здесь P_j — стоимость одной ценной бумаги типа *j*; N_j —количество ценных бумаг типа *j*, находящихся в портфеле; *J* — количество типов ценных бумаг, находящихся в портфеле.

■ **Пример 32.5.** Портфель состоит из акций четырех типов, характеристика которых приведена в табл. 32.5.

Определить доходность портфеля.

Таблица 32.5

Тип акции	*Количество акций*	*Стоимость акции, руб.*	
		в начале периода	*в конце периода*
1	130	75	75,5
2	120	90	89
3	200	87	101,5
4	150	185	203

Решение.

Определяем стоимость портфеля в начале и конце периода по формуле **(32.2)**:

$$P = 75 \cdot 130 + 90 \cdot 120 + 87 \cdot 200 + 185 \cdot 150 = 65\ 700 \text{ руб.};$$

$$S = 75{,}5 \cdot 130 + 89 \cdot 120 + 101{,}5 \cdot 200 + 203 \cdot 150 = 71\ 245 \text{ руб.}$$

Доходность портфеля находится по формуле **(32.1)**:

$$a_{p,t} = \frac{71245 - 65700}{65700} = 0{,}0844, \text{ или } 8{,}44\%. \quad \square$$

При вложении или изъятии денег из портфеля в течение исследуемого периода для оценки эффективности используются внутренняя ставка доходности и доходность, взвешенная во времени. При анализе исследуемый период *t* разбивается на *L* отрезков времени. В конце каждого такого отрезка времени вкладывается или изымается (знак минус) сумма p_l, где $l = 1, 2, ..., L$ — номер отрезка. В этом случае в качестве меры эффективности работы с портфелем может быть использована внутренняя ставка доходности или доходность, взвешенная во времени.

Внутренняя ставка доходности за период l находится из уравнения, в котором стоимость портфеля в начале периода P и дисконтированная стоимость всех вложений p_l приравнивается дисконтированной стоимости портфеля S в конце периода, т.е.

$$P+\sum_{l=1}^{L}\frac{p_l}{(1+q_B)^l}=\frac{S}{(1+q_B)^L}, \qquad \textbf{(32.3)}$$

где q_B — внутренняя ставка доходности за период l; L — общее количество периодов.

За весь период t внутренняя ставка доходности определяется по формуле

$$a_{p,t}=\left(1+q_B\right)^L-1.$$

Доходность, взвешенная во времени, находится из доходностей за каждый отрезок времени исследуемого периода. Доходность за отрезок времени l рассчитывается по формуле

$$a_l=\frac{S_l-P_l}{P_l}, \qquad \textbf{(32.4)}$$

где a_l — доходность за отрезок времени l; P_l — стоимость портфеля в начале отрезка времени l после дополнительного вложения или изъятия; S_l — стоимость портфеля в конце отрезка времени l до дополнительного вложения или изъятия.

Доходность $a_{p,t}$, взвешенная во времени, за период t находится по формуле

$$1+a_{p,t}=\prod_{l=1}^{L}(1+a_l). \qquad \textbf{(32.5)}$$

Для определения годовой доходности портфеля i используется аналогичная формула

$$1+i=\prod_{k=1}^{K}\left(1+a_{p,k}\right), \qquad \textbf{(32.6)}$$

где K — количество периодов в году; k — номер исследуемого периода.

■ **Пример 32.6.** В начале квартала стоимость портфеля составила $P_н=10$ тыс. руб., а в конце квартала — $P_к=12{,}5$ тыс. руб. В конце первого месяца квартала стоимость портфеля $P_1=9{,}7$ тыс. руб. В этот момент в портфель были вложены ценные бумаги еще на $p_1=1$ тыс. руб. В конце второго месяца квартала стоимость портфеля $P_2=10{,}2$ тыс. руб. В этот момент в портфель были вложены ценные бумаги еще на $p_2=1{,}2$ тыс. руб.

Определить внутреннюю ставку доходности и доходность, взвешенную во времени, за квартал.

Решение.

Подставив данные примера в **(32.3)**, получим уравнение для месячной доходности:

$$10+\frac{1}{1+q_B}+\frac{1,2}{(1+q_B)^2}=\frac{12,5}{(1+q_B)^3}.$$

Введем замену $x=1+q_B$. Тогда это уравнение приобретет вид

$$10x^3+x^2+1,2x-12,5=0.$$

Решить это уравнение можно, например, методом Ньютона—Рафсона. Его решение:

$$x=1,009; \quad q_B=0,009.$$

Доходность за квартал

$$a_{p,t}=(1+0,009)^3-1=0,027, \text{ или } 2,7\%.$$

Для определения доходности, взвешенной во времени, определим доходности за первый, второй и третий месяцы квартала:

$$a_1=\frac{9,7-10}{10}=-0,03; \quad a_2=\frac{10,2-(9,7+1)}{9,7+1}=0,0467;$$

$$a_3=\frac{12,5-(10,2+1,2)}{10,2+1,2}=0,0965.$$

Доходность, взвешенная во времени,

$$a_{p,t}=(1-0,03)(1-0,0467)(1+0,0965)-1=0,014, \text{ или } 1,4\%.$$

Таким образом, внутренняя ставка доходности и доходность, взвешенная во времени, отличаются друг от друга. □

Качество управления портфелем оценивается путем сравнения с характеристиками эталонного портфеля, т.е. оценка эффективности управления портфелем должна проводиться не на абсолютной, а на относительной почве. Например, доходность портфеля за год составила 20%. Эту величину можно считать хорошей, если она превышает представительную процентную ставку за год, и неудовлетворительной, если она меньше этой ставки. Эталонный портфель должен отражать цели, преследуемые клиентом. Если целью клиента является получение максимальной прибыли при инвестировании в акции крупных предприятий, то в качестве эталонного портфеля может быть выбран индекс, рассчитываемый по совокупности крупных компаний, в число которых входят акции исследуемого портфеля. При этом исследуемый и эталонный портфели должны обладать одним и тем же уровнем риска.

При оценке риска портфеля используется систематический риск, измеряемый с помощью коэффициента бета портфеля, или общий риск портфеля, измеряемый с помощью стандартного отклонения доходности этого портфеля. Эти показатели описаны в главе 20. Авторы [44] рекомендуют использовать в качестве меры риска стандартное отклонение при наличии одного портфеля ценных бумаг у инвестора, а коэффициент бета — при наличии нескольких портфелей.

32.5. Коэффициенты «доходность–изменчивость» и «доходность–разброс»

Коэффициент «доходность—изменчивость» позволяет в системе координат «бета портфеля — доходность» определить по взаиморасположению апостериорной рыночной линии портфеля ценных бумаг SML и линии исследуемого портфеля эффективность управления этим портфелем (рис. 32.4).

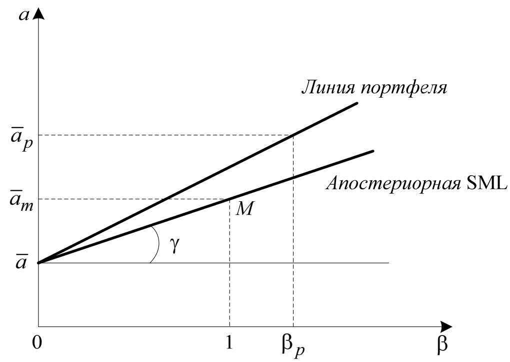


Рис. 32.4. Определение коэффициента «доходность—изменчивость»

На рис. 32.4 введены следующие обозначения: $\bar{a}_p$ — доходность исследуемого портфеля; β_p — коэффициент бета исследуемого портфеля; $\bar{a}$ — доходность безрискового актива; M — рыночный портфель; $\bar{a}_m$ — доходность рыночного портфеля; $\beta = 1$ — коэффициент бета рыночного портфеля.

Считают, что если линия портфеля лежит выше апостериорной, то управление эффективное, если ниже — управление малоэффективное. Для оценок используют тангенсы угла наклона этих двух прямых к оси β. Для исследуемого портфеля этот тангенс называется коэффициентом «доходность—изменчивость» (*reward-to-volatility ratio*, RVOL) и вычисляется по формуле

$$\mathrm{RVOL}_p = \frac{\overline{a}_p - \overline{a}}{\beta_p}. \qquad \textbf{(32.7)}$$

Как следует из рис. 32.4, тангенс угла наклона апостериорной SML определяется выражением

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \overline{a}_m - \overline{a}. \qquad \textbf{(32.8)}$$

Если $\mathrm{RVOL}_p > \mathrm{tg}\,\gamma,$ то линия портфеля идет выше апостериорной SML, т.е. управление портфелем является эффективным, и наоборот.

■ **Пример 32.7.** (*Продолжение примера 20.2.*)

Определить коэффициент «доходность—изменчивость» и сделать вывод об эффективности управления портфелем.

Решение.

Подставив в **(32.7)** и **(32.8)** значения из данных рис. 20.4, получим

$$\mathrm{RVOL}_p = \frac{3{,}93 - 2{,}23}{1{,}125} = 1{,}51;$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma = 4{,}88 - 2{,}23 = 2{,}65.$$

Так как $\mathrm{RVOL}_p < \mathrm{tg}\,\gamma,$ то управление портфелем малоэффективно. □

Коэффициент «доходность—разброс» (*reward-to-variability ratio*, RVAR) позволяет в системе координат «доходность — стандартное отклонение» определить эффективность управления портфелем по взаиморасположению апостериорной основной рыночной линии CML и линии исследуемого портфеля (рис. 32.5).

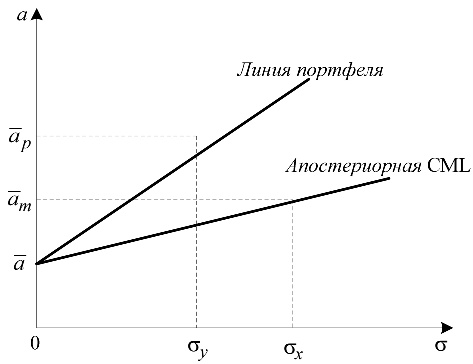


Рис. 32.5. Определение коэффициента «доходность—разброс»

Так же как и в предыдущем случае, сравниваются тангенсы углов наклона этих прямых:

$$\mathrm{RVAR}_p = \frac{\overline{a}_p - \overline{a}}{\sigma_y}; \tag{32.9}$$

$$k = \frac{\overline{a}_m - \overline{a}}{\sigma_x}. \tag{32.10}$$

Тангенс k называется *рыночной ценой риска*.

Если $\mathrm{RVAR}_p > k$, то линия портфеля идет выше апостериорной, т.е. управление портфелем эффективное, и наоборот.

■ **Пример 32.8.** (*Продолжение примеров 20.2 и 32.7.*)

Определить коэффициент «доходность—разброс» и сделать вывод об эффективности управления портфелем.

Решение.

Данные, полученные в примере 20.2, имеют следующие значения:

$$\overline{a} = 2,23; \quad \overline{a}_p = 3,93; \quad \overline{a}_m = 4,88; \quad \sigma_x = \sqrt{57,32} = 7,57;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{T}{T-1}\left[\overline{y_t^2} - \overline{y}^2\right]} = \sqrt{\frac{16}{15}\cdot\left(\frac{1330,54}{16} - 1,7^2\right)} = 9,25.$$

Подставим полученные значения в **(32.9)** и **(32.10)**:

$$\mathrm{RVAR}_p = \frac{3,93 - 2,23}{9,25} = 0,184;$$

$$k = \frac{4,88 - 2,23}{7,57} = 0,35.$$

Так как $\mathrm{RVAR}_p < k,$ то управление портфелем малоэффективно. □

В рассмотренных примерах все случаи показали малоэффективное управление портфелем. Однако возможна ситуация, когда показания коэффициентов «доходность—изменчивость» и «доходность—разброс» дадут противоречивые результаты. Поэтому обычно используется коэффициент «доходность—изменчивость» в случае, когда у инвестора много других финансовых активов. Если инвестор имеет мало других финансовых активов, то используется коэффициент «доходность—разброс» [44].

32.6. Выбор времени операции

Средняя за исследуемый период доходность портфеля $\overline{a}_p$ определяется выражением **(20.19)**, из которого следует, что доходность портфеля существенным образом зависит от произведения

$(\bar{a}_m - \bar{a})\beta$, где $(\bar{a}_m - \bar{a})$ — это разность между средней за исследуемый период доходностью рынка и средней за тот же период доходностью безрискового актива; β — бета портфеля. Поэтому если ожидается подъем рынка, т.е. разность $(\bar{a}_m - \bar{a})$ — величина положительная и большая, то менеджер формирует портфель с большим β. Если же ожидается спад рынка, т.е. разность $(\bar{a}_m - \bar{a})$ — величина маленькая или отрицательная, менеджер формирует портфель с малым β. Ясно, что при малом бета произведение $(\bar{a}_m - \bar{a})\beta$ слабо влияет на доходность портфеля.

Из сказанного следует, что менеджер, занимающийся выбором времени операции, прогнозирует интервалы времени с $\bar{a}_m - \bar{a} > 0$ и с $\bar{a}_m - \bar{a} < 0$ и в зависимости от этих прогнозов формирует портфель с бóльшим или меньшим β. При правильных прогнозах такой портфель будет более эффективен по сравнению с рыночным портфелем.

Упражнения

ЗАДАЧИ

32.1. Даны удельные веса оптимального портфеля, состоящего из четырех акций (второй столбец таблицы), и оптимального портфеля, состоящего из трех облигаций (третий столбец таблицы). При размещении активов на втором этапе было решено, что 70% средств инвестора направляется на приобретение акций, а 30% — на приобретение облигаций.

Номер ценной бумаги	*Удельный вес каждого портфеля*		*Удельный вес общего портфеля*	
	Первый класс	*Второй класс*	*Первый класс*	*Второй класс*
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	0,3	0,35		
2	0,25	0,4		
3	0,2	0,25		
4	0,25	—		
Итого	**1,0**	**1,0**		

Определить удельные веса активов общего портфеля.

32.2. Стороны A и B используют своп на акции с контрактным номиналом 100 млн руб. Пусть квартальная доходность индекса в течение первого года равна соответственно 3, 2, 1, 4%, а доходность от облигаций составляет 8% годовых. Определить потоки платежей сторон A и B в течение этого года.

32.3. Портфель состоит из акций трех типов, характеристика которых приведена в таблице.

Тип акции	*Количество акций*	*Стоимость акции,* руб.	
		в начале периода	в конце периода
1-й	120	90	89
2-й	200	87	101,5
3-й	150	185	203

Определить доходность портфеля.

32.4. В начале квартала стоимость портфеля $P_н = 10$ тыс. руб., а в конце — $P_к = 10,5$ тыс. руб. В середине квартала стоимость портфеля $P_1 = 9$ тыс. руб. В этот момент в портфель были вложены ценные бумаги еще на $p_1 = 1$ тыс. руб. Определить внутреннюю ставку доходности и доходность, взвешенную во времени.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Инновационный* менеджмент / Под ред. В.А. Аньшина, А.А. Дагаева. М.: ДЕЛО, 2003.
2. *Бланк И.А.* Финансовый менеджмент. Киев: Эльга, 2004.
3. *Бауэр Р.* и др. Управление инвестиционными проектами, опыт IBM. М.: ИНФРА-М, 1995.
4. *Бирман Г.*, *Шмидт С.* Капиталовложения, экономический анализ инвестиционных проектов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
5. *Блех Ю.*, *Гетце У.* Инвестиционные расчеты. Калининград: Янтарный сказ, 1997.
6. *Брейли Р.*, *Майерс С.* Принципы корпоративных финансов. М.: Олимп-бизнес, 1997.
7. *Буренин А.Н.* Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов. М.: 1-я Федеративная Книготорговая Компания, 1998.
8. *Бронштейн И.Н.*, *Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1986.
9. *Рынок* ценных бумаг / Под ред. В.А. Галанова, А.И. Басова. М.: Финансы и статистика, 2003.
10. *Биржевое* дело / Под ред. В.А. Галанова, А.И. Басова. М.: Финансы и статистика, 2003.
11. *Городничев П.Н.*, *Городничева К.П.* Финансовое и инвестиционное прогнозирование. М.: Экзамен, 2005.
12. *Риск-анализ* инвестиционного проекта / Под ред. М.В. Грачевой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
13. *Данилова А.* Индикаторы деловой активности в российской экономике // Рынок ценных бумаг. 1997. № 10.
14. *Демарк Т.Р.* Технический анализ — новая наука. М.: Диаграмма, 1997.
15. *Емцов Р.Г.*, *Лукин М.Ю.* Микроэкономика. М.: ДИС, 1997.
16. *Есипов В.* и др. Оценка бизнеса. М.: ПИТЕР, 2001.
17. *Замков О.О.* и др. Математические методы в экономике. М.: ДИС, 1998.
18. *Игошин Н.В.* Инвестиции. Организация, управление и финансирование. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
19. *Идрисов А.Б.* и др. Стратегическое планирование и анализ эффективности инвестиций. М.: ИИД «Филин», 1997.
20. *Ильин Н.И.* и др. Управление проектами. СПб.: РАО «Газпром», 1996.

21. *Кирин А.В.*, *Бакатин Д.В.*, *Хорошилова А.В.* Регулирование иностранных инвестиций в экономически развитых странах. М.: МГУ, 2001.
22. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
23. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.
24. *Кузнецов Б.Т.* Инвестиционное проектирование. М.: РЭА им. Г.В. Плеханова, 2003.
25. *Кузнецов Б.Т.* Математика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
26. *Кузнецов Б.Т.* Прогнозирование характеристик форвардных и фьючерсных контрактов: М.: РЭА им. Г.В. Плеханова, 1997.
27. *Кузнецов Б.Т.* Значение инвестиций в современной экономике // Дайджест финансы. 2002. № 6(90). Июнь.
28. *Кузнецов Б.Т.* Анализ стоимости инвестиционного проекта // Экономический анализ. 2003. № 8. Август.
29. *Кузнецов Б.Т.* Управление инвестициями. М.: Благовест-В, 2004.
30. *Кузнецов Б.Т.* Финансовая математика. М.: Экзамен, 2005.
31. *Кузнецов Б.Т.*, *Грачева Ю.А.* Влияние нарушения паритета цен на конверсию валюты // Внешняя торговля. 1999. № 4.
32. *Кузнецов Б.Т.*, *Лукьянова М.Н.* Выбор ставки дисконтирования для инвестиционного проекта при учете инфляции // Финансы и кредит. 2002. № 14(104). Июль.
33. *Исследование* операций в экономике / Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 1997.
34. *Крувшиц Л.* и др. Финансирование инвестиций. М.: ПИТЕР, 2003.
35. *Льюис К.Д.* Методы прогнозирования экономических показателей. М.: Финансы и статистика, 1986.
36. *Маренков Н.Л.* Основы управления инвестициями. М.: УРСС, 2003.
37. *Меньшиков И.С.* Финансовый анализ ценных бумаг: Курс лекций. М.: Финансы и статистика, 1998.
38. *Методические* рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов (Вторая редакция). М.: Экономика, 2000.
39. *О'Брайен Дж.*, *Шривастава С.* Финансовый анализ и торговля ценными бумагами. М.: Дело Лтд, 1995.
40. *Первозванский А.А.*, *Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. М.: ИНФРА-М, 1994.
41. *Тренев Н.Н.* Управление финансами. М.: Финансы и статистика, 2003.
42. *Чернов В.А.* Инвестиционная стратегия. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
43. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика. М.: Дело Лтд, 2003.
44. *Шарп У.Ф.*, *Александер Г. Дж.*, *Бэйли Д.В.* Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2003.
45. *Управление* инвестициями / Под ред. В.В. Шеремета. М.: Высшая школа, 1999.
46. *Фабоцци Ф.Дж.* Управление инвестициями. М.: ИНФРА-М, 2000.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава 1

Тест 1.1: А.
Тест 1.2: 2, 5, 6, 7, 8.
Тест 1.3: 2, 4, 6, 10.

Глава 2

2.1. Определим срок ссуды в годах:

$$n_a = \frac{138}{365} = 0,37808219 \text{ лет}; \quad n_б = \frac{138}{360} = 0,38333333 \text{ лет}.$$

При вычислении срока точность выбирается такой, чтобы обеспечить вычисление наращенной суммы с точностью до копеек.

Определим наращенные суммы:

$$S_a = 1\ 000\ 000 \cdot (1 + 0,37808219 \cdot 0,22) = 8665\ 424,8 \text{ руб.};$$

$$S_б = 1\ 000\ 000 \cdot (1 + 0,38333333 \cdot 0,22) = 8\ 674\ 666,4 \text{ руб.}$$

При прочих равных условиях $S_a < S_б$. Это связано с тем, что $K_a > K_б$, поэтому $n_a < n_б$. Таким образом, результат зависит от принятой методики.

2.2. $S = P(1+i)^n = 6000 \cdot (1+0,185)^4 = 11\ 831,09$ руб.

2.3. Результаты расчета приведены в таблице.

n, лет	*i* = 10%	*i* = 20%
5	0,621	0,402
10	0,386	0,162
20	0,149	0,026
50	0,00852	0,00011

2.4. $P = \dfrac{S}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}} = \dfrac{12\ 000}{\left(1+\dfrac{0,16}{4}\right)^{4\cdot 2,4}} = 8234,95$ руб.

2.5. Определим срок ссуды в годах:

$$n_a = \frac{85}{365} = 0,23287671 \text{ лет}; \quad n_б = \frac{131}{365} = 0,3589041 \text{ лет}.$$

Определим современные стоимости будущих платежей:

$$P_a = \frac{10\ 000}{1+0,23287671\cdot 0,225} = 950,21 \text{ руб.};$$

$$P_б = \frac{10\ 000}{1+0,3589041\cdot 0,225} = 925,28 \text{ руб.}$$

При прочих равных условиях $P_a > P_б$. Таким образом, более поздний платеж при прочих равных условиях имеет меньшую современную стоимость.

2.6. Цену облигации определяют по формуле

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{14\ 400}{(1+0,2)^2} = 10\ 000 \text{ руб.}$$

Дисконт

$$D = S - P = 14\ 400 - 10\ 000 = 4400 \text{ руб.}$$

В рассматриваемом случае дисконт является доходом инвестора. Таким образом, этот доход составит 4400 руб.

2.7. $P = S(1-d)^n = 20\ 000(1-0,18)^{1,8} = 13\ 992,49$ руб.;

$$D = S - P = 20\ 000 - 13\ 992,49 = 6007,51 \text{ руб.}$$

2.8. $n = \dfrac{\ln\dfrac{S}{P}}{\ln(1+i)} = \dfrac{\ln\dfrac{40\ 000}{24\ 000}}{\ln(1+0,18)} = 2,839653$ лет.

2.9. $\delta = \ln(1+a) = \ln(1+0,2) = 0,1823$, или 18,23%.

2.10. Определим индекс цен за три года:

$$I_p = (1+0,18)\cdot(1+0,12)\cdot(1+0,095) = 1,447152.$$

Обесцененные наращенные суммы:

$$C_a = P\frac{(1+i)^n}{I_p} = 95\ 000\cdot\frac{(1+0,16)^3}{1,447152} = 102\ 466,86 \text{ руб.};$$

$$C_б = P\frac{(1+i)^n}{I_p} = 95\ 000\cdot\frac{(1+0,11)^3}{1,447152} = 89\ 779,75 \text{ руб.}$$

При прочих равных условиях $C_a > C_б$. В варианте *а*) имел место реальный доход, в варианте *б*) — убытки.

2.11. Индекс цен за 0,5 года равен

$$I_p = 1 + H = 1 + 0,08 = 1,08.$$

Индекс курсов для каждого из вариантов составит

$$I_{k,1} = K_{1,1}/K_0 = 31,5/30 = 1,05;\quad I_{k,2} = 33/30 = 1,1;$$

$$I_{k,3} = 31,5/30 = 1,05;\quad I_{k,4} = 31,5/30 = 1,05.$$

Доходности для рассматриваемых случаев:

$$a_1 = \sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1 = \sqrt[0,5]{\frac{1,05}{1,08}} - 1 = -0,0548, \text{ или } -5,48\%;$$

$$a_2 = \sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1 = \sqrt[0,5]{\frac{1,1}{1,08}} - 1 = 0,0374, \text{ или } 3,74\%;$$

$$a_3 = (1+r)\sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1 = (1+0,02)\sqrt[0,5]{\frac{1,05}{1,08}} - 1 = -0,0359, \text{ или } -3,59\%;$$

$$a_4 = (1+r)\sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1 = (1+0,07)\sqrt[0,5]{\frac{1,05}{1,08}} - 1 = 0,0114, \text{ или } 1,14\%.$$

В вариантах *1* и *3* капитал обесценился, в вариантах *2* и *4* имело место реальное наращение капитала.

2.12. График платежей представлен на схеме.

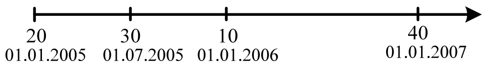


Схема выплат

Наращенная сумма вычисляется по формуле **(2.50)**:

$$S = \left(20 \cdot 1,15^2 + 30 \cdot 1,15^{1,5} + 10 \cdot 1,15 + 40\right) \cdot 1000 = 114\ 947,13 \text{ руб.}$$

Современная стоимость потока платежей определяется соотношением **(2.51)**:

$$A = \left(20 + \frac{30}{1,15^{0,5}} + \frac{10}{1,15} + \frac{40}{1,15^2}\right) \cdot 1000 = 86\ 916,54 \text{ руб.}$$

Этот же результат можно получить, используя формулу

$$A = \frac{114\ 947,13}{1,15^2} = 86\ 916,54 \text{ руб.}$$

2.13. Коэффициент наращения ренты находим по формуле

$$s_{mn;j/m}^{(p)} = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]} = \frac{\left(1+\frac{0,15}{12}\right)^{12\cdot 7} - 1}{4\left[\left(1+\frac{0,15}{12}\right)^{12/4} - 1\right]} = 12,10876.$$

Наращенная сумма $S = Rs_{mn;j/m}^{(p)} = 10\ 000 \cdot 12,10876 = 121\ 087,6$ руб.

Коэффициент приведения ренты находим по формуле

$$a_{mn;j/m}^{(p)}=\frac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}=\frac{1-\left(1+\dfrac{0,15}{12}\right)^{-12\cdot 7}}{4\left[\left(1+\dfrac{0,15}{12}\right)^{12/4}-1\right]}=4,264981.$$

Современная стоимость фонда

$$A=Ra_{mn;j/m}^{(p)}=10\ 000\cdot 4,264981=42\ 649,81\text{ руб.}$$

2.14. $S=10\ 000\cdot\dfrac{\left(1+\dfrac{0,15}{12}\right)^{12\cdot 7}-1}{0,15}=122\ 607,5\text{ руб.};$

$$A=10\ 000\cdot\frac{1-\left(1+\dfrac{0,15}{12}\right)^{-12\cdot 7}}{0,15}=43\ 185,15\text{ руб.}$$

2.15. Наращенная сумма ренты постнумерандо с такими же характеристиками определена в *задаче 2.13*:

$$S=121\ 087,6\text{ руб.}$$

Наращенная сумма исследуемой ренты

$$S_1=S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}=121\ 087,6\cdot\left(1+\frac{0,15}{12}\right)^{12/4}=125\ 685,38\text{ руб.}$$

Современная стоимость ренты постнумерандо с такими же характеристиками также определена в *задаче 2.13*:

$$A=42\ 649,81\text{ руб.}$$

Современная стоимость исследуемой ренты

$$A_1=A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}=42\ 649,81\left(1+\frac{0,15}{12}\right)^{12/4}=44\ 269,25\text{ руб.}$$

2.16. Наращенная сумма ренты постнумерандо с такими же характеристиками определена в *задаче 2.13*:

$$S=121\ 087,6\text{ руб.}$$

Наращенная сумма исследуемой ренты

$$S_{1/2}=S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2p}=121\ 087,6\left(1+\frac{0,15}{12}\right)^{12/8}=123\ 365,07\text{ руб.}$$

Современная стоимость ренты постнумерандо с такими же характеристиками определена в *примере 2.3*:

$$A = 42\ 649{,}81 \text{ руб.}$$

Современная стоимость исследуемой ренты

$$A_{1/2} = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2p} = 42\ 649{,}81\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{12/8} = 43\ 451{,}99 \text{ руб.}$$

2.17. Современная стоимость фонда определяется по формуле, которую перепишем в виде

$$_{t}A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-t}.$$

Подставив данные примера, получим

$$_{3}A = 10\ 000\cdot\frac{1-(1+0{,}15)^{-7}}{0{,}15}(1+0{,}15)^{-3} = 27\ 355{,}44 \text{ руб.}$$

Наращенная сумма фонда определяется по формуле для годовой ренты, т.е.

$$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i} = 10\ 000\cdot\frac{1{,}15^{7}-1}{0{,}15} = 110\ 667{,}99 \text{ руб.}$$

2.18. $A_{\infty} = \dfrac{24\ 000}{0{,}12} = 200\ 000$ руб.

2.19. Коэффициент наращения ренты при поквартальных выплатах и начислении процентов ежемесячно находится по формуле

$$s_{mn;j/m}^{(p)} = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]} = \frac{\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{12\cdot 7}-1}{4\left[\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{12/4}-1\right]} = 12{,}10876.$$

Коэффициент наращения ренты при поквартальных выплатах и начислении процентов раз в году ($m=1$) определяется формулой

$$S_{n;i}^{(p)} = \frac{(1+i)^{n}-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]} = \frac{(1+0{,}15)^{7}-1}{4\left[(1+0{,}15)^{1/4}-1\right]} = 11{,}67118.$$

Годовые выплаты при начислении процентов ежемесячно составят

$$R = \frac{S}{s_{mn;j/m}^{(p)}} = \frac{100\ 000}{12{,}10876} = 8258{,}48 \text{ руб.}$$

Годовые выплаты при начислении процентов раз в году

$$R = \frac{S}{s_{n;i}^{(p)}} = \frac{100\ 000}{11,67118} = 8568,11 \text{ руб.}$$

2.20. Полученная для срока формула для условий примера принимает вид

$$n = -\frac{\ln\left\{1 - \frac{A}{R} p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]\right\}}{\ln(1+i)} =$$

$$= -\frac{\ln\left\{1 - \frac{5\cdot 10^4}{10^4} 4\left[(1+0,15)^{1/4} - 1\right]\right\}}{\ln(1+0,15)} = -\frac{\ln 0,288838}{\ln 1,15} = 8,886 \text{ лет.}$$

Количество кварталов в полученном сроке составит $np = 8{,}886 \cdot 4 = 35{,}5$. Округляем полученное число до 35, т.е. количество лет ренты принимается равным 8,75. Уточненная величина ежеквартальной выплаты

$$\frac{R}{p} = A\frac{(1+i)^{1/p} - 1}{1-(1+i)^{-n_0}} = 50\ 000 \cdot \frac{1,15^{1/4} - 1}{1 - 1,15^{-8,75}} = 2519,6 \text{ руб.}$$

2.21. $R = 2{,}5 \cdot 4 = 10$ тыс. руб. $A/R = 5$. Положим $x_1 = 1{,}15$.

Первая итерация:

$$f(x_1) = \frac{A}{R} p x_1^{n+\frac{1}{p}} - \left(1 + \frac{A}{R}p\right)x_1^n + 1 = 5\cdot 4\cdot 1,15^{7,25} - (1+5\cdot 4)1,15^7 + 1 = 0,231683;$$

$$f'(x_1) = \left(n + \frac{1}{p}\right)\frac{A}{R} p x_1^{n+\frac{1}{p}-1} - n\left(1+\frac{A}{R}p\right)x_1^{n-1} =$$

$$= 7,25\cdot 5\cdot 4\cdot 1,15^{6,25} - 7(1+5\cdot 4)1,15^6 = 7,29983;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,15 - \frac{0,231683}{7,29983} = 1,1182619.$$

Вторая итерация:

$$f(x_2) = \frac{A}{R} p x_2^{n+\frac{1}{p}} - \left(1+\frac{A}{R}p\right)x_2^n + 1 = 0,052601;$$

$$f'(x_2) = \left(n+\frac{1}{p}\right)\frac{A}{R} p x_2^{n+\frac{1}{p}-1} - n\left(1+\frac{A}{R}p\right)x_2^{n-1} = 4,12418;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,1055076.$$

Третья итерация:

$$f\left(x_3\right)=\frac{A}{R}px_3^{\,n+\frac{1}{p}}-\left(1+\frac{A}{R}p\right)x_3^{\,n}+1=0,006846;$$

$$f'\left(x_2\right)=\left(n+\frac{1}{p}\right)\frac{A}{R}px_2^{\,n+\frac{1}{p}-1}-n\left(1+\frac{A}{R}p\right)x_2^{\,n-1}=3,07045;$$

$$x_4=x_3-\frac{f\left(x_3\right)}{f'\left(x_3\right)}=1,103278.$$

Принимаем $i=x-1=0,103278,$ или 10,3278%. Проведем проверку, используя формулу

$$\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{p\left[\left(1+i\right)^{1/p}-1\right]}=\frac{1-1,103278^{-7}}{4\cdot\left(1,103278^{1/4}-1\right)}=4,999.$$

Поскольку результаты практически совпали, так как $S/R=5$, то принимаем $i=10,3278\%\approx10,33\%.$

Коэффициент приведения ренты и ее современная стоимость для поквартальных выплат находят по формулам

$$a_{n;\delta}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\delta n}}{p\left(\mathrm{e}^{\delta/p}-1\right)}=\frac{1-\mathrm{e}^{-0,15\cdot7}}{4\cdot\left(\mathrm{e}^{0,15/4}-1\right)}=4,252998;$$

$$A=Ra_{n;\delta}^{(p)}=10\ 000\cdot4,252998=42\ 529,98\text{ руб.}$$

Для выплат один раз в году коэффициент приведения ренты и ее современная стоимость определяются по формулам

$$a_{n;\delta}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\delta n}}{\mathrm{e}^{\delta}-1}=\frac{1-\mathrm{e}^{-0,15\cdot7}}{\mathrm{e}^{0,15}-1}=4,016838;$$

$$A=Ra_{n;\delta}=10\ 000\cdot4,016838=40\ 168,38\text{ руб.}$$

2.22. Современная сумма определяется по формуле

$$P=S\cdot\mathrm{e}^{-\int_{b_1}^{b_2}\delta(t)dt}=10^6\cdot\mathrm{e}^{\int_0^3 0,1\cdot\mathrm{e}^{0,2\cdot t}dt}=10^6\cdot\mathrm{e}^{0,1\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^{0,2\cdot t}}{0,2}\right|_0^3}=$$

$$=10^6\cdot\mathrm{e}^{0,5\cdot\left(\mathrm{e}^{0,6}-1\right)}=1\ 508\ 415\text{ руб.}$$

$$A=Ra_{n;\delta}^{(p)};\quad a_{n;\delta}^{(p)}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\delta n}}{p\left(\mathrm{e}^{\delta/p}-1\right)}. \qquad \textbf{(2.71)}$$

2.23. Найдем коэффициент приведения ренты:

$$a_{n;\delta}^{(p)} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\delta\cdot n}}{p\left(\mathrm{e}^{\delta/p}-1\right)} = \frac{1-\mathrm{e}^{-0,12\cdot 5}}{12\left(\mathrm{e}^{\frac{0,12}{12}}-1\right)}.$$

Современная стоимость

$$A = Ra_{n;\delta}^{(p)} = 20\ 000\cdot 3,741135 = 74\ 822,7 \text{ руб.}$$

2.24. Среднегодовую доходность в виде силы роста вычисляем по формуле **(2.81)**:

$$\overline{\delta} = \frac{1}{4}\ln 3 = 0,27465.$$

Среднегодовую доходность в виде сложной процентной ставки вычисляют по второй формуле **(2.19)**:

$$a = \mathrm{e}^{0,27465} - 1 = 0,3161, \text{ или } 31,61\%.$$

Глава 3

Тест 3.1: 2, 4, 7.

Тест 3.2: 2, 5, 6, 7, 9, 12.

Глава 4

Тест 4.1: к формам финансирования относятся: 1, 3, 5, 7, 9, 10;
к источникам финансирования относятся: 2, 4, 6, 8.

4.1. Рентабельность инвестиций

$$U = \frac{9\ 000\ 000}{150\ 000} = 60.$$

Доходность инвестора

$$r = \left(\frac{9\ 000\ 000}{150\ 000}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0,9786, \text{ или } 97,86\%.$$

4.2. Годовой доход кредитора вычисляется по формуле

$$R = \frac{A-C}{a_{n;i}}.$$

Коэффициент приведения ренты

$$a_{6;10} = \frac{1-1,1^{-6}}{0,1} = 4,35526.$$

Годовой доход кредитора

$$R = \frac{10\ 000\ 000 - 9\ 000\ 000}{4,35526} = 2\ 089\ 427,5 \text{ руб.}$$

Доходность собственного капитала инвестора находят из решения уравнения

$$C = (P - R)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r},$$

где C — сумма собственного капитала; P — годовой доход от недвижимости; r — доходность собственного капитала инвестора; n — срок в годах.

Перепишем это уравнение с учетом исходных данных первого варианта:

$$\frac{900\ 000}{2300\ 000 - 2\ 089\ 427{,}5} = \frac{1-(1+r)^{-6}}{r}.$$

Решить это уравнение можно, например, методом Ньютона—Рафсона или графическим методом. Его решение равно

$$r = 5{,}47\%.$$

Для второго варианта уравнение приобретает вид

$$\frac{900\ 000}{2\ 400\ 000 - 2\ 089\ 427{,}5} = \frac{1-(1+r)^{-6}}{r}.$$

Его решение:

$$r = 21{,}45\%.$$

Доходность, очищенная от инфляции:
- для кредитора 12 − 8 = 4%;
- для собственного капитала первого варианта $5{,}47 - 8 = -2{,}53\%$;
- для собственного капитала второго варианта $21{,}45 - 8 = 13{,}45\%$.

Таким образом, чистая доходность кредитора составляет 4% годовых, чистые убытки собственного капитала в первом варианте условий равны $-2{,}53\%$ годовых, чистая доходность собственного капитала для второго варианта условий равна 13,45% годовых.

Глава 5

Тест 5.1: 2.

5.1. Для решения задачи надо использовать формулу **(5.3)**. Найдем из этой формулы выражение для расчета годового темпа прироста дивиденда:

$$h = \frac{r_{oa} \cdot P - d}{P + d}.$$

Подставив в эту формулу исходные данные, получим

$$h = \frac{0{,}2 \cdot 480 - 52}{480 + 52} = 0{,}0827, \text{ или } 8{,}27\%.$$

Тест 5.2: 1.

5.2. Определим стоимость товарного кредита. Для этих целей используем формулу **(5.12)**:

$$q = \left(\frac{205-200}{200} - \frac{205 \cdot 0{,}24}{200}\right) \cdot \frac{360}{60} = -1{,}326, \text{ или } -132{,}6\%.$$

Стоимость банковского кредита найдем по формуле **(5.14)**:

$$s = 20 - \frac{360}{60} \cdot 24 = -124\% \,.$$

Таким образом, товарный кредит при поставленных условиях оказался дешевле. Его и следует использовать при приобретении комплектующих изделий.

Глава 6

6.1. $B/A = 0,02$. Уравнение для $f(x)$ и ее производной принимает вид

$$f(x) = 0,98x^6 - 1,12x^5 - x + 1,14\,;$$

$$f'(x) = 5,88x^5 - 5,6x^4 - 1\,.$$

Принимаем $x_1 = 1,14$.

Первая итерация:

$$f(1,14) = 0,98 \cdot 1,14^6 - 1,12 \cdot 1,14^5 - 1,14 + 1,14 = -0,00539;$$

$$f'(1,14) = 5,88 \cdot 1,14^5 - 5,6 \cdot 1,14^4 - 1 = 0,86326;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,14 - \frac{-0,00539}{0,86326} = 1,146245.$$

Вторая итерация:

$$f(x_2) = 0,0003247; \quad f'(x_2) = 0,96782;$$

$$x_3 = 1,146245 - \frac{0,0003247}{0,96782} = 1,14591.$$

Принимаем полную доходность кредитора равной 14,59% годовых.

6.2. $B/A = 0,02$; $D = 0,98\dfrac{1-(1+0,14)^{-5}}{0,14} = 3,36442.$

Функция $f(x)$ и ее производная приобретают вид

$$f(x) = x^{-5} + 3,36442x - 4,36442;$$

$$f'(x) = -5x^{-6} + 3,36442.$$

Принимаем $x_1 = 1,14$.

Первая итерация:

$$f(1,14) = 1,14^{-5} + 3,36442 \cdot 1,14 - 4,36442 = -0,0096125;$$

$$f'(x) = -5 \cdot 1,14^{-6} + 3,36442 = 1,086487;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,14 - \frac{-0,0096125}{1,086487} = 1,148847.$$

Вторая итерация:

$$f(x_2) = 0{,}000461\ ;\ f'(x_2) = 1{,}1897\ ;$$

$$x_3 = 1{,}1897 - \frac{0{,}000461}{1{,}1897} = 1{,}14846.$$

Отсюда следует, что доходность кредитора равна 14,85% годовых.

6.3. Величина ежеквартальных выплат рассчитывается по формуле

$$r = \frac{P(1+ni)}{pn} = \frac{50\ 000(1+2\cdot 0{,}1)}{4\cdot 2} = 7500 \text{ руб.}$$

Для определения полной доходности кредитора найдем коэффициент

$$B = n/(1+ni) = 2/1{,}2 = 1{,}6666666667\ .$$

Подставив полученное значение в формулу для $f(x)$ и в ее производную, получим

$$f(x) = 7{,}6666666667 - 6{,}66666666667x^{1/4} - x^{-2}.$$

Эту задачу удобно решить графическим методом. Используя компьютерную программу Excel , построим график функции $f(x)$ и найдем координату точки пересечения этой функции с осью $0x$. Эта координата равна 1,18067. Доходность кредитора равна 18,067% годовых.

Проведем проверку, для чего в левую часть уравнения

$$\frac{1-(1+a)^{-n}}{p\left[(1+a)^{1/p}-1\right]} - \frac{n}{1+ni} = 0$$

подставим полученный результат:

$$\frac{1-(1+0{,}18067)^{-2}}{4\cdot\left[(1+0{,}18067)^{1/4}-1\right]} - \frac{2}{1+2\cdot 0{,}1} = 0{,}0000006.$$

В идеальном случае это значение должно быть равно нулю. Полученное значение слабо отличается от нуля. Поэтому расчет можно прекратить и принять полную доходность кредитора равной $a = 18{,}07\%$.

Как следует из рассмотренного примера, ставка кредита 10% существенно отличается от полной доходности кредитора. Это связано с тем, что ставка кредита назначается на всю сумму первоначального долга, а долг последовательно уменьшается по мере выплат. Таким образом, потребителя заставляют платить за кредит, которым он не пользовался.

Глава 7

7.1. Стоимость кредита при выплате основного долга из чистой прибыли рассчитывается по формуле

$$r = 0{,}24\cdot(1-0{,}24) = 0{,}1824, \text{ или } 18{,}24\%.$$

При выплате основного долга из налогооблагаемой прибыли стоимость кредита определяется из уравнения

$$\frac{1-0,76\cdot\left(\left(1+r\right)^{-4}\right)}{1-\left(1+r\right)^{-4}}r-0,1824=0.$$

Решение этого уравнения: $r\approx 0,1106$. Принимаем стоимость кредита равной 11,06% годовых.

7.2. Стоимость кредита без учета амортизационных выплат рассчитывается по формуле

$$r=0,15\cdot\left(1-0,24\right)=0,114,\ \text{или } 11,4\%.$$

При учете амортизационных выплат стоимость кредита определяется из уравнения

$$1+\frac{0,24}{20\cdot 0,15}\cdot\frac{1-\left(1+0,15\right)^{-20}}{1-\left(1+r\right)^{-4}}=\frac{0,15}{r}\left(1-0,24\right).$$

Перепишем это уравнение в виде

$$1+\frac{0,075112}{1-\left(1+r\right)^{-4}}-\frac{0,114}{r}=0.$$

Решение этого уравнения: $r\approx 0,0908$. Принимаем стоимость кредита равной 9,08% годовых.

Таким образом, стоимость кредита при учете амортизационных отчислений по рассматриваемой финансовой операции уменьшилась более чем на 2%.

7.3. Стоимость кредита рассчитывается по формуле

$$r_1=\left(1+0,1\right)\cdot\left(1-0,24+\frac{0,24}{\left(1+0,1\right)^3}\right)^{1/3}-1=0,0777,\ \text{ или } 7,77\%;$$

$$r_2=\left(1+0,1\right)\cdot\left(1-0,24+\frac{0,24}{\left(1+0,1\right)^8}\right)^{1/8}-1=0,0813,\ \text{ или } 8,13\%.$$

Стоимость кредита увеличивается при увеличении его срока.

7.4. Стоимость кредита рассчитывается по формулам

$$r_1=\left(1+0,12\right)\cdot\left(1-0,24\right)^{1/3}-1=0,0221,\ \text{ или } 2,21\%;$$

$$r_2=\left(1+0,12\right)\cdot\left(1-0,24\right)^{1/8}-1=0,0822,\ \text{ или } 8,22\%.$$

Стоимость кредита при увеличении срока увеличивается.

7.5. Стоимость кредита, у которого из налогооблагаемой прибыли выплачиваются только проценты, рассчитывается по формуле **(6.1)**:

$$r=a\left(1-g\right)=0,1\left(1-0,34\right)=0,066,\ \text{ или } 6,6\%.$$

Для расчета стоимости кредита с четырехлетним сроком используем метод Ньютона—Рафсона. В качестве функции $f(r)$ имеем формулу

$$f(r)=\frac{1-(1+a)^{-n}}{a(1-g)}-\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

Производная от этой функции имеет вид

$$f'(r)=-\frac{nr(1+r)^{-n-1}-1+(1+r)^{-n}}{r^2}.$$

Найдем предварительно коэффициент:

$$\frac{1-(1+a)^{-n}}{a(1-g)}=\frac{1-1,1^{-4}}{0,1(1-0,34)}=4,80282643.$$

Положим $r_1=-0,06$.

Первая итерация:

$$f(r_1)=4,802826434-\frac{1-0,94^{-4}}{-0,06}=0,1224692548;$$

$$f'(r_1)=-\frac{-4\cdot 0,06\cdot 0,94^{-5}-1+0,94^{-4}}{0,06^2}=12,83244636;$$

$$r_2=r_{\text{КР},1}-\frac{f(r_1)}{f'(r_1)}=-0,06-\frac{0,1224692548}{12,83244636}=-0,0695437184\cdot$$

Вторая итерация:

$$f(r_2)=-0,0025705823;\; f'(r_2)=13,37604366;$$

$$r_3=r_2-\frac{f(r_2)}{f'(r_2)}=-0,06935154.$$

Третья итерация:

$$f(r_3)=-0,00000108018;\; f'(r_3)=13,3648043;$$

$$r_4=r_3-\frac{f(r_3)}{f'(r_3)}=-0,069351459.$$

Проведем проверку, подставив r_4 в **(6.3)**:

$$\frac{a_{n;a}}{(1-g)}-a_{n;r}=4,802826434-\frac{1-(1+r_4)^{-4}}{r_4}=-0,000000007.$$

Так как это значение мало, то вычисления можно прекратить и принять стоимость кредита равной $r=-6,94\%$. Эта стоимость, во-первых, существенно меньше стоимости кредита, у которого из налогооблагаемой прибыли выплачиваются только проценты (для нашего случая 6,6%), во-вторых, она является отрицательной величиной, т.е. должник будет получать проценты.

Глава 8

8.1. Найдем ежемесячную выплату:

$$a_{n;i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]} = \frac{1-1{,}18^{-5}}{12\left(1{,}18^{1/12}-1\right)} = 3{,}377456;$$

$$P - S(1+i)^{-n} = 100\ 000 - 20\ 000 \cdot 1{,}18^{-5} = 91\ 257{,}82 \text{ руб.};$$

$$M = \frac{P-S(1+i)^{-n}}{pa_{n;i}^{(p)}} = \frac{91\ 257{,}82}{12 \cdot 3{,}377456} = 2251{,}64 \text{ руб.}$$

Сопоставив полученный результат с результатами *примера 8.1*, видим, что увеличение числа выплат в году приводит к увеличению коэффициента приведения ренты.

8.2. Для решения используется метод Ньютона—Рафсона. Предварительно определим

$$\frac{P}{R}p = \frac{120}{4 \cdot 12} \cdot 12 = 30.$$

Формулу для $f(x)$ и ее производной перепишем в виде

$$f(x) = \frac{P}{R}px^{n+\frac{1}{p}} - \left(1+\frac{P}{R}p\right)x^n + 1;$$

$$f'(x) = \left(n+\frac{1}{p}\right)\frac{P}{R}px^{n+\frac{1}{p}-1} - n\left(1+\frac{P}{R}p\right)x^{n-1}.$$

Положим $x_1 = 1{,}4$.

Первая итерация:

$$f(x_1) = 30 \cdot 1{,}4^{61/12} - 31 \cdot 1{,}4^5 + 1 = 0{,}209854;$$

$$f'(x_1) = \frac{61 \cdot 30}{12} \cdot 1{,}4^{49/12} - 5 \cdot 31 \cdot 1{,}4^4 = 7{,}055151;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}4 - \frac{0{,}209854}{7{,}055151} = 1{,}370552.$$

Вторая итерация:

$$f(x_2) = 0{,}0238148;\ f'(x_2) = 5{,}485806;\ x_3 = 1{,}365914.$$

Третья итерация:

$$f(x_3) = 0{,}0004643;\ f'(x_3) = 5{,}272531;\ x_4 = 1{,}365826.$$

Принимаем $q = x - 1 = 0{,}365826$, или $36{,}5826\%$.

Таким образом, доходность лизингодателя составит 36,58% годовых.

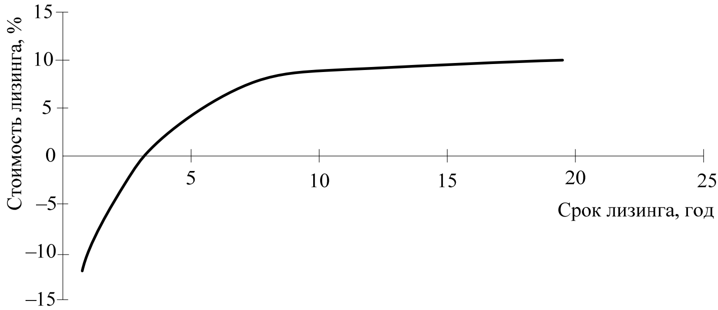
8.3. Построим таблицу зависимостей стоимости лизинга от его срока. Для определения стоимости лизинга используется уравнение

$$\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}-\frac{1-1{,}15^{-n}}{0{,}76\cdot 0{,}15}=0.$$

Стоимость лизинга в зависимости от срока представлена в таблице.

Срок, год	1	2	3	5	10	20
Стоимость, %	—12,6	—4,4	0	4,3	8,4	10,5

График исследуемой функции показан на рисунке.



Из таблицы и из графика следует, что стоимость лизинга растет с увеличением срока.

8.4. 1) $r=9\%$. Поскольку платежи по лизингу выплачиваются из налогооблагаемой прибыли, то это соответствует выплатам из чистой прибыли, рассчитанной по формуле

$$K_t=k_t\cdot(1-0{,}24),$$

где K_t — эквивалентная разовая выплата из чистой прибыли в году под номером *t*; k_t — разовая выплата из налогооблагаемой прибыли в году под номером *t*.

Современная стоимость всех выплат по лизингу определяется суммой

$$A_л=\sum_{t=1}^{n}\frac{K_t}{(1+i)^t}=\left(\frac{32\ 000}{1{,}14}+\frac{36\ 000}{1{,}14^2}+\frac{40\ 000}{1{,}14^3}+\frac{44\ 000}{1{,}14^4}+\frac{46\ 000}{1{,}14^5}+\frac{52\ 000}{1{,}14^6}\right)\times$$

$$\times\ (1-0{,}24)=118\ \ 866{,}17 \text{ руб.}$$

Для определения современной стоимости платежей за кредит воспользуемся формулой

$$A_{\text{К}}=\frac{180\ 000-40\ 000}{(1+0{,}14)^6}\cdot\left(\frac{0{,}09}{0{,}14}(1-0{,}24)\left((1+0{,}14)^6-1\right)+1\right)-$$

$$-\frac{180\ 000\cdot 0{,}24}{30}\cdot\frac{1-(1+0{,}14)^{-30}}{0{,}14}=101\ 020-10\ 083{,}84=90\ 936{,}16 \text{ руб.}$$

Современная стоимость покупки оборудования A_{Π} равна

$$A_{\Pi} = 90\ 936{,}16 + 40\ 000 = 130\ 936{,}16 \text{ руб.}$$

Таким образом, лизинг при заданных условиях обойдется дешевле.

2) $r = 2\%$.

$$A_{K} = \frac{180\ 000 - 40\ 000}{(1+0{,}14)^6} \cdot \left(\frac{0{,}02}{0{,}14}(1-0{,}24)\left((1+0{,}14)^6 - 1\right) + 1 \right) -$$

$$- \frac{180\ 000 \cdot 0{,}24}{30} \cdot \frac{1-(1+0{,}14)^{-30}}{0{,}14} = 72\ 057{,}2 - 10\ 083{,}84 = 61\ 973{,}36 \text{ руб.}$$

Таким образом, современная стоимость покупки оборудования

$$A_{\Pi} = 61\ 973{,}36 + 40\ 000 = 101\ 973{,}36 \text{ руб.}$$

Лизинг при заданных условиях обойдется дороже.

Глава 9

9.1. Налогооблагаемая база для обычной и ускоренной амортизации составит:

1) $C_1 = 12\ 000 - 8000 \cdot 0{,}05 = 11\ 600$ тыс. руб.;

2) $C_2 = 12\ 000 - 8000 \cdot 0{,}1 = 11\ 200$ тыс. руб.

Чистая прибыль после выплаты налога на прибыль:

1) $\Pi_1 = C_1(1-g) = 11\ 600\,(1-0{,}24) = 8816$ тыс. руб.;

2) $\Pi_2 = C_2(1-g) = 11\ 200\,(1-0{,}24) = 8512$ тыс. руб.

Здесь g — ставка налога на прибыль.

Прирост собственного капитала составил:

1) $B_1 = \Pi_1 + A_1 = 8816 + 400 = 9216$ тыс. руб.;

2) $B_2 = \Pi_2 + A_2 = 8512 + 800 = 9312$ тыс. руб.

Таким образом, при ускоренной амортизации прирост собственного капитала выше.

9.2. Капитал предприятия составляет

$$A = M_{CT} \cdot N_{CT} = 250 \cdot 100 = 25\ 000 \text{ тыс. руб.}$$

Доля стоимости предприятия, выплаченная в виде дивидендов,

$$k = \frac{5000}{25\ 000} = 0{,}2.$$

Новая стоимость акции

$$M_{HOB} = 250 \cdot (1-0{,}2) = 200 \text{ руб.}$$

Количество вновь выпущенных акций

$$N_{HOB} = \frac{0{,}2}{1-0{,}2} \cdot 100 = 25 \text{ тыс. шт.}$$

Общее количество акций предприятия после выпуска новых акций равно

$$N = 100 + 25 = 125 \text{ тыс. акций.}$$

Таким образом, новая стоимость акции после эмиссии равна 200 руб., т.е. уменьшилась на 50 руб. по сравнению со старой стоимостью, а общее количество акций равно 125 тыс. шт.

9.3. Вариант *а*. Как и в *примере 9.4*

$$\delta = 0,228947368421.$$

Оптимальное значение доли заемного капитала определим по формуле **(9.19)**:

$$\gamma_2 = 1 - \sqrt{1 - \frac{\delta}{b}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{0,228947368421}{0,26}} = 0,65440891449.$$

Собственный капитал равен $\Pi_c = (1-\gamma) \cdot k = 0,3455910855 \cdot k$. Так как $\Pi_c = 100$ млн руб., то суммарный капитал $k =$ 289 359 315,66 руб.

Заемный капитал равен

$$\Pi_k = \gamma \cdot k = 0,654400891449 \cdot 289\ 359\ 315,66 = 189\ 359\ 315,66 \text{ руб.}$$

Стоимость заемного капитала находим по формуле **(9.12)**:

$$r_{opt} = r_0 + b\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\delta}{b}}\right) = 0,1 + 0,26 \cdot 0,65440891449 = 0,2701463177.$$

Оптимальная норма прибыли на собственный капитал определяется соотношением **(9.21)**:

$$i_0 = \frac{1}{I_p}\left(a + b(1-g)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\delta}{b}}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{0,25 + 0,26 \cdot (1 - 0,24) \cdot 0,65440891449^2}{1 + 0,3} = 0,25740185.$$

Вариант *б*. По формуле **(9.16)** находим

$$\delta = a - r_0 = 0,25 - 0,1 = 0,15.$$

Оптимальное значение доли заемного капитала

$$\gamma_2 = 1 - \sqrt{1 - \frac{\delta}{b}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{0,15}{0,26}} = 0,34955636441.$$

Собственный капитал равен $\Pi_c = (1-\gamma) \cdot k = 0,65044363559 \cdot k$. Так как $\Pi_c = 100$ млн руб., то суммарный капитал $k =$ 153 741 222,96 руб.

Заемный капитал равен

$$\Pi_k = \gamma \cdot k = 0,34955636441 \cdot 153\ 741\ 222,96 = 53\ 741\ 222,96 \text{ руб.}$$

Стоимость заемного капитала

$$r_{\text{opt}} = r_0 + b\left(1-\sqrt{1-\frac{\delta}{b}}\right) = 0,1+0,26\cdot 0,349556364 = 0,19088.$$

Оптимальная норма прибыли на собственный капитал

$$i_0 = \frac{1}{I_p}\left(a+b\left(1-\sqrt{1-\frac{\delta}{b}}\right)^2\right) = \frac{0,25+0,26\cdot 0,349556364^2}{1,3} = 0,2167456.$$

Как и следовало ожидать, в *варианте а* оптимальная норма прибыли на собственный капитал больше, чем в *варианте б*.

9.4. Стоимость акционерного капитала до новой эмиссии акций равна

$$r_{OA} = \frac{18(1+0,08)}{120} + 0,08 = 0,242, \text{ или } 24,2\%.$$

Затраты на осуществление эмиссии для АО составят (см. § 5.2)

$$g = \frac{120-108}{120} = 0,1.$$

Стоимость вновь привлекаемого капитала для АО равна

$$r_{нк} = \frac{0,242-0,08\cdot 0,1}{1-0,1} = 0,26, \text{ или } 26\%.$$

Средневзвешенная стоимость капитала будет равна

$$\bar{r} = \frac{100}{175}\cdot 0,242 + \frac{50}{175}\cdot 0,145 + \frac{25}{175}\cdot 0,26 = 0,2169, \text{ или } 21,69\%.$$

Таким образом, средневзвешенная стоимость всего капитала равна 21,69% годовых.

Глава 10

Тест 10.1: 2, 4, 5, 7.

Тест 10.2: 3, 4, 5.

Тест 10.3: 2.

Глава 11

11.1. Норму замены потребления в начале года потреблением в конце года находят из соотношения **(11.7)**:

$$-\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Bigg/\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{0,5y^{0,5}}{x^{0,5}}\Bigg/\frac{0,5x^{0,5}}{y^{0,5}} = \frac{y}{x} = \frac{180}{120} = 1,5.$$

При уменьшении потребления в начале года на 5 единиц потребление в конце года возрастет на 7,5 единицы. Действительно,

$$\Delta y = -1,5\cdot(-5) = 7,5\,.$$

По формуле **(11.12)** находим

$$1,5 = 1 + r \text{ , или } r = 50\% .$$

11.2. Как показано выше, эту задачу математического программирования можно заменить задачей на условный экстремум:

$$x^{\alpha} y^{\alpha} \to \max$$

при условиях

$$g(x, y) = x + \frac{y}{1+r} - I = 0; \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot y^{\alpha}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \alpha \cdot x \cdot y^{\alpha-1}$, то

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Bigg/ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot y^{\alpha}}{\alpha \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\alpha-1}} = \frac{y}{x}.$$

Тогда система уравнений **(11.10)** и **(11.11)** для укороченной подозрительной точки функции Лагранжа приобретает вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y^0}{x^0} = 1 + r; \\ &x^0 + \frac{y^0}{1+r} = I. \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда находим, что $y^0 = x^0 (1+r)$, а $x^0 = \dfrac{y^0}{1+r} = \dfrac{I}{2}$, т.е. оптимальное потребление инвестора в конце и в начале периода составляет половину его общего дохода.

Глава 12

Тест 12.1: 3, 4, 5, 9.

12.1.
$$\text{NPV}_1 = \frac{40}{1,15} + \frac{40}{1,15^2} + \frac{40}{1,15^3} + \frac{40}{1,15^4} - 118 = -3,8;$$

$$\text{NPV}_2 = \frac{60}{1,15} + \frac{50}{1,15^2} + \frac{40}{1,15^3} + \frac{15}{1,15^4} - 118 = 6,86.$$

Так как у первого проекта чистый приведенный доход отрицателен, т.е. доходы не окупят стоимости капитала, то проект не может быть принят. Принимается второй проект.

Найдем рентабельность проектов:

$$\text{PI}_1 = \left(\frac{40}{1,15} + \frac{40}{1,15^2} + \frac{40}{1,15^3} + \frac{40}{1,15^4} \right) \Bigg/ 118 = 0,968;$$

$$\text{PI}_1 = \left(\frac{60}{1,15} + \frac{50}{1,15^2} + \frac{40}{1,15^3} + \frac{15}{1,15^4} \right) \Bigg/ 118 = 1,06.$$

Исходные уравнения для определения внутренней нормы доходности соответственно для первого и второго проектов имеют вид

$$\frac{40}{(1+Q)}+\frac{40}{(1+Q)^2}+\frac{40}{(1+Q)^3}+\frac{40}{(1+Q)^4}-118=0;$$

$$\frac{60}{(1+Q)}+\frac{50}{(1+Q)^2}+\frac{40}{(1+Q)^3}+\frac{15}{(1+Q)^4}-118=0.$$

Для решения этих уравнений воспользуемся методом Ньютона—Рафсона. В качестве искомых функций принимаем

$$f(Q)=\frac{40}{(1+Q)}+\frac{40}{(1+Q)^2}+\frac{40}{(1+Q)^3}+\frac{40}{(1+Q)^4}-118;$$

$$f(Q)=\frac{60}{(1+Q)}+\frac{50}{(1+Q)^2}+\frac{40}{(1+Q)^3}+\frac{15}{(1+Q)^4}-118.$$

Производные этих функций:

$$f'(Q)=-\frac{40}{(1+Q)^2}-\frac{80}{(1+Q)^3}+\frac{120}{(1+Q)^4}+\frac{160}{(1+Q)^5};$$

$$f'(Q)=-\frac{60}{(1+Q)^2}-\frac{100}{(1+Q)^3}-\frac{120}{(1+Q)^4}-\frac{60}{(1+Q)^5}.$$

Положим $Q_1=0{,}15$.

▶ Решим первое уравнение.

Первая итерация:

$$f(0{,}15)=\frac{40}{(1+0{,}15)}+\frac{40}{(1+0{,}15)^2}+\frac{40}{(1+0{,}15)^3}+\frac{40}{(1+0{,}15)^4}-118=-3{,}8008655;$$

$$f'(0{,}15)=-\frac{40}{(1+0{,}15)^2}-\frac{80}{(1+0{,}15)^3}+\frac{120}{(1+0{,}15)^4}+\frac{160}{(1+0{,}15)^5}=-231{,}0057;$$

$$Q_2=0{,}15-\frac{-3{,}8008655}{-231{,}0057}=0{,}133564\cdot$$

Вторая итерация:

$$f(Q_2)=0{,}107458;\quad f'(Q_2)=-244{,}2285;\quad Q_3=0{,}133986\,.$$

Третья итерация:

$$f(Q_3)=0{,}0000806;\quad f'(Q_3)=-243{,}8621;\quad Q_4=0{,}133987\,.$$

Внутренняя норма доходности первого проекта равна $Q=13{,}4\%$.

▶ Решим второе уравнение.

Первая итерация:

$$f(Q)=\frac{60}{(1+0{,}15)}+\frac{50}{(1+0{,}15)^2}+\frac{40}{(1+0{,}15)^3}+\frac{15}{(1+0{,}15)^4}-118=6{,}85804444;$$

$$f'(Q) = -\frac{60}{(1+0{,}15)^2} - \frac{100}{(1+0{,}15)^3} - \frac{120}{(1+0{,}15)^4} - \frac{60}{(1+0{,}15)^5} = -209{,}56124;$$

$$Q_2 = 0{,}182726\,.$$

Вторая итерация:

$f(Q_2) = 0{,}3172327$; $f'(Q_2) = -190{,}58773$; $Q_3 = 0{,}18439$.

Третья итерация:

$f(Q_3) = 0{,}0007504$; $f'(Q_3) = -189{,}6871$; $Q_4 = 0{,}184394$.

Внутренняя норма доходности второго проекта равна $Q = 18{,}44\%$.

Найдем срок окупаемости для первого проекта:

$$A_4 = \frac{40}{(1+0{,}15)} + \frac{40}{(1+0{,}15)^2} + \frac{40}{(1+0{,}15)^3} + \frac{40}{(1+0{,}15)^4} = 114{,}2.$$

Так как $A_4 < K_0$, то проект не окупится за все время существования.

Для второго проекта:

$$A_3 = \frac{60}{(1+0{,}15)} + \frac{50}{(1+0{,}15)^2} + \frac{40}{(1+0{,}15)^3} = 116{,}28;$$

$$A_4 = \frac{60}{(1+0{,}15)} + \frac{50}{(1+0{,}15)^2} + \frac{40}{(1+0{,}15)^3} + \frac{15}{(1+0{,}15)^4} = 124{,}86.$$

Так как $K_0 < A_4$, то находим недостающую часть года:

$$b = \frac{118 - 116{,}28}{124{,}86 - 116{,}28} = 0{,}2005 \text{ года, или } 73 \text{ дня.}$$

Результаты расчетов представлены в таблице.

Показатель	NPV	PI	IRR	PBP
Проект 1	−3,8	0,968	13,4%	Проект не окупится
Проект 2	6,86	1,06	18,44%	Окупится через 3 года 73 дня

По всем показателям второй проект лучше первого.

Глава 13

13.1. Найдем коэффициенты приведения:

$$a_{3;10}^{(2)} = \frac{1 - 1{,}1^{-3}}{2\left(1{,}1^{0{,}5} - 1\right)} = 2{,}5475; \quad a_{12;10}^{(4)} = \frac{1 - 1{,}1^{-12}}{4\left(1{,}1^{0{,}25} - 1\right)} = 7{,}064.$$

Подставив полученные значения в исходную формулу, найдем

$$\text{NPV} = \frac{80 \cdot 7{,}064}{1{,}1^3} - 100 \cdot 2{,}5475 = 424{,}583 - 254{,}75 = 169{,}833 \text{ млн руб.}$$

Так как $\text{NPV} > 0$, то проект принимается для дальнейшего рассмотрения.

13.2. Доходы за время жизни проекта составят

$$\frac{E_0 a_{n_2;q}^{(p_2)}}{(1+q)^{n_1}} = 80 \cdot \frac{1-(1+0,1)^{-12}}{4 \cdot \left[(1+0,1)^{0,25}-1\right]} \frac{1}{(1+0,1)^3} = 80 \cdot 7,064 \cdot 0,7513 = 424,591 \text{ млн руб.}$$

Расходы за тот же промежуток времени

$$K_0 a_{n_1;q}^{(p_1)} = 100 \cdot \frac{1-1,1^{-3}}{2 \cdot \left(1,1^{0,5}-1\right)} = 254,754 \text{ млн руб.}$$

Индекс прибыльности

$$\text{PI} = \frac{424,591}{254,754} = 1,667.$$

Так как $\text{PI} > 1$, то проект принимается для дальнейшего рассмотрения.

13.3. Исходное уравнение имеет вид

$$-\frac{3}{1+Q} - \frac{3}{(1+Q)^2} + \frac{4}{(1+Q)^3} + \frac{5}{(1+Q)^4} + \frac{6}{(1+Q)^5} = 0;$$

$$f(x) = -3x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6;$$

$$f'(x) = -12x^3 - 9x^2 + 8x + 5.$$

Положим $x_1 = 1,5$.

Первая итерация:

$$f(1,5) = -3 \cdot 1,5^4 - 3 \cdot 1,5^3 + 4 \cdot 1,5^2 + 5 \cdot 1,5 + 6 = -2,8125;$$

$$f'(1,5) = -12 \cdot 1,5^3 - 9 \cdot 1,5^2 + 8 \cdot 1,5 + 5 = -43,75;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,5 - \frac{-2,8125}{-43,75} = 1,4357143.$$

Вторая итерация:

$$f(x_2) = -0,201104; \quad f'(x_2) = -37,5786; \quad x_3 = x_2 - \frac{-0,201104}{-37,5786} = 1,43036.$$

Проверка:

$$-\frac{3}{x_3} - \frac{3}{x_3^2} + \frac{4}{x_3^3} + \frac{5}{x_3^4} + \frac{6}{x_3^5} = -0,0002.$$

Принимаем $Q = 43,036\%$.

13.4. Уравнение для внутренней нормы доходности **(13.12)** для условий задачи принимает вид

$$10^6 \cdot \int_2^{10} (1+0,05 \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{-\delta_0 \cdot t} dt - 10^6 \cdot \int_0^{n_1} (1-0,1 \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{-\delta_0 \cdot t} dt = 0;$$

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{-\delta_0 \cdot t}}{-\delta_0} + 0,05 \cdot \mathrm{e}^{-\delta_0 \cdot t} \left(\frac{t}{-\delta_0} - \frac{1}{\delta_0^2} \right) \right) \Bigg|_2^{10} -$$

$$-\left(\frac{\mathrm{e}^{-\delta_0 \cdot t}}{-\delta_0} + 0,1 \cdot \mathrm{e}^{-\delta_0 \cdot t} \left(\frac{t}{-\delta_0} - \frac{1}{\delta_0^2} \right) \right) \Bigg|_0^2 = 0;$$

$$e^{-\delta_0 \cdot 10}+0,05\cdot e^{-\delta_0 \cdot 10}\left(10+\frac{1}{\delta_0}\right)-e^{-\delta_0 \cdot 2}-0,05\cdot e^{-\delta_0 \cdot 2}\left(2+\frac{1}{\delta_0}\right)-$$

$$-e^{-\delta_0 \cdot 2}-0,05\cdot e^{-\delta_0 \cdot 2}\left(2+\frac{1}{\delta_0}\right)+1+\frac{0,05}{\delta_0}=0.$$

Решить это уравнение можно методом Ньютона—Рафсона. Читателю предлагается проделать это самостоятельно.

Ответ: $\Delta_0 = 37,16\%$.

13.5. Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{1-(1+Q)^{-8}}{Q}-5=0.$$

Решить это уравнение можно, например, методом Ньютона—Рафсона. В качестве исходной функции выбираем

$$f(Q)=\frac{1-(1+Q)^{-8}}{Q}-5.$$

Производная этой функции

$$f'(Q)=\frac{8Q(1+Q)^{-9}+(1+Q)^{-8}-1}{Q^2}.$$

Положим $Q_1 = 0,1$.

Первая итерация:

$$f(0,1)=\frac{1-(1+0,1)^{-8}}{0,1}-5=0,334926;$$

$$f'(Q)=\frac{8\cdot 0,1\cdot(1+0,1)^{-9}+(1+0,1)^{-8}-1}{0,1^2}=-19,4214525;$$

$$Q_2=Q_1-\frac{f(Q_1)}{f'(Q_1)}=0,1-\frac{0,334926}{-19,4214525}=0,117245\cdot$$

Вторая итерация:

$$f(Q_2)=0,015821;\quad f'(Q_2)=-17,6236267;\quad Q_3=0,118143.$$

Третья итерация:

$$f(Q_3)=0,000394;\quad f'(Q_3)=-17,5359535;\quad Q_3=0,118145.$$

Так как результаты второй и третьей итераций практически совпали, прекращаем вычисления и принимаем $Q=11,8145\%\approx 11,81\%$.

Таким образом, доходность инвестиций равна 11,81% годовых.

13.6. Для *проекта 1* сумма инвестиций, приведенная к их окончанию, равна

$$K = 2(1 + 0,1) + 4 = 6,2;$$

$$A_1 = \frac{4}{1,1} = 3,636; \quad A_2 = A_1 + \frac{4}{1,1^2} = 6,942.$$

Таким образом, срок окупаемости лежит между первым и вторым годами после окончания инвестирования. Используя формулу для определения недостающей части периода, находим срок окупаемости:

$$\text{PBP}_1 = 1 + \frac{K - A_1}{A_2 - A_1} = 1 + \frac{6,2 - 3,636}{6,942 - 3,636} = 1,776 \text{ лет.}$$

Для проекта 2:

$$K = 3(1 + 0,1) + 3 = 6,3;$$

$$A_1 = \frac{4}{1,1} = 3,636; \; A_2 = A_1 + \frac{5}{1,1^2} = 7,768;$$

$$\text{PBP}_2 = 1 + \frac{K - A_1}{A_2 - A_1} = 1 + \frac{6,3 - 3,636}{7,768 - 3,636} = 1,645 \text{ лет.}$$

Так как $\text{PBP}_1 > \text{PBP}_2$, то проект *2* предпочтительнее проекта *1*.

13.7. Для условий задачи уравнение для срока окупаемости приобретает вид

$$\int_4^{\text{PBP}} 10\text{e}^{-0.1\cdot t} dt = \int_0^4 10\text{e}^{0,1\cdot t} dt;$$

$$\left.\frac{\text{e}^{-0,1\cdot t}}{-0,1}\right|_4^{\text{PBP}} = \left.\frac{\text{e}^{-0,1\cdot t}}{-0,1}\right|_0^4;$$

$$\text{e}^{-0,1\cdot\text{PBP}} - \text{e}^{-0,4} = \text{e}^{-0,4} - 1;$$

$$\text{e}^{-0,1\cdot\text{PBP}} = 2\text{e}^{-0,4} - 1.$$

Прологарифмировав правую и левую части равенства, получим

$$\text{PBP} = -10 \cdot \ln\left(2\text{e}^{-0,4} - 1\right) = 10,7693 \text{ года.}$$

Таким образом, срок окупаемости составит 10 лет 281 день.

13.8. Для условий примера выражение для чистого приведенного дохода можно представить в виде

$$\text{NPV} = -\frac{2}{1+q} + \frac{5}{(1+q)^2} - \frac{3}{(1+q)^3}.$$

Точки пересечения этой функции с осью $0q$ находят из уравнения

$$-\frac{2}{1+q} + \frac{5}{(1+q)^2} - \frac{3}{(1+q)^3} = 0,$$

или

$$-2(1+q)^2+5(1+q)-3=0.$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$q_1=0;\quad q_2=0,5.$$

Экстремальные точки находят из уравнения

$$\frac{2}{(1+q)^2}-\frac{10}{(1+q)^3}+\frac{9}{(1+q)^4}=0,$$

или

$$2(1+q)^2-10(1+q)+9=0.$$

Экстремальные точки имеют следующие абсциссы:

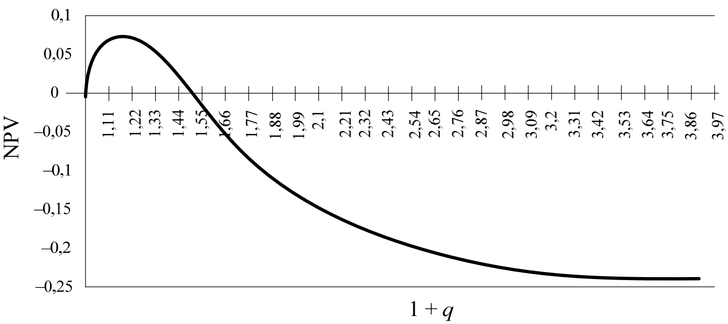
$$q_{1Э}=0,18;\quad q_{2Э}=2,8.$$

Значения функции в экстремальных точках:

$$\text{NPV}_{1Ý}=-\frac{2}{1,18}+\frac{5}{1,18^2}-\frac{3}{1,18^3}=0,07;$$

$$\text{NPV}_{2Ý}=-\frac{2}{3,8}+\frac{5}{3,8^2}-\frac{3}{3,8^3}=0,23.$$

Таким образом, график функции чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования представлен на рисунке.



NPV-ставка дисконтирования

Глава 14

14.1. Амортизационные отчисления за период от момента покупки до момента продажи в ценах на момент покупки

$$a=P_0\frac{n}{N}=75\frac{6,5}{18}=27,08.$$

Остаточная цена актива в ценах на момент оценки

$$P=(P_0-a)\cdot i_p=(75-27,08)\cdot 7,3=349,82\text{ ден. ед.}$$

14.2. Коэффициенты-аналоги находятся по формулам

$$H_1 = \frac{PN}{P_1} = \frac{450 \cdot 100\ 000}{18\ 000\ 000} = 2,5; \quad H_2 = \frac{45}{10} = 4,5; \quad H_3 = \frac{45}{20} = 2,25.$$

Стоимость оцениваемого предприятия к ожидаемому моменту перепродажи определяется соотношениями

$$S_1 = HP_{1,o} = 2,5 \cdot 24 = 60 \text{ млн руб.}; \quad S_2 = 4,5 \cdot 12 = 54 \text{ млн руб.};$$

$$S_3 = 2,25 \cdot 22 = 49,5 \text{ млн руб.}$$

Отличия в характеристиках предприятия-аналога и оцениваемого предприятия привели к расхождению значений стоимости, рассчитанной по различным коэффициентам. Для уточнения стоимости используем ее средневзвешенное значение. Если в качестве веса принять величину, равную 1/3, то найдем

$$\overline{S} = \sum_{t=1}^{3} S_t p_t = \frac{1}{3}(60 + 54 + 49,5) = 54,5 \text{ млн руб.}$$

14.3. Стоимость предприятия равна

$$A = 200 + 70 \cdot \frac{1 + 0,05}{0,15 - 0,05} = 935 \text{ млн руб.}$$

Глава 15

Тест 15.1: к коэффициентам ликвидности относятся: 2, 5 , 6, 9; к коэффициентам деловой активности относятся: 1, 3, 4 , 7, 8, 10.

Тест 15.2: к коэффициентам устойчивости относятся: 1, 2, 4 , 9, 10; к коэффициентам рентабельности относятся: 3, 5, 6, 7, 8.

Глава 16

Тест 16.1: C.

Тест 16.2: 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14.

Глава 17

Тест 17.1: первой точки зрения придерживался Фридман, второй — Кейнс.

Тест 17.2: 2, 4, 5, 7, 8.

Глава 18

Тест 18.1: *D*, *C*.

Тест 18.2: 1, 2, 4, 7, 8, 10.

18.1. Равновесная цена определяется из условия равенства спроса и предложения:

$$\frac{1}{p_p^{0,5}} = p_p^{0,4}\text{, откуда } p_p^{0,9} = 1,\text{ или } p_p = 1 \text{ ден. ед.}$$

Эластичность спроса и предложения

$$E_{p_p}(q) = \frac{q'_{p_p} \cdot p_p}{q} = -\frac{0,5 p_p p_p^{0,5}}{p_p^{1,5}} = -0,5;$$

$$E_{p_p}(s) = \frac{s'_{p_p} \cdot p_p}{s} = \frac{0,4 p_p^{-0,6} p_p}{p_p^{0,4}} = 0,4.$$

Так как полученные значения эластичности по абсолютной величине меньше единицы, то спрос и предложение товара при равновесной цене неэластичны относительно цены. Увеличение цены на 1% приведет к уменьшению спроса на 0,5%. При увеличении цены на 3% спрос уменьшится на $3 \cdot 0,5 = 1,5\%$, следовательно, доход возрастет на 3 – 1,5 = 1,5%. При уменьшении цены на 3% спрос увеличится на $3 \cdot 0,5 = 1,5\%$, следовательно, доход уменьшится на 3 – 1,5 = 1,5%.

18.2. Для определения эластичности используется формула

$$E_p(\text{NPV}) \approx \frac{\Delta\text{NPV}}{\text{NPV}} \bigg/ \frac{\Delta p}{p} = \frac{38,72 - 42,1}{38,72} \bigg/ \frac{12,5 - 13,1}{12,5} = 1,82.$$

Таким образом, при изменении цены на 1% чистый приведенный доход изменится на 1,82%.

18.3. Оборотный рычаг

$$L = \frac{12 \cdot (1 - 0,32)}{12 \cdot (1 - 0,32) - 3,5} = 1,75.$$

Индекс безопасности

$$I_б = \frac{1}{1,75} = 0,57.$$

Удаленность объема продаж от точки безубыточности

$$\frac{D}{P_0} = \frac{1,75}{1,75 - 1} = 2,33.$$

Доход до уплаты процентов и налогов равен

$$E = D - P_{\text{пост}} - P_{\text{пер}} = 12 - 3,5 - 0,32 \cdot 12 = 4,66 \text{ млн руб.}$$

Финансовый рычаг определим по формуле:

$$M = \frac{E}{E - rB} = \frac{4,66}{4,66 - 0,14 \cdot 10} = 1,43.$$

Устойчивость дохода до уплаты процентов и налогов по отношению к выплачиваемым процентам по кредиту:

$$\frac{E}{rB} = \frac{1,43}{1,43-1} = 3,32.$$

Комбинированный рычаг равен

$$Q = L \cdot M = 1,75 \cdot 1,43 = 2,5.$$

Таким образом, индекс безопасности равен $I_б = 0,57$, удаленность объема продаж от точки безубыточности $\frac{D}{P_0} = 2,33$, устойчивость дохода до уплаты процентов и налогов по отношению к выплачиваемым процентам по кредиту $\frac{E}{rB} = 3,32$, а при росте или падении объема продаж на 1% чистый доход возрастет или упадет на 2,5%.

Тест 18.3: 3, 5, 6.

Глава 19

Тест 19.1. Площадь, заключенная между функцией распределения случайной величины и осью абсцисс, равна единице.

19.1. Частота попадания доходности инвестиций в интервал от 20 до 30% годовых равна

$$p = \frac{m}{n} = \frac{16}{250} = 0,064.$$

19.2. Среднее значение доходности

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{19+23+17+20+27+26+16+19+25+15+29+18}{12} = 21,2\%.$$

Выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{12-1}\begin{pmatrix} (19-21,2)^2 + (23-21,2)^2 + (17-21,2)^2 + \\ +(20-21,2)^2 + (27-21,2)^2 + (26-21,2)^2 + \\ +(16-21,2)^2 + (19-21,2)^2 + (25-21,2)^2 + \\ +(15-21,2)^2 + (29-21,2)^2 + (18-21,2)^2 \end{pmatrix} = \frac{239,68}{11} = 21,79.$$

Выборочное среднее квадратичное отклонение доходности

$$S = 4,67.$$

Для определения выборочного стандартного отклонения найдем предварительно

$$s^2 = \frac{n-1}{n}S^2 = \frac{11}{12}\cdot 21,79 = 19,97.$$

Выборочное стандартное отклонение

$$s = \sqrt{19,97} = 4,47.$$

19.3. В качестве среднего квадратичного отклонения принимаем значение выборочного среднего квадратичного отклонения, полученного в *задаче 19.2* и равного $S = 4,67$. Тогда диапазон возможных изменений доходности инвестиций будет равен

$$21,2 \pm 3 \cdot 4,67 = 21,2 \pm 14\%, \text{ или от 7,2 до 35,2\%.}$$

19.4. Для условий *задачи 19.2* определить доверительный интервал математического ожидания для доверительной вероятности $F_1 = 0,95$.

В *задаче 19.2* получили $\overline{x} = 21,2\%$ и $S = 4,67\%$.

Уровень значимости для поставленного условия:

$$\alpha = 1 - F = 1 - 0,95 = 0,05.$$

Значение коэффициента доверия находим из таблиц (см., например, таблицу в работе [8], с. 626).

$$t_\alpha = 1,96.$$

По полученным данным определяем доверительный предел и интервал:

$$x_{1,2} = \overline{x} \pm t_\alpha S/\sqrt{n} = 21,2 \pm 1,96 \cdot 4,67/\sqrt{12} = 21,2 \pm 2,6;$$

$$x_1 = 23,8; \quad x_2 = 18,6;$$

$$18,6 \le m \le 23,8.$$

Глава 20

Тест 20.1: В; В.

20.1. Определим премию за риск для двух вариантов по формулам

$$\overline{a}_{\text{Р},1} = \overline{a}_{np,1} - \overline{a} = 5 - 2 = 3\%;$$

$$\overline{a}_{\text{Р},2} = \overline{a}_{np,2} - \overline{a} = 9 - 2 = 7\%.$$

Соотношение для расчета беты найдем из формулы модели капитальных активов:

$$\beta = \frac{\overline{a}_{\text{ïð}} - \overline{a}}{\overline{a}_m - \overline{a}}.$$

Для каждого из вариантов:

$$\beta_1 = \frac{5-2}{6-2} = 0,75;$$

$$\beta_2 = \frac{9-2}{6-2} = 1,75.$$

Премия за риск во втором варианте больше, чем в первом. Так как $\beta_1 < 1$, а $\beta_2 > 1$, то риск первого проекта низкий, а второго — высокий.

Глава 21

Тест 21.1. Нет. Задачей метода сглаживания ошибок является выявление скачков динамического ряда.

21.1. Воспользовавшись данными табл. 21.2, выбираем $\alpha = 0,3$. Разность $y_1 - \overline{y}_0 = \varepsilon_1$ является ошибкой прогноза на первый день. Здесь y_1 — значение цены акции в первый день; $\overline{y}_0$ — прогноз цены акции, сделанный накануне. Для условий задачи $\varepsilon_1 = 125 - 123 = 2$.

Значение прогноза, сделанного в конце первого дня на второй день:

$$\overline{y}_1 = \overline{y}_0 + \alpha\varepsilon_1 = 123 + 0,3 \cdot 2 = 123,6.$$

Ошибка прогноза на второй день: $\varepsilon_2 = 131 - 123,6 = 7,4$.

Значение прогноза, сделанного в конце второго дня на третий день:

$$\overline{y}_2 = \overline{y}_1 + \alpha\varepsilon_2 = 123,6 + 0,3 \cdot 7,4 = 125,82.$$

Ошибка прогноза на третий день: $\varepsilon_3 = 124 - 125,82 = -1,82$.

Значение прогноза, сделанного в конце третьего дня на четвертый день:

$$\overline{y}_3 = \overline{y}_2 + \alpha\varepsilon_3 = 125,82 - 0,3 \cdot 1,82 = 125,27.$$

Ошибка прогноза на четвертый день: $\varepsilon_4 = 117 - 125,27 = -8,27$.

Значение прогноза, сделанного в конце четвертого дня на пятый день:

$$\overline{y}_4 = \overline{y}_3 + \alpha\varepsilon_4 = 125,27 - 0,3 \cdot 8,27 = 122,79.$$

Ошибка прогноза на пятый день: $\varepsilon_5 = 126 - 122,79 = 3,21$.

Значение прогноза, сделанного в конце пятого дня на шестой день:

$$\overline{y}_5 = \overline{y}_4 + \alpha\varepsilon_5 = 122,79 + 0,3 \cdot 3,21 = 122,79.$$

Ошибка прогноза на шестой день: $\varepsilon_6 = 129 - 123,75 = 5,25$.

Результаты расчета сведены в таблицу.

Дни	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й
y_t	125	131	124	117	126	129
$\overline{y}_{t-1}$	123	123,6	125,82	125,27	122,79	123,75
$\varepsilon_t = y_t - \overline{y}_{t-1}$	2	7,4	−1,82	−8,27	3,21	5,25

Среднее значение прогнозируемой величины за шесть дней равно 125,33. Как видно из таблицы, прогнозируемые значения сгруппировались вблизи среднего.

21.2. Поскольку $\alpha = 0,2$, то по данным табл. 21.6 находим $\gamma_0 = 0,35$, $\gamma_1 = 0,04$, $\gamma_{-1} = 0$. Поэтому формула **(21.7)** приобретает вид

$$\overline{y}_t = \overline{y}_{t-1} + 0,35 \cdot \varepsilon_t + 0,04 \cdot \sum_{j=t}^{-\infty} \varepsilon_j \cdot$$

Положим, что $\sum_{j=0}^{-\infty} \varepsilon_j = 0$. Так как ошибка прогноза первого дня

$$\varepsilon_1 = y_1 - \overline{y}_0 = 8,9 - 9 = -0,1,$$

то прогноз на второй день составит

$$\overline{y}_2 = \overline{y}_1 + 0,35 \cdot \varepsilon_1 + 0,04 \cdot \varepsilon_1 = 9 - 0,35 \cdot 0,1 - 0,04 \cdot 0,1 = 8,961\,.$$

Ошибка прогноза второго дня $\varepsilon_2 = y_2 - \overline{y}_1 = 9,1 - 8,961 = 0,139$.

Прогноз на третий день

$$\overline{y}_3 = \overline{y}_2 + 0,35 \cdot \varepsilon_2 + 0,04 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 8,961 + 0,35 \cdot 0,139 + 0,04 \cdot (-0,1 + 0,139) = 9,011.$$

Ошибка прогноза третьего дня $\varepsilon_3 = y_3 - \overline{y}_2 = 8,9 - 9,011 = -0,111$.

Прогноз на четвертый день

$$\overline{y}_4 = \overline{y}_3 + 0,35 \cdot \varepsilon_3 + 0,04 \cdot \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j = 9,011 - 0,35 \cdot 0,111 - 0,04 \cdot 0,072 = 8,969.$$

Ошибка прогноза четвертого дня $\varepsilon_4 = y_4 - \overline{y}_3 = 9,08 - 8,969 = 0,111$.

Прогноз на пятый день

$$\overline{y}_5 = \overline{y}_4 + 0,35 \cdot \varepsilon_4 + 0,04 \cdot \sum_{j=1}^{4} \varepsilon_j = 8,969 + 0,35 \cdot 0,111 + 0,04 \cdot 0,039 = 9,009.$$

Ошибка прогноза пятого дня $\varepsilon_5 = y_5 - \overline{y}_4 = 8,96 - 9,009 = -0,049$.

Прогноз на шестой день

$$\overline{y}_6 = \overline{y}_5 + 0,35 \cdot \varepsilon_5 + 0,04 \cdot \sum_{j=1}^{5} \varepsilon_j = 9,009 - 0,35 \cdot 0,049 - 0,04 \cdot 0,01 = 8,988.$$

Ошибка прогноза шестого дня $\varepsilon_6 = y_6 - \overline{y}_5 = 8,9 - 8,988 = -0,088$.

Прогноз на седьмой день

$$\overline{y}_7 = \overline{y}_6 + 0,35 \cdot \varepsilon_6 + 0,04 \cdot \sum_{j=1}^{6} \varepsilon_j = 8,988 - 0,35 \cdot 0,088 - 0,04 \cdot 0,098 = 8,953.$$

Ошибка прогноза седьмого дня $\varepsilon_7 = y_7 - \overline{y}_6 = 9 - 8,953 = 0,047$.

Прогноз на восьмой день

$$\overline{y}_8 = \overline{y}_7 + 0,35 \cdot \varepsilon_7 + 0,04 \cdot \sum_{j=1}^{7} \varepsilon_j = 8,953 + 0,35 \cdot 0,047 - 0,04 \cdot 0,051 = 8,967.$$

Ошибка прогноза восьмого дня $\varepsilon_8 = y_8 - \overline{y}_7 = 9,5 - 8,967 = 0,533$.

Прогноз на девятый день

$$\overline{y}_9 = \overline{y}_8 + 0,35 \cdot \varepsilon_8 + 0,04 \cdot \sum_{j=1}^{8} \varepsilon_j = 8,967 + 0,35 \cdot 0,533 + 0,04 \cdot 0,482 = 9,359.$$

Ошибка прогноза девятого дня $\varepsilon_9 = y_9 - \overline{y}_8 = 9,6 - 9,359 = 0,241$.

Прогноз на десятый день

$$\overline{y}_{10} = \overline{y}_9 + 0,35 \cdot \varepsilon_9 + 0,04 \cdot \sum_{j=1}^{9} \varepsilon_j = 9,359 + 0,35 \cdot 0,241 + 0,04 \cdot 0,723 = 9,472.$$

Ошибка прогноза десятого дня $\varepsilon_{10} = y_{10} - \overline{y}_9 = 9,56 - 9,472 = 0,088$.

Результаты расчета сведены в таблицу.

Дни	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
y_t	**8,9**	**9,1**	**8,9**	**9,08**	**8,96**	**8,9**	**9,0**	**9,5**	**9,6**	**9,56**
$\bar{y}_{t-1}$	9,0	8,961	9,011	8,969	9,009	8,988	8,953	8,967	9,359	9,472
$\varepsilon_t = y_t - \bar{y}_{t-1}$	–0,1	0,139	–0,111	0,111	–0,049	–0,088	0,047	0,533	0,241	0,088

В этой таблице введены обозначения: y_t — значение экономического параметра текущего дня; $\bar{y}_{t-1}$ — прошлый прогноз текущего дня; $\varepsilon_t = y_t - \bar{y}_{t-1}$ — ошибка текущего прогноза.

Сравнивая результаты, приведенные в этой таблице, с результатами табл. 21.3, видим, что после скачка, произошедшего на восьмой день, т.е. для девятого и десятого дней, ошибка прогноза для метода Бокса—Дженкинса меньше по сравнению с ошибкой прогноза, рассчитанного по методу экспоненциально взвешенного среднего. Тем не менее для всех дней до десятого ошибка прогноза меньше для метода экспоненциально взвешенного среднего.

21.3. Найдем среднее прогнозируемое значение, подставив исходные данные в **(20.9)**:

$$\hat{y}_{11} = 0,75 + 0,54545 \cdot 11 = 6,75;$$

$$\hat{y}_{14} = 0,75 + 0,54545 \cdot 14 = 8,386.$$

Табличное значение t-критерия Стьюдента для $n - 2 = 8$ и $\alpha = 0,05$ равно $t_\alpha = 2,31$. Определим другие параметры, необходимые для расчета доверительного интервала. Остаточная дисперсия рассчитывается по формуле

$$S_{OCT}{}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y})^2}{n-2}.$$

Сумма $\varepsilon_t{}^2 = \sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y})^2$ в соответствии с табл. 21.7 равна 0,20454; $n = 10$. Поэтому $S_{OCT}{}^2 = \frac{0,20454}{10-2} = 0,02557$. Среднее квадратичное отклонение остатков $S_{OCT} = 0,1599$; $\bar{t} = 5,5$; $\sum_{t=1}^{n}(t-\bar{t})^2 = \frac{n(n^2-1)}{12} = \frac{10 \cdot 99}{12} = 82,5.$

Выражение для верхней и нижней границ доверительного интервала для линейного тренда имеет вид

$$y = \hat{y}_{n+l} \pm t_\alpha S_{OCT} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(n+l-\bar{t})^2}{\sum_{t=1}^{n}(t-\bar{t})^2}},$$

где l — горизонт прогнозирования.

Подставляя полученные данные в эту формулу, получим

$$y_{11} = 6,75 \pm 2,31 \cdot 0,1599\sqrt{1 + 0,1 + \frac{(10 + 1 - 5,5)^2}{82,5}} = 6,75 \pm 0,45;$$

$$y_{14} = 8,386 \pm 2,31 \cdot 0,1599\sqrt{1 + 0,1 + \frac{(10 + 4 - 5,5)^2}{82,5}} = 8,386 \pm 0,519.$$

Таким образом, с доверительной вероятностью 0,95 значение параметра на 11-й день будет находиться в интервале $6,3 < y < 7,4$, а на 14-й день — в интервале $7,867 < y < 8,905$.

Глава 22

22.1. Внутренняя норма доходности определяется уравнением **(22.4)**. Переменные задачи представим в относительном виде:

$$k_j = \frac{K_j}{K^0}; \quad \text{e}_j = \frac{E_j}{E^0}; \quad N = \frac{n}{n^0}.$$

Полученные значения подставим в **(22.4)** и найдем искомую модель:

$$\sum_{j=1}^{n_1} \frac{k_j \cdot K^0}{(1+Q)^j} = \sum_{j=n_1+1}^{N \cdot n^0} \frac{\text{e}_j \cdot E^0}{(1+Q)^j}.$$

22.2. К числу переменных модели относятся цена продукта, объем продаж, ставка налога, постоянные издержки.

22.3. Перестроим таблицу в относительных единицах.

Таблица 1

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10	11	12
Цена продаж	0,95	1,15	0,85	1	1,35	1,3	0,8	0,95	1,25	0,75	1,45	0,9
Объем продаж	1,085	0,977	1,144	0,935	0,875	0,862	1,147	1,112	0,913	1,16	0,841	1,094

Математическое ожидание цены продаж p и объема продаж q найдем по формуле **(22.8)**:

$$\overline{p} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t = \frac{0,95 + 1,15 + 0,85 + 1 + 1,35 + 1,3}{12} +$$

$$+ \frac{0,8 + 0,95 + 1,25 + 0,75 + 1,45 + 0,9}{12} = 1,06;$$

$$\overline{q} = \frac{1,085 + 0,977 + 1,144 + 0,935 + 0,875 + 0,862}{12} +$$

$$+ \frac{1,147 + 1,112 + 0,913 + 1,16 + 0,841 + 1,094}{12} = 1,012.$$

Для расчета выборочной ковариации этих переменных используется формула **(22.9)**:

$$\sigma_{pq} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(p_t - \overline{p}\right)\cdot\left(q_t - \overline{q}\right) =$$

$$= \frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} (095-1,06)(1,085-1,012)+(1,15-1,06)(0,977-1,012)+ \\ +(0,85-1,06)(1,144-1,012)+(1-1,06)(0,935-1,012)+ \\ +(1,35-1,06)(0,875-1,012)+(1,3-1,06)(0,862-1,012)+ \\ +(0,8-1,06)(1,147-1,012)+(0,95-1,06)(1,112-1,012)+ \\ +(1,25-1,06)(0,93-1,012)+(0,75-1,06)(1,16-1,012)+ \\ +(1,45-1,06)(0,841-1,012)+(0,9-1,06)(0,841-1,012) \end{pmatrix} = -0,02733.$$

Прежде чем рассчитывать коэффициент корреляции, рассчитаем дисперсии и средние квадратичные отклонения:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(p_t - \overline{p}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} (095-1,06)^2+(1,15-1,06)^2+(0,85-1,06)^2+ \\ +(1-1,06)^2+(1,35-1,06)^2+(1,3-1,06)^2+ \\ +(0,8-1,06)^2+(0,95-1,06)^2+(1,25-1,06)^2+ \\ +(0,75-1,06)^2+(1,45-1,06)^2+(0,9-1,06)^2 \end{pmatrix} = 0,0545;$$

$$\sigma_p = 0,233;$$

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(q_t - \overline{q}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} (1,085-1,012)^2+(0,977-1,012)^2+(1,144-1,012)^2+ \\ +(0,935-1,012)^2+(0,875-1,012)^2+(0,862-1,012)^2+ \\ +(1,147-1,012)^2+(1,112-1,012)^2+(0,93-1,012)^2+ \\ +(1,16-1,012)^2+(0,841-1,012)^2+(0,841-1,012)^2 \end{pmatrix} = 0,01519;$$

$$\sigma_q = 0,123\,.$$

Коэффициент корреляции рассчитывается по формуле **(22.11)**:

$$r_{pq} = \frac{\sigma_{pq}}{\sigma_p\sigma_q} = \frac{-0,02733}{0,233\cdot 0,123} = -0,95.$$

Таким образом, обратная корреляционная связь между переменными очень высокая.

Случайную функцию цены от объема продаж представим в виде

$$p_t = a_0 + a_1 q + \varepsilon_{qt},$$

где $\hat{p} = a_0 + a_1 q$ — функция регрессии; ε_{qt} — возмущение объема продаж в опыте под номером t.

Коэффициенты регрессии рассчитываются по формулам **(22.13)**. Перепишем их с учетом наших обозначений:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\overline{pq} - \overline{p} \cdot \overline{q}}{\overline{q^2} - \overline{q}^2}; \\ a_0 &= \overline{p} - a_1 \overline{q}, \end{aligned}\right\}$$

где $\overline{pq} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t q_t$; $\overline{p} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t$; $\overline{q} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q_t$; $\overline{q^2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q_t^2$.

Для расчета этих коэффициентов составим табл. 2:

$$\varepsilon_{qt} = p_t - a_0 - a_1 q.$$

Таблица 2

Месяц	$p \cdot q$	q^2	q_t	$\hat{p} = 2{,}58 - 1{,}5q$	p_t	$\varepsilon_{qt} = p_t - \hat{p}$
1	2	3	4	5	6	7
1-й	0,95 · 1,085 = 1,031	1,177	1,085	0,953	0,95	−0,003
2-й	1,15 · 0,977 = 1,124	0,955	0,977	1,115	1,15	0,035
3-й	0,85 · 1,144 = 0,972	1,309	1,144	0,864	0,85	−0,014
4-й	1 · 0,935 = 0,935	0,874	0,935	1,133	1	−0,133
5-й	1,35 · 0,875 = 1,181	0,766	0,875	1,268	1,35	0,082
6-й	1,3 · 0,862 = 1,121	0,743	0,862	1,287	1,3	0,013
7-й	0,8 · 1,147 = 0,918	1,316	1,147	0,86	0,8	−0,06
8-й	0,95 · 1,112 = 1,056	1,236	1,112	0,912	0,95	0,038
9-й	1,25 · 0,913 = 1,141	0,834	0,913	1,21	1,25	0,04
10-й	0,75 · 1,16 = 0,87	1,346	1,16	0,84	0,75	−0,09
11-й	1,45 · 0,841 = 1,219	0,707	0,841	1,318	1,45	0,132
12-й	0,9 · 1,094 = 0,985	1,197	1,094	0,939	0,9	−0,039
Итого	**12,624**	**12,46**				

Используя данные табл. 2, получим

$$\overline{pq} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t q_t = \frac{12{,}624}{12} = 1{,}052; \quad \overline{q^2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q_t^2 = \frac{12{,}46}{12} = 1{,}038;$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\overline{pq} - \overline{p} \cdot \overline{q}}{\overline{q^2} - \overline{q}^2} = \frac{1{,}052 - 1{,}06 \cdot 1{,}012}{1{,}038 - 1{,}012^2} = -1{,}5; \\ a_0 &= \overline{p} - a_1 \overline{q} = 1{,}06 + 1{,}5 \cdot 1{,}012 = 2{,}58. \end{aligned}\right\}$$

Функция регрессии имеет вид

$$p = 2{,}58 - 1{,}5q.$$

График функции регрессии представлен на рисунке.

Возмущение объема продаж в опыте под номером t находят по формуле

$$\varepsilon_{qt} = p_t - \hat{p} = p_t - a_0 - a_1 q.$$

Эти возмущения представлены в строке 7 табл. 2.

Таким образом, для дальнейшей работы нужно выяснить законы распределения рядов q_t и ε_{qt}, а затем использовать для их генерации генератор случайных чисел.

Тест 22.1. Корреляционная зависимость между переменными сильно влияет на характеристики модели.

Глава 23

Тест 23.1. Страхование рисков представляет собой передачу рисков страховой компании за вознаграждение.

Тест 23.2. Контроллинг представляет собой координацию общей системы управления рисками.

Тест 23.3. Контроль рисков предназначен для проверки соответствия плановых и реальных показателей.

Тест 23.4. Функциями управления рисками являются планирование, контроль, контроллинг, принятие решения.

Глава 24

Тест 24.1: D.

Тест 24.2. Лицо, стремящееся получить прибыль за счет разницы в курсах финансовых инструментов, которая возникает во времени, называется *спекулянт*.

Тест 24.3. Если на графике цена акции падает во времени, то тренд называется *медвежьим*.

24.1. Доходность операции равна

$$a = \frac{20 \cdot 6 - (100 + 6)}{100 + 6} = 0{,}132, \text{ или } 13{,}2\% \text{ годовых.}$$

Из формулы для доходности от вложения денег $a=(1+i)\dfrac{P_1}{P}-1$ находим формулу для годовой процентной ставки:

$$i=(1+a)\frac{P}{P_1}-1.$$

Подставив данные в эту формулу, получим

$$i=(1+0{,}132)\cdot\frac{106}{100}-1=0{,}2, \text{ или } 20\% \text{ годовых.}$$

Глава 25

Тест 25.1. Акции котируются на бирже, если они включены в котировальный лист.

25.1. Подставим данные в формулу для доходности **(25.1)**:

$$0{,}3=\frac{34-28+20\cdot a_d}{28}.$$

Отсюда находим

$$a_d=\frac{28\cdot 0{,}3-34+28}{20}=0{,}12, \text{ или } 12\%.$$

Таким образом, дивиденд составил 12% номинала акции.

25.2. Формула для нормального отношения «цена/прибыль» акции **(25.15)** для условий задачи принимает вид

$$\frac{A}{\Pi_0}=g_0\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

Подставив данные задачи в полученную формулу, найдем

$$\frac{A}{\Pi_0}=0{,}45\frac{1-(1+0{,}15)^{-n}}{0{,}15}=2{,}631.$$

Таким образом, стоимость акции

$$A=2{,}631\cdot 20=52{,}62 \text{ руб.}$$

Глава 26

26.1. Курс облигации

$$K=\frac{B}{N}=\frac{19\,000}{25\,000}=0{,}76, \text{ или } 76\%.$$

Для *первого варианта* имеем доходность

$$r=\left(1+\frac{0{,}1}{2\cdot 0{,}76}\right)^2-1=0{,}1359, \quad \text{или } \approx 13{,}59\%.$$

Для *второго варианта*

$$r = \frac{0,1}{0,76} = 0,1316, \text{ или } \approx 13,16\%.$$

26.2. Подставив исходные данные задачи в последнюю формулу, получим

$$r = \frac{1+u}{\sqrt[n]{\dfrac{B}{N}}} - 1 = \frac{1,1}{\sqrt[5]{\dfrac{12\ 500}{55\ 000}}} - 1 = 0,1408, \text{ или } 14,08\%.$$

26.3. Доходность определяется по формуле

$$r = \frac{1}{\sqrt[5]{0,85}} - 1 = 0,033, \text{ или } 3,3\%.$$

26.4. Истинная цена облигации определяется по формуле **(26.20)**, дюрация − по формуле **(26.27)**, изгиб — по формуле **(26.28)**:

$$A_0 = \frac{1000}{1,1} + \frac{1000}{1,1^2} + \frac{5000}{1,1^2} = 5867,77 \text{ руб.};$$

$$D = \frac{1}{5867,77}\left(\frac{1000}{1,1} + \frac{2 \cdot 1000}{1,1^2} + \frac{2 \cdot 5000}{1,1^2}\right) = 1,845 \text{ лет};$$

$$C = \frac{1}{2 \cdot 5867,77}\left(\frac{2 \cdot 1000}{1,1^3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 1000}{1,1^4} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 5000}{1,1^{2=4}}\right) = 2,223.$$

Изменение цены при учете дюрации и изгиба находится по формуле **(26.29)**:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -1,845\frac{0,02}{1,1} + 2,223 \cdot 0,02^2 = -0,03266, \text{ или } -3,266\%,$$

а только дюрации — по формуле **(26.32)**:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = -1,845\frac{0,02}{1,1} = -0,03355, \text{ или } -3,355\%.$$

Глава 27

27.1. Проигравшей стороной является покупатель контрактов, так как он переплатит за каждую акцию 27 коп. Общее количество купленных по контракту акций равно 100 · 100 = 10 000 шт. Таким образом, потери покупателя форвардных контрактов составят

$$0,27 \cdot 10\ 000 = 2700 \text{ руб.}$$

27.2. Силу роста через три месяца рассчитаем по формуле

$$\delta = \ln(1+i) = \ln(1+0,18) = 0,1655.$$

Цена форвардного контракта составит

$$F = 1000 \cdot (57,53 - 58) \cdot e^{-0,1655 \cdot (1-0,25)} = -415,14 \text{ руб.}$$

Таким образом, инвестор контракт продать не сможет.

27.3. Найдем силы роста спот для национальной валюты и доллара:

$$\delta = \ln\left(1+i_{\text{Р}}\right) = \ln\left(1+0,14\right) = 0,131;$$

$$\Delta = \ln\left(1+i_{И}\right) = \ln\left(1+0,07\right) = 0,0677\ .$$

По формуле **(27.10)** найдем курс поставки доллара:

$$K_{\text{пост}} = 29\mathrm{e}^{(0,131-0,0677)\cdot 0,75} = 30,41 \text{ руб./долл.}$$

27.4. Силы роста спот для национальной валюты и доллара были определены в предыдущем упражнении:

$$\delta = 0,131;\quad \Delta = 0,0677\ .$$

Цену форвардного контракта для условий задачи удобно определить по формуле **(27.14)**:

$$F = 29,5\cdot 10\ 000\,\mathrm{e}^{-0,0667\cdot(1-0,5)} - 29,6\cdot 10\ 000\,\mathrm{e}^{-0,131\cdot(1-0,5)} =$$

$$= 285\ 324 - 277\ 233,6 = 8090,4 \text{ руб.}$$

27.5. Отношение количества единиц иностранной валюты, купленной непосредственно на рынке, к количеству единиц иностранной валюты, купленной у продавца форвардного контракта, определим по формуле **(27.27)**:

$$\frac{V_n}{V} = \left(\frac{1+0,12}{1+0,04}\right)\bigg/\left(\frac{33}{27}\right) = 0,881.$$

Таким образом, по форвардному контракту можно купить на 19% долларов больше.

Глава 28

28.1. В соответствии с изменяющейся котировочной ценой с маржевого счета продавца снимается переменная маржа 120 руб. в 1-й день и начисляется 80 руб. — во 2-й день, 90 руб. — в 3-й день, 30 руб. — в 4-й день и 20 руб. — в 5-й день (см. таблицу).

Наименование операции	*Открытие позиции*	*Дни*				
		1-й	*2-й*	*3-й*	*4-й*	*5-й*
Котировочная цена		10 120	10 040	9950	9920	9900
Нижний уровень маржи	400					
Позиция продавца:						
• маржевый счет	600	480	560	650	680	700
• премиальная маржа		−120	80	90	30	20
Позиция покупателя:						
• маржевый счет	600	720	640	550	520	500
• премиальная маржа		120	−80	−90	−30	−20

На маржевый счет покупателя начисляется переменная маржа 120 руб. в 1-й день и снимается 80 руб. во 2-й день, 90 руб. — в 3-й день, 30 руб. — в 4-й день и 20 руб. — в 5-й день.

28.2. Прибыли—убытки $П_0$ по форвардному контракту для покупателя контракта на дату поставки определяются формулой **(28.1)**. Для условий примера прибыль составит

$$П_0 = 34,8 - 34 = 0,8 \text{ руб.}$$

По фьючерсному контракту прибыли—убытки (в руб.) составили:

в первый день $П_1 = S_1 - S_0 = 33 - 34 = -1;$

во второй день $П_2 = S_2 - S_1 = 33,2 - 33 = 0,2;$

в третий день $П_3 = S_3 - S_2 = 33,5 - 33,2 = 0,3;$

в четвертый день $П_4 = S_4 - S_3 = 33,9 - 33,5 = 0,4;$

в пятый день $П_5 = S_5 - S_4 = 34,2 - 33,9 = 0,3;$

в шестой день $П_6 = S_6 - S_5 = 34,4 - 34,2 = 0,2;$

в седьмой день $П_7 = S_7 - S_6 = 34,5 - 34,4 = 0,1;$

в восьмой день $П_8 = P_8 - S_7 = 34,8 - 34,5 = 0,3.$

В результате в конце каждого последующего дня владелец фьючерсного контракта будет иметь следующие прибыли—убытки:

первый день — 1 руб.;
второй день — −1 + 0,2 = −0,8 руб.;
третий день — −0,8 + 0,3 = −0,5 руб.;
четвертый день — −0,5 + 0,4 = −0,1 руб.;
пятый день — −0,1 + 0,3 = 0,2 руб.;
шестой день — 0,2 + 0,2 = 0,4 руб.;
седьмой день — 0,4 + 0,1 = 0,5 руб.;
восьмой день — 0,5 + 0,3 = 0,8 руб.

Результаты расчетов сведены в таблицу.

Дни			28	29	30	1	2	3	4	5
Курс евро			32	32,4	33	33,5	34,1	34,3	34,6	34,8
Котировочная цена фьючерса			33	33,2	33,5	33,9	34,2	34,4	34,5	—
Прибыли—убытки	*Форвард*									0,8
	Фьючерс	*За день*	−1	0,2	0,3	0,4	0,3	0,2	0,1	0,3
		Итого	−1	−0,8	−0,5	−0,1	0,2	0,4	0,5	0,8

Таким образом, прибыли по форвардному и фьючерсному контрактам совпали в конце срока.

28.3. Инвестор формирует спрэд быка, т.е. продает февральский контракт и покупает мартовский.

Вариант *а*. Прибыль инвестора по ближнему контракту

$$П_б = (34,5 - 34) \cdot 1000 = 500 \text{ руб.}$$

Убытки инвестора по дальнему контракту

$$П_д = (34,6 - 35) \cdot 1000 = -400 \text{ руб.}$$

Общая прибыль

$$П = П_д + П_б = 100 \text{ руб.}$$

Вариант *б*. Убытки инвестора по ближнему контракту

$$П_б = (34 - 34,5) \cdot 1000 = -500 \text{ руб.}$$

Прибыль инвестора по дальнему контракту

$$П_д = (35,4 - 35) \cdot 1000 = 400 \text{ руб.}$$

Общие убытки

$$П = П_д + П_б = -100 \text{ руб.}$$

В варианте *а* ожидания инвестора оправдались, и его общая прибыль равна 100 руб. В варианте *б* ожидания инвестора не оправдались. Его убытки составили 100 руб.

28.4. *а*) Инвестор покупает спрэд бабочки, т.е. он покупает ближний контракт $(A - A - a)$ и продает средний $(B + b - B)$ (спрэд медведя), а также продает средний контракт $(B + b - B)$ и покупает дальний $(C - C - c)$ (спрэд быка).

Прибыли—убытки инвестора по спрэду медведя

$$П_{мед} = (34,8 - 34,5) \cdot 1000 + (35 - 35,4) \cdot 1000 = -100 \text{ руб.}$$

Прибыли—убытки инвестора по спрэду быка

$$П_{бык} = (35 - 35,4) \cdot 1000 + (35,4 - 35,2) \cdot 1000 = -200 \text{ руб.}$$

Общие убытки

$$П = П_{мед} + П_{бык} = -300 \text{ руб.}$$

б) Инвестор продает спрэд бабочки, т.е. он продает ближний контракт $(A + a - A)$ и покупает средний $(B - B - b)$ (спрэд быка), а также покупает средний контракт $(B - B - b)$ и продает дальний $(C + c - C)$ (спрэд медведя).

Прибыли—убытки инвестора по спрэду быка

$$П_{бык} = (34,5 - 34,8) \cdot 1000 + (35,4 - 35) \cdot 1000 = 100 \text{ руб.}$$

Прибыли—убытки инвестора по спрэду медведя

$$П_{мед} = (35,4 - 35) \cdot 1000 + (35,2 - 35,4) \cdot 1000 = 200 \text{ руб.}$$

Общая прибыль

$$П = П_{бык} + П_{мед} = 300 \text{ руб.}$$

Тот же результат можно получить, используя формулы **(28.4)** и **(28.5)**. Для этого определим

$$a = 34,5 - 34,8 = -0,3; \quad b = 355,0 - 35,4 = -0,4; \quad c = 35,2 - 35,4 = -0,2 .$$

При покупке спрэда бабочки прибыли—убытки инвестора в расчете на 1 евро находятся по формуле **(28.4)**. В расчете на 1000 евро получим

$$П = (-a - c + 2b) \cdot 1000 = (0,3 + 0,2 - 2 \cdot 0,4) \cdot 1000 = -300 \text{ руб.}$$

При продаже спрэда бабочки прибыль инвестора в расчете на 1000 евро:

$$П = (a + c - 2b) \cdot 1000 = (-0,3 - 0,2 + 2 \cdot 0,4) \cdot 1000 = 300 \text{ руб.}$$

Рассчитанные двумя методами результаты совпали.

Глава 29

29.1. Так как $S \le S_0$, то для первой и второй ситуаций решение находим по первой формуле системы **(29.5)**. Знаки перед слагаемыми надо поменять на противоположные:

$$П_1 = -30 + 26 + 2 + 2 = 0 \text{ руб.};$$

$$П_2 = -30 + 30 + 2 + 2 = 4 \text{ руб.}$$

Так как $S > S_0$, то для третьей ситуации решение находится по второй формуле этой системы при измененных знаках перед слагаемыми:

$$П_3 = -35 + 30 + 2 + 2 = -1 \text{ руб.}$$

Таким образом, инвестор получил прибыль только во второй ситуации.

29.2. Для первой ситуации решение находим по первой формуле системы **(29.6)**:

$$П_1 = 30 - 25 - 2 \cdot 2 = 1 \text{ руб.} \text{ (прибыль составила 1 руб.).}$$

Для второй ситуации решение находим по второй формуле системы **(29.6)**:

$$П_2 = -2 \cdot 2 = -4 \text{ руб.} \text{ (убытки составили 4 руб.).}$$

Для третий и четвертой ситуаций решение находим по третьей формуле системы **(29.6)**:

$$П_3 = 37 - 35 - 2 \cdot 2 = -2 \text{ руб.} \text{ (убытки составили 2 руб.);}$$

$$П_4 = 42 - 35 + 2 \cdot 2 = 3 \text{ руб.} \text{ (прибыль составила 3 руб.).}$$

29.3. Для первой ситуации решение находим по первой формуле системы **(29.9)**:

$$П_1 = -5 + 10 = 5 \text{ руб.} \text{ (прибыль составила 5 руб.).}$$

Для второй ситуации решение находим по второй формуле системы **(29.9)**:

$$П_2 = -5 + 10 - 92 + 90 = 3 \text{ руб.} \text{ (прибыль составила 3 руб.).}$$

Для третьей ситуации решение находим по третьей формуле системы **(29.9)**:

$$П_3 = -5 + 10 - 98 + 90 = -3 \text{ руб.} \text{ (убытки составили 3 руб.).}$$

29.4. Для первой ситуации решение находим по первой формуле системы **(29.11)**:

$$П_1 = -10 + 5 + 100 - 90 = 5 \text{ руб.} \text{ (прибыль составила 5 руб.).}$$

Для второй ситуации решение находим по второй формуле системы **(29.11)**:

$$П_2 = -10 + 5 - 100 + 97 = 2 \text{ руб.} \text{ (прибыль составила 2 руб.).}$$

Для третьей ситуации решение находим по третьей формуле системы **(29.11)**:

$$П_3 = -10 + 5 = -5 \text{ руб.} \text{ (убытки составили 5 руб.).}$$

29.5. Для первой ситуации решение находим по первой формуле системы **(29.13)**:

$$П_1 = -10 + 5 = -5 \text{ руб.} \text{ (убытки составили 5 руб.).}$$

Для второй ситуации решение находим по второй формуле системы **(29.13)**:

$$П_2 = -10 + 5 - 90 + 93 = -2 \text{ руб.}$$ (убытки составили 2 руб.).

Для третьей ситуации решение находим по третьей формуле системы **(29.13)**:

$$П_3 = -10 + 5 - 90 + 100 = 5 \text{ руб.}$$ (прибыль составила 5 руб.).

29.6. Для первой ситуации решение находим по первой формуле системы **(29.15)**:

$$П_1 = -5 + 10 + 90 - 100 = -5 \text{ руб.}$$ (убытки составили 5 руб.).

Для второй ситуации решение находим по второй формуле системы **(29.15)**:

$$П_2 = -5 + 10 + 98 - 100 = 3 \text{ руб.}$$ (прибыль составила 3 руб.).

Для третьей ситуации решение находим по третьей формуле системы **(29.15)**:

$$П_3 = -5 + 10 = 5 \text{ руб.}$$ (прибыль составила 5 руб.).

29.7. Для первой ситуации решение находим по первой формуле системы **(29.17)**:

$$П_1 = -10 + 5 - 82 + 90 = 3 \text{ руб.}$$ (прибыль составила 3 руб.).

Для второй ситуации решение находим по второй формуле системы **(29.17)**:

$$П_2 = -10 + 5 = -5 \text{ руб.}$$ (убытки составили 5 руб.).

Для третьей ситуации решение находим по третьей формуле системы **(29.17)**:

$$П_3 = -10 + 5 - 103 + 100 = -8 \text{ руб.}$$ (прибыль составила 10 руб.).

29.8. Для первой ситуации решение находим по первой формуле системы **(29.19)**:

$$П_1 = -10 + 5 - 90 + 85 = -10 \text{ руб.}$$ (убытки составили 10 руб.).

Для второй ситуации решение находим по второй формуле системы **(29.19)**:

$$П_2 = -10 + 5 = -5 \text{ руб.}$$ (убытки составили 5 руб.).

Для третьей ситуации решение находим по третьей формуле системы **(29.19)**:

$$П_3 = -10 + 5 - 100 + 108 = 3 \text{ руб.}$$ (прибыль составила 3 руб.).

29.9. Для первой ситуации решение находим по первой формуле системы **(29.21)**:

$$П_1 = -2 \cdot 5 + 15 = 5 \text{ руб.}$$ (прибыль составила 5 руб.).

Для второй и третьей ситуаций решение находим по второй формуле системы **(29.21)**:

$$П_2 = -2 \cdot 5 + 15 + 90 - 95 = 0 \text{ руб. (прибыль и убытки отсутствуют);}$$

$$П_3 = -2 \cdot 5 + 15 + 90 - 100 = -5 \text{ руб. (убытки составили 5 руб.).}$$

Для четвертой ситуации решение находим по третьей формуле системы **(29.21)**:

$$П_4 = -2 \cdot 5 + 15 + 90 + 105 - 2 \cdot 100 = 0 \text{ руб. (прибыль и убытки отсутствуют).}$$

29.10. Для первой ситуации решение находим по первой формуле системы **(29.23)**:

$$П_1 = -2 \cdot 5 + 15 - 100 - 85 + 2 \cdot 90 = 0 \text{ руб. (прибыль и убытки отсутствуют).}$$

Для второй и третьей ситуаций решение находим по второй формуле системы **(29.23)**:

$$П_2 = -2 \cdot 5 + 15 - 100 + 90 = -5 \text{ руб. (убытки составили 5 руб.);}$$

$$П_3 = -2 \cdot 5 + 15 + 90 - 95 = 0 \text{ руб. (прибыль и убытки отсутствуют).}$$

Для четвертой ситуации решение находим по третьей формуле системы **(29.23)**:

$$П_4 = -2 \cdot 5 + 15 = 5 \text{ руб. (прибыль составила 5 руб.).}$$

29.11. Для первой ситуации решение находим по первой формуле системы **(29.25)**:

$$П_1 = -2 \cdot 7 + 12 + 4 = 2 \text{ руб. (прибыль составила 2 руб.).}$$

Для второй и третьей ситуаций решение находим по второй формуле системы **(29.25)**:

$$П_2 = -2 \cdot 7 + 12 + 4 - 92 + 90 = 0 \text{ руб. (прибыль и убытки отсутствуют);}$$

$$П_3 = -2 \cdot 7 + 12 + 4 - 95 + 90 = -3 \text{ руб. (убытки составили 3 руб.).}$$

Для четвертой ситуации решение находим по третьей формуле системы **(29.24)**:

$$П_4 = -2 \cdot 7 + 12 + 4 + 98 - 100 = 0 \text{ руб. (прибыль и убытки отсутствуют);}$$

Для пятой ситуации решение находим по четвертой формуле системы **(29.25)**:

$$П_5 = -2 \cdot 7 + 12 + 4 = 2 \text{ руб. (прибыль составила 2 руб.).}$$

Глава 30

30.1. Из формулы **(30.1)** находим выплаты по опциону: в верхнем состоянии цены актива $F_u = Su - S_0 = 40 - 30 = 10$ руб.; в нижнем состоянии $F_d = 0$ руб. Коэффициент полного хеджирования, или количество проданных опционов, вычисляем по формуле **(30.2)**:

$$k = \frac{Su - Sd}{F_u - F_d} = \frac{40 - 20}{10 - 0} = 2.$$

Цена опциона определяется соотношением **(30.4)**:

$$F = \frac{S}{k} - \frac{Su - kF_u}{k} \cdot \mathrm{e}^{-\delta T} = \frac{28}{2} - \frac{40 - 2 \cdot 10}{2} \cdot \mathrm{e}^{-0,1} = 4,95 \text{ руб.}$$

Стоимость портфеля из одной акции и двух проданных опционов колл составит (см. формулу **(30.3)**)

$$P = S - kF = 28 - 2 \cdot 4,95 = 18,1 \text{ руб.}$$

Прибыли для инвестора через год составят:

- для верхнего состояния $Su - kF_u = 40 - 2 \cdot 10 = 20$ руб.;
- для нижнего состояния $Sd - kF_d = 20 - 2 \cdot 0 = 20$ руб.

Количество акций в эквивалентном портфеле находим по первой формуле **(30.5)**:

$$\Delta = \frac{F_u - F_d}{Su - Sd} = \frac{10 - 0}{40 - 20} = 0,5.$$

Стоимость безрисковых активов эквивалентного портфеля определяется по второй формуле **(30.5)**. Предварительно находим $u = \frac{40}{28}$, $d = \frac{20}{28}$, тогда

$$b = \frac{uF_d - dF_u}{u - d} \cdot \mathrm{e}^{-\delta T} = \frac{\frac{40}{28} \cdot 0 - \frac{20}{28} \cdot 10}{\frac{40}{28} - \frac{20}{28}} \cdot \mathrm{e}^{-0,1} = -9,05 \text{ руб.}$$

Знак минус в значении для безрисковых облигаций означает, что инвестор занял под безрисковый процент 9,05 руб. на их покупку.

30.2. Как следует из формулы **(30.9)**,

$$F_u = 0 \text{ руб.}; \; F_d = 30 - 20 = 10 \text{ руб.}$$

Количество акций в эквивалентном портфеле находим по первой формуле **(30.5)**:

$$\Delta = \frac{F_u - F_d}{Su - Sd} = \frac{0 - 10}{40 - 20} = -0,5.$$

Знак минус в значении для количества акций означает, что инвестор занял под безрисковый процент $0,5 \cdot 28 = 14$ руб. на их покупку.

Стоимость безрисковых активов эквивалентного портфеля определяется по второй формуле **(30.5)**. Предварительно находим $u = \frac{40}{28}, d = \frac{20}{28}$, тогда

$$b = \frac{uF_d - dF_u}{u-d} \cdot e^{-\delta T} = \frac{\frac{40}{28} \cdot 10 - \frac{20}{28} \cdot 0}{\frac{40}{28} - \frac{20}{28}} \cdot e^{-0,1} = 18{,}1 \text{ руб.}$$

Цена опциона определяется по формуле **(30.6)**:

$$F = S \cdot \Delta + b = -28 \cdot 0{,}5 + 18{,}1 = 4{,}1 \text{ руб.}$$

30.3. По формуле **(30.14)** находим

$$F_П = F_К - S + S_0 e^{-\delta T} = 4{,}95 - 28 + 30e^{-0,1} = 4{,}1 \text{ руб.}$$

Эта цена совпала с полученной в примере 30.2.

30.4. Значения u и d определяются формулами **(30.27)**:

$$u = e^{\sigma_T / \sqrt{n}} = e^{0,2/\sqrt{3}} = 1{,}1224; \quad d = e^{-\sigma_T / \sqrt{n}} = e^{-0,2/\sqrt{3}} = 0{,}8909.$$

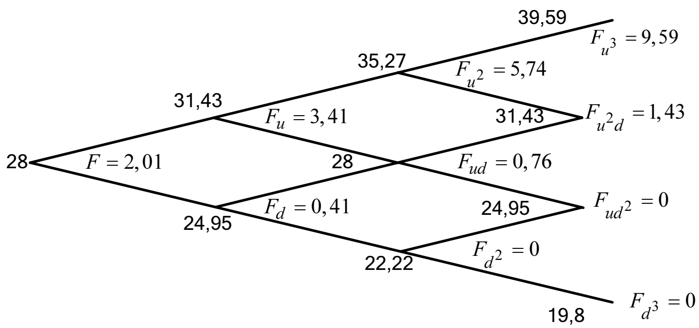
Вероятность перехода цены акции для каждого периода в конце четвертого месяца из начального состояния в верхнее определяется по формуле **(30.17)**:

$$p = \frac{e^{\delta T/3} - d}{u-d} = \frac{e^{0,05/3} - 0{,}8909}{1{,}1224 - 0{,}8909} = 0{,}5439.$$

Вероятность перехода цены акции для каждого периода в конце четвертого месяца из начального состояния в нижнее равно

$$1 - p = 1 - 0{,}5439 = 0{,}4561.$$

Сначала найдем цену акции для каждого узла дерева распределения (см. рисунок).



В узле Su цена акции $Su = 28 \cdot 1{,}1224 = 31{,}43$ руб.; в узле $Suu = 28 \cdot 1{,}1224^2 =$ $= 35{,}27$ руб.; в узле $Sud = 28 \cdot 1{,}1224 \cdot 0{,}8909 = 28$ руб., и т.д.

Стоимость опциона в узлах пересчитывается слева направо, т.е. начинается расчет для конца года, а заканчивается — для начала. В конце срока опциона цену находят по формуле $\max\left\{0, Su^i d^{n-i} - S_0\right\}$. Для самого нижнего состояния $Sd^3 < S_0$, поэтому $F_{d^3} = 0$. Для второго снизу состояния $Sud^2 < S_0$, т.е. $F_{ud^2} = 0$. Для третьего снизу состояния $Su^2 d > S_0$, поэтому $F_{u^2 d} = 31{,}43 - 30 = 1{,}43$. Для самого верхнего состояния $Su^3 > S_0$, или $F_{u^3} = 39{,}59 - 30 = 9{,}59$.

В конце второго периода (через восемь месяцев с начала процесса) цена опциона в узлах:

$$F_{u^2} = \left[pF_{u^3} + (1-p) F_{u^2 d} \right] \cdot \mathrm{e}^{-\delta T/3} =$$

$$= \left(0{,}5439 \cdot 9{,}53 + 0{,}4561 \cdot 1{,}43\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05/3} = 5{,}74 \text{ руб.};$$

$$F_{ud} = \left[pF_{u^2 d} + (1-p) F_{ud^2} \right] \cdot \mathrm{e}^{-\delta T/3} =$$

$$= \left(0{,}5439 \cdot 1{,}43 + 0{,}4561 \cdot 0\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05/3} = 0{,}76 \text{ руб.};$$

$$F_{d^2} = \left[pF_{ud^2} + (1-p) F_{d^3} \right] \cdot \mathrm{e}^{-\delta T/3} =$$

$$= \left(0{,}5439 \cdot 0 + 0{,}4561 \cdot 1{,}43\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05/3} = 0 \text{ руб.}$$

В конце первого периода:

$$F_u = \left[pF_{u^2} + (1-p) F_{ud} \right] \cdot \mathrm{e}^{-\delta T/3} =$$

$$= \left(0{,}5439 \cdot 5{,}74 + 0{,}4561 \cdot 0{,}76\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05/3} = 3{,}41 \text{ руб.};$$

$$F_d = \left[pF_{ud} + (1-p) F_{d^2} \right] \cdot \mathrm{e}^{-\delta T/3} =$$

$$= \left(0{,}5439 \cdot 0{,}76 + 0{,}4561 \cdot 0\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05/3} = 0{,}41 \text{ руб.}$$

И наконец, цена опциона в момент заключения контракта при $t = 0$:

$$F = \left[pF_u + (1-p) F_d \right] \cdot \mathrm{e}^{-\delta T/3} =$$

$$= \left(0{,}5439 \cdot 3{,}41 + 0{,}4561 \cdot 0{,}41\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05/3} = 2{,}01 \text{ руб.}$$

Непосредственно эту цену можно найти по формуле **(30.25)**:

$$F = \mathrm{e}^{-\delta T} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \max\left\{0, Su^i d^{n-i} - S_0\right\} =$$

$$= \mathrm{e}^{-0{,}05} \begin{pmatrix} 0{,}4561^3 \max\left\{0,\ 28 \cdot 0{,}8909^3 - 30\right\} + \\ +3 \cdot 0{,}5439 \cdot 0{,}4561^2 \max\left\{0,\ 28 \cdot 1{,}1224 \cdot 0{,}8909^2 - 30\right\} + \\ +3 \cdot 0{,}5439^2 \cdot 0{,}4561 \max\left\{0,\ 28 \cdot 1{,}1224^2 \cdot 0{,}8909 - 30\right\} + \\ +0{,}5439^3 \max\left\{0,\ 28 \cdot 1{,}1224^3 - 30\right\} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(0 + 0 + 0{,}577 + 1{,}543\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05} = 2{,}01 \text{ руб.}$$

30.5. Найдем d_1 и d_2 по формулам **(30.29)** и **(30.30)**:

$$d_1 = \frac{\ln\dfrac{S}{S_0} + \left(\delta + 0,5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\dfrac{28}{30} + 0,05 + 0,5\cdot 0,2^2}{0,2} = 0,005;$$

$$d_1 = \frac{\ln\dfrac{S}{S_0} + \left(\delta + 0,5\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\dfrac{28}{30} + 0,05 - 0,5\cdot 0,2^2}{0,2} = -0,195.$$

Цену опциона колл определяем по формуле **(30.28)**:

$$F = SN\left(d_1\right) - S_0 \mathrm{e}^{-\delta T} N\left(d_2\right) = 28N\left(0,005\right) - 30\mathrm{e}^{-0,05} N\left(-0,195\right) =$$

$$= 28\cdot 0,5 - 28,537\cdot 0,421 = 1,99 \text{ руб.}$$

Цена опциона пут *примера 17.20* определяется по формуле **(30.31)**:

$$F = -SN\left(-d_1\right) + S_0 \mathrm{e}^{-\delta T} N\left(-d_2\right) = -28N\left(-0,005\right) + 30\mathrm{e}^{-0,05} N\left(0,195\right) =$$

$$= -28\cdot 0,5 + 28,537\cdot 0,579 = 2,52 \text{ руб.}$$

30.6. Количество выписанных опционов колл хеджированного портфеля определяется по формуле, следующей из формулы **(30.33)**:

$$K = \frac{C}{\Delta} = \frac{100}{0,5} = 200\cdot$$

Таким образом, хеджированный портфель состоит из 100 акций и 200 выписанных опционов колл.

Глава 31

31.1. Состав портфеля в оптимальной точке

$$x_0 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} = \frac{0,9 - 0,2}{0,6 + 0,9 - 2\cdot 0,2} = 0,6364.$$

Доходность портфеля и риск в оптимальной точке

$$a_{p,0} = x_0 a_1 + \left(1 - x_0\right) a_2 = 0,6364\cdot 0,12 + \left(1 - 0,6364\right)\cdot 0,2 = 0,1491;$$

$$\sigma_{p,0} = \sqrt{x_0^2\sigma_1^2 + \left(1 - x_0\right)^2 \sigma_2^2 + 2x_0\left(1 - x_0\right)\sigma_{12}} =$$

$$= \sqrt{0,6364^2\cdot 0,6 + (1 - 0,6364)^2\cdot 0,9 + 2\cdot 0,6364\cdot(1 - 0,6364)\cdot 0,2} = 0,674.$$

Доходность портфеля и риск в крайних точках и в оптимальной точке представлены в таблице.

x	1	0,6364	0
a_p	0,12	0,1491	0,2
σ_p	0,745	0,674	0,949

График доходность—риск портфеля представлен на рисунке.

31.2. $x_0 = \dfrac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} = \dfrac{1,2 - 0,3}{0,8 + 1,2 - 2 \cdot 0,3} = 0,643;$

$$a_{p,0} = x_0 a_1 + \left(1 - x_0\right) a_2 = 0,643 \cdot 0,15 + \left(1 - 0,643\right) \cdot 0,3 = 0,204;$$

$$\sigma_{p,0} = \sqrt{x_0^2 \sigma_1^2 + \left(1 - x_0\right)^2 \sigma_2^2 + 2x_0\left(1 - x_0\right)\sigma_{12}} =$$

$$= \sqrt{0,643^2 \cdot 0,8 + (1 - 0,643)^2 \cdot 1,2 + 2 \cdot 0,643 \cdot \left(1 - 0,643\right) \cdot 0,3} = 0,588.$$

x	1	0,643	0
a_p	0,15	0,204	0,3
σ_p	0,894	0,788	1,095

31.3. Для определения состава оптимального портфеля в экстремальной точке найдем обратную матрицу α^{-1} матрицы риска

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1{,}6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2{,}8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для расчета элементов обратной матрицы использованы программы Excel. Для этих целей:

1) вносят значения элементов матрицы в таблицу;
2) выделяют поле для записи обратной матрицы;
3) нажимают на f_x;
4) в категориях «Математические» выбирают функцию «МОБР»;
5) OK;
6) выделяют преобразуемую матрицу;
7) одновременно нажимают Ctrl + Shift + Enter.

Обратная матрица равна

$$\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}495495 & -0{,}315315 & -0{,}18018 & 0{,}504505 \\ -0{,}315315 & 0{,}427928 & -0{,}112613 & 0{,}315315 \\ -0{,}18018 & -0{,}112613 & 0{,}292793 & 0{,}18018 \\ 0{,}504505 & 0{,}315315 & 0{,}18018 & -0{,}504505 \end{bmatrix}.$$

По формуле **(31.33)** находим матрицу-столбец состава портфеля:

$$\chi = \begin{bmatrix} 0{,}495495 & -0{,}315315 & -0{,}18018 & 0{,}504505 \\ -0{,}315315 & 0{,}427928 & -0{,}112613 & 0{,}315315 \\ -0{,}18018 & -0{,}112613 & 0{,}292793 & 0{,}18018 \\ 0{,}504505 & 0{,}315315 & 0{,}18018 & -0{,}504505 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}504505 \\ 0{,}315315 \\ 0{,}18018 \\ -0{,}504505 \end{bmatrix}.$$

Доли ценных бумаг первого x_1, второго x_2 и третьего x_3 типов представлены соответственно в первой, второй и третьей строках матрицы-столбца состава портфеля.

Доходность портфеля в этой точке и риск определяются по формулам **(31.24)**:

$$a_p = a'x = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}16 & 0{,}22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5045 \\ 0{,}3153 \\ 0{,}1802 \end{pmatrix} = 0{,}1355;$$

$$\sigma_p^2 = x' \cdot \sigma \cdot x = \begin{pmatrix} 0{,}5045 & 0{,}3153 & 0{,}1802 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5045 \\ 0{,}3153 \\ 0{,}1802 \end{pmatrix} = 0{,}504505;$$

$$\sigma_p = 0{,}71.$$

Состав, доходность и риск портфеля в экстремальной точке приведены в таблице.

a_p	0,1057	0,12	0,13	0,1355	0,15	0,17	0,1909
x_1	0,7758	0,6456	0,5545	0,5045	0,3724	0,1903	0
x_2	0,224	0,2676	0,2985	0,3153	0,3598	0,4211	0,4851
x_3	0,0002	0,0866	0,147	0,1802	0,2678	0,3886	0,5149
σ_p	0,826	0,74	0,715	0,71	0,739	0,862	1,059

Для определения состава оптимального портфеля найдем обратную матрицу A^{-1} матрицы риск—доходность

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,09 & 1 \\ 0 & 1,6 & 0 & 0,16 & 1 \\ 0 & 0 & 2,4 & 0,22 & 1 \\ 0,09 & 0,16 & 0,22 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица

$$\grave{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,081154 & -0,175834 & 0,09468 & -9,107304 & 1,738503 \\ -0,175834 & 0,380974 & -0,20514 & 3,065825 & -0,10009 \\ 0,09468 & -0,20514 & 0,11046 & 6,041479 & -0,638413 \\ -9,107304 & 3,065825 & 6,041479 & -200,1803 & 27,12353 \\ 1,738503 & -0,10009 & -0,638413 & 27,12353 & -4,179621 \end{bmatrix}.$$

По формуле **(31.31)** находим матрицу-столбец состава портфеля для доходности портфеля 0,15:

$$X = \begin{bmatrix} 0,081154 & -0,175834 & 0,09468 & -9,107304 & 1,738503 \\ -0,175834 & 0,380974 & -0,20514 & 3,065825 & -0,10009 \\ 0,09468 & -0,20514 & 0,11046 & 6,041479 & -0,638413 \\ -9,107304 & 3,065825 & 6,041479 & -200,1803 & 27,12353 \\ 1,738503 & -0,10009 & -0,638413 & 27,12353 & -4,179621 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,15 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3724 \\ 0,3598 \\ 0,2678 \\ -2,9035 \\ -0,1111 \end{bmatrix}.$$

Доли ценных бумаг первого x_1, второго x_2 и третьего x_3 типов представлены соответственно в первой, второй и третьей строках матрицы-столбца состава портфеля.

Риск портфеля в этой точке определяется по формуле **(31.24)**:

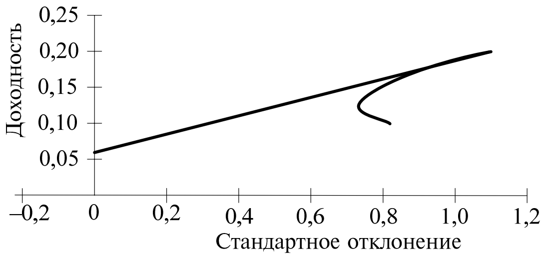
$$\sigma_p^2 = x' \cdot \sigma \cdot x = \begin{pmatrix} 0,3724 & 0,3598 & 0,2678 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6 & 0 \\ 0 & 0 & 2,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3724 \\ 0,3598 \\ 0,2678 \end{pmatrix} = 0,54662;$$

$$\sigma_p = 0,739.$$

Таким образом, по полученным данным заполним таблицу составов, доходностей и рисков портфеля.

График доходность—риск представлен на рисунке.

31.4. Состав портфеля для рисковых ценных бумаг первого, второго и третьего типов определен при решении предыдущей задачи. Построен также график доходность—риск. Этот график представлен на рисунке в виде пули.



Функция ожидаемой доходности портфеля от среднего квадратичного отклонения имеет вид

$$a_p = \frac{a_{p,k} - a_0}{\sigma_{p,k}} \cdot \sigma_p + a_0 ,$$

где $\sigma_{p,k}$, $a_{p,k}$ — координаты точки касания прямой линии и функции доходность—риск для рисковых ценных бумаг портфеля.

В точке касания безрисковые ценные бумаги отсутствуют, т.е. $x_0 = 0$. Определение доходности портфеля в точке касания можно найти из уравнения **(31.38)**. Запишем это уравнение в виде

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a_p \\ 1 \end{bmatrix},$$

где
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,06 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,09 & 1 \\ 0 & 0 & 1,6 & 0 & 0,16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2,8 & 0,22 & 1 \\ 0,06 & 0,09 & 0,16 & 0,22 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При значении доходности $a_{p,k} = 0,16887828$ имеем следующий состав оптимального портфеля:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0,2005; \quad x_2 = 0,4176; \quad x_3 = 0,3819.$$

Дисперсию портфеля в точке касания найдем по первой формуле **(31.24)** для оптимального портфеля, состоящего из рисковых бумаг:

$$\sigma_p^2 = x'\sigma x = \begin{pmatrix} 0,2005 & 0,4176 & 0,3819 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6 & 0 \\ 0 & 0 & 2,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2005 \\ 0,4176 \\ 0,3819 \end{pmatrix} = 0,7276.$$

Риск в точке касания

$$\sigma_{p,k} = 0,853.$$

Таким образом, функция ожидаемой доходности портфеля от среднего квадратичного отклонения приобретает вид

$$a_p = \frac{0,16887828 - 0,06}{0,853} \cdot \sigma_p + 0,06 = 0,128\sigma_p + 0,06.$$

График этой прямой показан на приведенном выше рисунке.

Так как инвестор выбрал для своего портфеля стандартное отклонение, равное 0,25, то долю безрисковых бумаг в портфеле можно найти по формуле **(31.39)**:

$$x_0 = \frac{0,853 - 0,25}{0,853} = 0,707 \cdot$$

Доля рисковых бумаг:

$$x_1 = 0,293 \cdot 0,2005 = 0,059; \quad x_2 = 0,293 \cdot 0,4176 = 0,122;$$
$$x_3 = 0,293 \cdot 0,3819 = 0,112.$$

Ожидаемая доходность определяется по формуле

$$a_{p,u} = x_0 a_0 + (1 - x_0) a_{p,k} = 0,707 \cdot 0,06 + 0,293 \cdot 0,1689 = 0,092,$$

$$\text{или } 9,2\%.$$

Как и следовало ожидать, доходность портфеля больше доходности безрискового актива, но меньше доходности портфеля в точке касания.

Глава 32

32.1. Результаты вычислений представлены в четвертом и пятом столбцах таблицы.

Номер ценной бумаги	*Удельный вес каждого портфеля*		*Удельный вес общего портфеля*	
	1-й класс	*2-й класс*	*1-й класс*	*2-й класс*
1	0,3	0,35	$0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$	$0{,}35 \cdot 0{,}3 = 0{,}105$
2	0,25	0,4	$0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}175$	$0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$
3	0,2	0,25	$0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$	$0{,}25 \cdot 0{,}3 = 0{,}075$
4	0,25		$0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}175$	
Итого	**1,0**	**1,0**	**0,7**	**0,3**

32.2. Решение в виде потоков платежей представлено в таблице.

Номер квартала	*Доходность индекса, %*	*Денежные потоки стороны А, млн руб.*				*Денежные потоки стороны В, млн руб.*			
		Поступления по облигациям	*Поступления от стороны В*	*Платежи стороне В*	***Итого***	*Поступления по акциям*	*Поступления от стороны А*	*Платежи стороне А*	***Итого***
1	3	2	3	−2	**3**	3	2	−3	**2**
2	2	2	2	−2	**2**	2	2	−2	**2**
3	1	2	1	−2	**1**	1	2	−1	**2**
4	4	2	4	−2	**4**	4	2	−4	**2**

Из этой таблицы следует, что сторона *А*, обладая облигациями, получает доход, который приносят акции, а сторона *В*, обладая акциями, получает доход, который приносят облигации. В сумме сторона *А* получит на 2 млн руб. больше.

32.3. Определяем стоимость портфеля в начале и конце периода по формуле **(32.2)**:

$$P = 90 \cdot 120 + 87 \cdot 200 + 185 \cdot 150 = 55\ 950 \text{ руб.};$$

$$S = 89 \cdot 120 + 101{,}5 \cdot 200 + 203 \cdot 150 = 61\ 430 \text{ руб.}$$

Доходность портфеля находится по формуле **(32.1)**:

$$a_{p,t} = \frac{61\ 430 - 55\ 950}{55\ 950} = 0{,}08, \text{ или } 8\%.$$

Таким образом, доходность за исследуемый период составила 8%.

32.4. Подставив данные примера в **(32.3)**, получим

$$10+\frac{1}{1+q_B}=\frac{10,5}{(1+q_B)^2}; \quad 10q_B^{\,2}+21q_B+0,5=0.$$

Решив квадратное уравнение, найдем доходность за полквартала

$$q_B=\frac{-21+\sqrt{21^2-20}}{20}=-0,024, \text{ или } -2,4\%.$$

Доходность за квартал

$$a_{p,t}=(1-0,024)^2-1=-0,0474, \text{ или } -4,75\%.$$

Для определения доходности, взвешенной во времени, определим доходности за первую и вторую половины квартала:

$$a_1=\frac{9-10}{10}=-0,1; \quad a_2=\frac{10,5-(9+1)}{9+1}=0,05.$$

Доходность, взвешенная во времени, равна

$$a_{p,t}=(1-0,1)(1+0,05)-1=-0,055, \text{ или } -5,5\%.$$

Таким образом, внутренняя ставка доходности и доходность, взвешенная во времени, отличаются друг от друга.

ОГЛАВЛЕНИЕ